NOTE

SUR

LES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DÉFINIES

PAR

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES,

PAR M. HENRI POINCARÉ,

Élève-ingénieur des Mines.

MM. Briot et Bouquet ont étudié les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles. Ils ont démontré que, quand le coefficient différentiel est fonction holomorphe de y et de x, l'équation admet une intégrale y fonction holomorphe de x. Ils ont examiné ensuite ce qui se passe quand le coefficient différentiel cesse d'être fonction holomorphe de x et de y, et ils ont fait voir qu'il pouvait se présenter deux cas :

1° y est fonction holomorphe de x ou de $x^{\frac{1}{n}}$, n étant un nombre entier quelconque.

2° y est une fonction présentant des singularités plus complexes. Dans ce cas, l'équation différentielle peut se ramener à l'une des trois formes

$$
\begin{array}{llll}
x\dfrac{dy}{dx}=f(x,y), & \dfrac{df}{dy}\gtrless 0, & \text{pour}\quad x=0, & y=0,\\
x\dfrac{dy}{dx}=f(x,y), & \dfrac{df}{dy}=0, & \text{pour}\quad x=0, & y=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots,\\
x^m\dfrac{dy}{dx}=f(x,y), & & &
\end{array}
$$

où $f(x, y)$ est holomorphe en x et en y. C'est la première de ces formes qui se présentera si l'équation différentielle donnée, étant algébrique, est la plus générale *de son degré*.

C'est celle aussi que MM. Briot et Bouquet ont étudiée plus particulièrement, et c'est à elle que se bornera la présente étude.

MM. Briot et Bouquet ont démontré que :

1° Si $\frac{df}{dy}$, pour $x = y = 0$, n'est pas entier positif, l'équation admet une intégrale holomorphe s'évanouissant avec x;

2° Si $\frac{df}{dy}$, pour $x = y = 0$, est commensurable et positif, mais non entier, l'équation admet une infinité d'intégrales holomorphes en $x^{\frac{1}{m}}$, m étant le dénominateur de $\frac{df}{dy}$;

3° Si $\frac{df}{dy}$, pour $x = y = 0$, a sa partie réelle négative, l'équation n'admet pas d'autre intégrale s'évanouissant avec x que l'intégrale holomorphe;

4° Si $\frac{df}{dy}$, pour $x = y = 0$, a sa partie réelle positive, l'équation admet, outre l'intégrale holomorphe, une infinité d'intégrales non holomorphes s'avanouissant avec x.

Mais ces géomètres ont laissé de côté l'étude de ces intégrales non holomorphes; nous démontrons, au sujet de ces intégrales :

1° Que, si $\frac{df}{dy} = \lambda$ pour $x = y = 0$, elles sont holomorphes en x et x^λ si λ n'est pas entier positif et a sa partie réelle positive;

2° Que si $\frac{df}{dy}$, pour $x = y = 0$, est entier positif, elles sont holomorphes en x et $x\mathrm{L}x$.

Dans quels cas une fonction y, définie par une équation différentielle de la forme

$$x\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

où f est une fonction holomorphe de x et de y dans les environs de $x = 0$,

$y = 0$, peut-elle se représenter dans les environs de $x = 0$ par une série à double entrée convergente, suivant les puissances croissantes de x et de x^λ, où λ est un nombre quelconque réel ou imaginaire?

Supposons que cela soit possible, et voyons quels devront être les coefficients de la série. On aura

$$y = \varphi(x, z), \quad z = x^\lambda,$$

où y est une fonction holomorphe de x et de z dans les environs de $x = 0$ et $z = 0$.

Remplaçons, dans l'équation (1), y par sa valeur $\varphi(x, z)$ et $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur $\frac{d\varphi}{dx} + \frac{dz}{dx}\frac{d\varphi}{dz}$ ou $\frac{d\varphi}{dx} + \lambda x^{\lambda-1}\frac{d\varphi}{dz}$,

$$x\frac{dy}{dx} = n\frac{d\varphi}{dx} + \lambda z\frac{d\varphi}{dz}.$$

Différentions ensuite l'équation (1') ainsi transformée un nombre quelconque de fois par rapport à x, un nombre quelconque de fois par rapport à z; nous aurons la série d'équations

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda z\frac{d^2y}{dx\,dz} + \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx},$$

$$x\frac{d^2y}{dx\,dz} + \lambda z\frac{d^2y}{dz^2} + \lambda\frac{dy}{dz} = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dz},$$

$$x\frac{d^3y}{dx^3} + \lambda z\frac{d^3y}{dx^2\,dz} + 2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}\frac{d^2f}{dy\,dx} + \frac{d^2f}{dy^2}\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{df}{dy},$$

. . . .

Voyons la composition de l'équation obtenue par m différentiations par rapport à x et n par rapport à z.

1° Je dis que le premier membre sera

$$x\frac{d^{m+n+1}y}{d^{m+1}x\,d^nz} + \lambda z\frac{d^{m+n+1}y}{d^mx\,d^{n+1}z} + (m + n\lambda)\frac{d^{m+n}y}{d^mx\,d^nz}.$$

En effet, si cela est vrai pour $m = m$, $n = n$, ce sera vrai aussi pour

$m = m + 1$, $n = n$, ou pour $n = n + 1$, $m = m$. Différentions en effet l'expression précédente successivement par rapport à x et par rapport à z; nous aurons

$$x\frac{d^{m+n+2}y}{d^{m+2}x\,d^n z} + \lambda z\frac{d^{m+n+2}y}{d^{m+1}x\,d^{n+1}z} + (m+1+n\lambda)\frac{d^{m+n+1}y}{d^{m+1}x\,d^n z},$$

$$x\frac{d^{m+n+2}y}{d^{m+1}x\,d^{n+1}z} + \lambda z\frac{d^{m+n+2}y}{d^m x\,d^{n+2}z} + (m+\lambda+n\lambda)\frac{d^{m+n+1}y}{d^m x\,d^{n+1}z}.$$

2° Je dis que le second membre sera formé d'une somme de produits ayant pour facteurs : 1° un coefficient constant positif; 2° une dérivée partielle de f par rapport à x et à y; 3° différents facteurs de la forme $\frac{d^{\alpha+\beta}y}{d^\alpha x\,d^\beta z}$, où $\alpha \leq m$, $\beta \leq n$. De plus, $\frac{d^{m+n}y}{d^m x\,d^n z}$ n'entre que dans un terme où il est multiplié par $\frac{df}{dy}$.

En effet, il est facile de faire voir, par une simple différentiation par rapport à x, que, si cela est vrai pour $m = m$, $n = n$, cela est vrai encore pour $m = m + 1$, $n = n$.

Cela posé, voyons comment nous pourrons déterminer les coefficients successifs $\frac{1}{1.2\ldots m\,1.2\ldots n}\frac{d^{m+n}y}{d^m x\,d^n z}$.

Remarquons que x et z sont nuls; le premier membre de chaque équation se réduira à $\frac{d^{m+n}y}{d^m x\,d^n z}(m + n\lambda)$; la seconde équation deviendra $\lambda = \frac{df}{dy}$, $\frac{dy}{dz}$ pouvant d'ailleurs prendre une valeur quelconque.

Si l'on fait passer le terme $\frac{d^{m+n}y}{d^m x\,d^n z}\frac{df}{dy}$ dans le premier membre, celui-ci devient $\frac{d^{m+n}y}{d^m x\,d^n z}[m + (n-1)\lambda]$, et le second ne contient plus que des termes en $\frac{d^{\alpha+\beta}y}{d^\alpha x\,d^\beta y}$, où $\alpha < m$, $\beta < n$. On peut donc calculer successivement chacune des dérivées partielles de y.

1° $\frac{d^{m+n}y}{d^m x\,d^n z}$ est égal à une somme de produits ayant pour facteurs : 1° un coefficient positif; 2° diverses dérivées partielles de f; 3° un produit de termes de la forme $\frac{1}{\alpha + \beta\lambda}$, où $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, m$, $\beta = -1, 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

En effet, on voit facilement que, si cela est vrai pour toutes les valeurs de $\frac{d^{\alpha+\beta}y}{d^\alpha x\, d^\beta z}$, où $\alpha \leq m$, $\beta \leq n$, sauf pour $\frac{d^{m+n}y}{d^m x\, d^n z}$, en remplaçant dans l'équation qui donne cette dérivée toutes les dérivées connues par leurs valeurs, on obtiendra une expression de même forme.

2° Le facteur $\frac{1}{a-\lambda}$ ne peut entrer dans aucun des produits à une puissance supérieure à $\frac{m}{a}$.

En effet, nous avons vu que le second membre de ces équations se réduit à

$$\Sigma \mathrm{KP}\left(\frac{d^{\alpha+\beta}y}{d^\alpha x\, d^\beta z}\right)\frac{d^{\gamma+\delta}f}{d^\gamma x\, d^\delta y},$$

où P représente un produit de plusieurs facteurs de même forme.

Si l'on différentie cette expression par rapport à x, on obtiendra différents termes. Dans chacun d'eux, ou bien l'un des α sera augmenté d'une unité, ou bien γ sera augmenté d'une unité, ou bien δ augmentera d'une unité, et l'on multipliera par $\frac{dy}{dx}$. Si l'on différentie par rapport à z, aucun des α ne variera. Donc l'expression $\gamma + \Sigma\alpha$ augmentera d'une unité quand on différentiera par rapport à x, ne changera pas dans les différentiations par rapport à z. Donc

$$\gamma + \Sigma\alpha = m, \quad \Sigma\alpha < m.$$

Supposons que la puissance à laquelle entre le facteur $\frac{1}{a-\lambda}$ soit plus petite que $\frac{\alpha}{a}$ pour toutes les valeurs de α plus petites que m, et remplaçons ces dérivées connues par leurs valeurs dans l'expression de $\frac{d^{m+n}y}{d^m x\, d^n z}$, comme nous l'avons dit plus haut. Le terme $\frac{1}{a-\lambda}$ sera à une puissance plus petite que $\frac{\Sigma\alpha}{a}$ et, *a fortiori*, plus petite que $\frac{m}{a}$. C. Q. F. D.

Voyons maintenant dans quels cas la série est convergente, et, pour cela, remarquons que chaque terme de la série est formé d'une somme de produits. Considérons chacun de ces produits comme formant un terme de la série, et démontrons que le tableau des modules de la série ainsi constituée est convergent.

Premier cas. — Soit l'équation

$$x\frac{dy}{dx}=\alpha_0+\beta_0 y+\frac{M}{\left(1-\frac{x}{R}\right)\left(1-\frac{y}{R'}\right)},$$

où α_0 et β_0 sont choisis de telle sorte que, pour $x=y=0$, le second membre s'annule et que $\lambda=\frac{df}{dy}=\frac{1}{m}$, m étant un nombre entier.

Les dérivées partielles du second membre sont toutes positives. Il en est de même des termes $\frac{1}{\alpha+\beta\lambda}$, où α est nul ou positif et $\beta>-1$.

Donc tous les termes de la série sont positifs. Si donc on démontre que les termes arrangés d'une certaine manière forment une série convergente, il en sera de même du tableau des modules des termes de la série.

Or, comme $\lambda=\frac{1}{m}$, en posant $x=z^m$, on a une équation de même forme, où $\lambda=1$ et où, par conséquent, comme l'ont fait voir MM. Briot et Bouquet, y est développable en série convergente suivant les puissances de z, c'est-à-dire de $x^{\frac{1}{m}}$.

Donc, dans ce cas, la série est toujours convergente, car elle l'est lorsqu'on range les termes de façon que $m+n\lambda$ aille toujours en croissant.

Deuxième cas. — Supposons le cas général; seulement la partie réelle de λ est positive,

$$x\frac{dy}{dx}=f(x,y).$$

On peut toujours choisir $\lambda'=\frac{1}{m}$ de façon que la partie réelle de λ soit plus grande que λ'.

Considérons maintenant une équation de la forme examinée dans le cas précédent, où λ soit égal à la valeur de λ', que nous venons de choisir, où M est le plus grand module que puisse acquérir f quand le module de x reste plus petit que R et celui de y plus petit que R'. La série relative à cette seconde équation aura son tableau des modules convergents.

Pour passer de cette série à celle qui est relative à l'équation donnée, il suffit de multiplier chaque terme :

1° Par le rapport des dérivées partielles de f à celles du second membre de la seconde équation, rapport toujours plus petit que 1, puisque chaque dérivée de f est plus petite que la dérivée correspondante de $\dfrac{M}{\left(1-\frac{x}{R}\right)\left(1-\frac{y}{R'}\right)}$;

2° Par le rapport $\dfrac{x'^m x'^{n\lambda}}{x'^m x'^{n\lambda'}}$;

3° Par le rapport $\dfrac{\text{produit de } \alpha+\beta\lambda'}{\text{produit de } \alpha+\beta\lambda}$, où nous ne considérons, pour le moment, que les termes où β est positif. La partie réelle de $\alpha+\beta\lambda'$ est plus petite que celle de $\alpha+\beta\lambda$ par hypothèse; de plus, $\alpha+\beta\lambda'$ est réel; donc

$$| \text{ mod. } \alpha+\beta\lambda' < \text{mod. } \alpha+\beta\lambda \ |.$$

Donc le rapport considéré est plus petit que 1.

4° Par le rapport $\dfrac{\text{produit } \alpha-\lambda'}{\text{produit } \alpha-\lambda}$.

D'abord, comme $\alpha-\lambda'$ est réel et que sa partie réelle est plus grande que celle de $\alpha-\lambda$, on peut toujours prendre α assez grand pour que le module de $\dfrac{\alpha-\lambda'}{\alpha-\lambda}$ soit plus grand que 1.

Par conséquent, le rapport considéré peut être représenté, à moins que λ ne soit un nombre entier positif, par

$$\theta^m \frac{(1-\lambda')^m}{(1-\lambda)^m} \frac{(2-\lambda')^{\frac{m}{2}}}{(2-\lambda)^{\frac{m}{2}}} \cdots \frac{(\alpha-\lambda')^{\frac{m}{\alpha}}}{(\alpha-\lambda)^{\frac{m}{\alpha}}} \cdots,$$

en faisant varier α depuis 1 jusqu'à ∞, θ ne pouvant devenir plus grand qu'une certaine quantité k, pourvu que je démontre que le produit infini en question est convergent.

Considérons sa racine $m^{\text{ième}}$,

$$\frac{1-\lambda'}{1-\lambda}\,\frac{(2-\lambda')^{\frac{1}{2}}}{(2-\lambda)^{\frac{1}{2}}}\cdots;$$

Son logarithme sera la série

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty}\left[\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{L}\left(1-\frac{\lambda'}{\alpha}\right)-\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{L}\left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)\right].$$

Multiplions le terme général par α^2; il vient

$$\mathrm{L}\left(1-\frac{\lambda'}{\alpha}\right)^{\alpha}-\mathrm{L}\left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\alpha},$$

dont la limite, pour $\alpha=\infty$, est

$$\mathrm{L}e^{\lambda'}-\mathrm{L}e^{\lambda}\quad \text{ou}\quad \lambda'-\lambda,$$

qui est fini. Donc la série est convergente, soit μ sa valeur. La valeur du produit qui multiplie θ^m est $e^{m\mu}$.

Donc, pour passer de la série dont nous avons démontré la convergence en étudiant le premier cas à la série que nous avons à examiner maintenant, il suffit de multiplier par un terme qui est toujours plus petit que $\mathrm{K}^m e^{m\mu}\left(\frac{x}{x'}\right)^m \frac{x^{m\lambda}}{x'^{m\lambda'}}$.

Or on peut toujours prendre le module de $\frac{x}{x'}$ assez petit pour que le module de $\mathrm{K}e^{\mu}\frac{x}{x'}<1$.

Soient $x=\rho e^{i\varphi}$, $x'=\rho' e^{i\varphi'}$;

$$\frac{x^{\lambda}}{x'^{\lambda'}}=\left(\frac{\rho^{\lambda}}{\rho'^{\lambda'}}\,\frac{e^{i\varphi\lambda}}{e^{i\varphi'\lambda'}}\right).$$

Soient $\lambda = \alpha + i\beta$, $\rho = e^z$; il vient

$$\frac{x^\lambda}{x'^{\lambda'}} = \frac{\rho^\alpha e^{-\varphi\beta}}{e^{l\lambda'}} e^{i(\varphi\alpha - \varphi'\lambda' + z\beta)},$$

dont le module est $\rho^\alpha e^{-\varphi\beta} \rho^{l-\lambda'}$.

Or on peut toujours, si α est positif, prendre ρ assez petit et φ assez grand pour que ce module soit plus petit que 1. Tous les termes de la première série sont donc multipliés par un facteur plus petit que 1; la série reste donc convergente.

Donc :

Toute fonction définie par une équation différentielle de la forme

$$x \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

où $\frac{df}{dy} = \lambda$ *et où* λ *a sa partie réelle positive et n'est pas entier positif, est développable dans les environs de* $x = 0$, *suivant les puissances croissantes de* x *et de* x^λ.

Limites de convergence. — Les deux conditions

$$K e^\mu \frac{x}{x'} < 1, \quad \rho^\alpha e^{-\varphi\beta} \rho^{l-\lambda'} < 1$$

montrent que la région de convergence est limitée à la fois par un cercle et par une spirale logarithmique; on voit en même temps que la série peut être convergente pour une des valeurs que x^λ peut prendre pour une même valeur de x, sans l'être en même temps pour d'autres valeurs de x^λ. Lorsqu'on franchit la spirale logarithmique en allant vers l'origine, le nombre des valeurs de x^λ pour lesquelles la convergence a lieu s'augmente d'une unité.

Du paramètre arbitraire. — Le paramètre arbitraire est ici la valeur de $\frac{dy}{dz}$ que nous avons pu prendre quelconque. Remarquons que tous les termes de la série sont des polynômes entiers par rapport à ce paramètre, d'où il résulte que la fonction y peut être ordonnée suivant les puissances croissantes de x, de x^λ et de ce paramètre.

Équations d'ordre supérieur. — Cette démonstration s'étendrait sans difficulté au cas des équations d'ordre supérieur. En effet, ces équations peuvent, dans les cas où z et y ne sont pas fonctions holomorphes de $x^{\frac{1}{n}}$, s'écrire sous l'une des formes

$$x\frac{dy}{dx} = \lambda y + \varphi(x, y, z),$$

$$x\frac{dz}{dx} = \mu z + \psi(x, y, z),$$

où φ et ψ ne contiennent ni terme constant ni termes du premier degré en x, y, z, ou

$$x^m\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$$x^m\frac{dz}{dx} = f_1(x, y).$$

Dans le premier cas, si λ et μ ne sont ni entiers positifs ni à partie réelle négative, y et z sont holomorphes en x, x^λ, x^μ. En effet, reprenons la démonstration précédente, il suffira de remplacer λ par μ dans un certain nombre de facteurs des produits en $m + n\lambda$.

La discussion précédente s'appliquera évidemment sans y rien changer.

Cas où $\lambda = 1$.

Nous avons laissé de côté, dans le résultat que nous venons d'obtenir, deux cas :

1° Celui où la partie réelle de λ est négative ; or, dans ce cas, MM. Briot et Bouquet ont démontré qu'il n'existait pas de fonction définie par l'équation et s'annulant pour $x = 0$;

2° Celui où λ est entier positif ; ce dernier se ramène facilement à celui où $\lambda = 1$ par une transformation très-simple, due aussi à MM. Briot et Bouquet. Nous nous réduirons donc au cas où $\lambda = 1$.

Soient

$$(1) \qquad x\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \frac{df}{dy} = 1.$$

Considérons l'équation auxiliaire

$$(2) \qquad x\frac{dy}{dx} = \alpha y + f(x, y), \quad \alpha + \frac{df}{dy} = \lambda.$$

Toutes les dérivées partielles du second membre de l'équation (2) sont les mêmes que pour l'équation (1), sauf la dérivée première par rapport à y. De plus, pour l'équation (2), nous avons vu que y était développable suivant les puissances croissantes de x et x^λ, que le coefficient de chaque terme était une somme de monômes, et que le tableau des modules des termes formés par chacun de ces monômes était convergent.

Soit

$$(3) \qquad \mathrm{A}x^m x^{n\lambda}$$

l'un de ces monômes; soit, pour simplifier, λ réel. La série des monômes

$$(4) \qquad \text{mod.}\,\mathrm{A}\,(\text{mod.}\,x)^m\,(\text{mod.}\,x)^{n\lambda}$$

est aussi convergente.

Posons

$$x^\lambda = t + x.$$

Nous pouvons développer l'expression (3) suivant la formule du binôme; on obtient une suite de termes de la forme

$$(5) \qquad \mathrm{AK}x^{m+p}t^{n-p}.$$

Remplaçons un instant, dans la série, x^λ par z, qui sera alors indépendant de x; la série est alors convergente quand x et z prennent des valeurs d'un module inférieur à certaines limites ρ et ρ_1. Supposons t et x positifs et tels que ces conditions soient remplies; la série (4) aura son tableau des modules convergent; il en sera de même de la série

$$\mathrm{K}\,\mathrm{mod.}\,\mathrm{A}x^{m+p}t^{n-p},$$

puisque les termes de cette seconde série sont positifs et que, groupés d'une certaine manière, ils reproduisent la série (4). Il en sera de même encore de la série (5), dont les termes ont même module que ceux de la série précédente, et il en sera de même encore quand on remplacera t et x par des quantités imaginaires de même module.

Les limites de convergence sont données par les inégalités

$$\mathrm{mod.}\,x < \rho, \quad \mathrm{mod.}\,x + \mathrm{mod.}\,(x^\lambda - x) < \rho_1.$$

Un terme quelconque a la forme

$$\mathrm{K}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{P}(m+n\lambda)}x^{m+p}t^{n-p},$$

où A est un polynôme entier par rapport au paramètre arbitraire $\frac{dy}{dz}$, que nous représenterons par α.

1° Les facteurs de la forme $\frac{1}{\beta-\lambda}$ ne peuvent entrer à une puissance supérieure à la puissance $\frac{m}{\beta}$ ou, *a fortiori*, à la puissance $\frac{(m+p)}{\beta}$.

Considérons la série obtenue directement

$$t = x^\lambda - x,$$

$$\frac{dt}{dx} = \lambda x^{\lambda-1} - \lambda,$$

$$x\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx} + (\lambda t - x)\frac{dy}{dt}.$$

Égalons au second membre de l'équation (2), il vient

$$x\frac{dy}{dx} + (\lambda t - x)\frac{dy}{dt} = \alpha y + f(x, y);$$

d'où, par différentiations successives et remarquant qu'à l'origine

$$x = y = t = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dt} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx},$$

$$\lambda \frac{dy}{dt} = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Il est facile de voir qu'en déduisant de ces équations les valeurs des dérivées partielles de y, on les obtient sous la forme de somme de monômes $\sum \frac{A_1}{P(m+n\lambda)}$; que l'un quelconque de ces monômes, multiplié par $x^{m+p}t^{n-p}$, par $\frac{1}{1.2\ldots m+p}$ et par $\frac{1}{1.2\ldots n-p}$, est la somme d'un certain nombre de termes de la série que nous venons de considérer.

Donc la série $\sum \frac{A_1}{1.2\ldots(m+p)\,1.2\ldots(n-p)} \frac{1}{P(m+n\lambda)} x^{m+p}t^{n-p}$ a son tableau des modules convergent.

De plus, il est facile de voir que les deux équations écrites en premier lieu donnent toujours

$$\frac{df}{dy} = \lambda \quad \text{avec} \quad \frac{dy}{dt} = \alpha \text{ (valeur arbitraire)},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha + \frac{df}{dx}}{1 - \lambda}.$$

Donc, comme le facteur $\frac{1}{1-\lambda}$ ne peut s'introduire dans l'un des monômes que s'il contient à une certaine puissance $\frac{dy}{dx}$, si l'un de ces monômes contient le facteur $\frac{1}{1-\lambda}$, le numérateur A_1 tiendra à la même puissance le facteur $\alpha + \frac{df}{dx}$.

Revenons maintenant à l'équation (1) et cherchons de même les coefficients de la série. Rien ne sera changé dans le calcul précédent, sinon que λ devra être remplacé par 1.

Comme $1 - \lambda = 0$, on aura

$$\alpha + \frac{df}{dx} = 0;$$

et $\frac{dy}{dx}$ deviendra le paramètre arbitraire, puisqu'il prend une valeur indéterminée β. Rien ne sera changé dans la série, sinon que chaque terme sera multiplié par

$$\frac{\beta^q (1-\lambda)^q}{\left(\alpha + \frac{df}{dx}\right)^q} \frac{P(m+n\lambda)}{P(m+n)} \frac{x'^r t'^s}{x^r t^s}. \tag{7}$$

Or nous savons que, si l'on suppose $\lambda < 1$, la seconde fraction est toujours plus petite que K^r, K étant une quantité finie.

Comme $q < r$, il en sera de même du premier facteur.

On peut donc toujours prendre les modules de x et de t assez petits pour que le module de l'expression (7) soit plus petit que 1.

Donc la nouvelle série est convergente.

Toute fonction définie par une équation différentielle de la forme

$$x\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

où $\frac{df}{dy} = 1$, *est développable suivant les puissances croissantes de* x *et d'une variable* t *définie par* $x\frac{dt}{dx} = t - x$ *ou de* $x\mathrm{L}x$ *dans le voisinage de* $x = 0$, $y = 0$.

Les limites de convergence sont données par

$$\text{mod.}\, x < \rho, \quad \text{mod.}\,(x\mathrm{L}x) < \rho_1.$$

Le paramètre arbitraire est $\frac{dy}{dx}$, et la fonction y peut encore se développer suivant les puissances croissantes de x, de t et de ce paramètre.