ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les formes quadratiques.* Note de **M. H. Poincaré.** (Extrait par l'auteur.)

« Cette Note est destinée à faire suite à un travail analogue présenté à l'Académie le 11 août 1879. Ce travail avait pour objet certaines propriétés des formes quadratiques définies et indéfinies ; je n'ai fait ici que développer les résultats obtenus, en me restreignant aux formes définies.

» Après avoir donné une expression nouvelle des fonctions doublement périodiques sous forme d'intégrale définie, j'envisage une forme quadratique définie

$$F = am^2 + 2bmn + cn^2,$$

à laquelle je fais correspondre un réseau parallélogrammatique R, dont les différents points ont pour coordonnées

$$x = m\sqrt{a} + n\frac{b}{\sqrt{a}},$$

$$y = n\sqrt{\frac{ac - b^2}{a}}.$$

» Dans ces expressions de x et de y, m et n peuvent prendre toutes les valeurs entières, positives et négatives.

» De cette façon, à une forme F′ équivalente à F, correspondra un réseau R′ égal à R, et, pour changer R en R′, il suffit de le faire tourner autour de l'origine, d'un certain angle θ que j'appelle *angle de transformation*. Je donne le moyen de calculer les paramètres de la transformation quand on connaît l'angle θ et les coefficients des deux formes F et F′.

» On sait que, si F dérive de F′ par la transformation

$$\begin{matrix} \alpha, & \gamma, \\ \beta, & \delta, \end{matrix}$$

où α, β, γ, δ sont des quantités quelconques satisfaisant à la condition unique $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, la quantité $b^2 - ac$ n'est pas altérée par la transformation, et que c'est là le seul invariant des formes quadratiques.

» Mais si, de plus, les paramètres α, β, γ, δ sont assujettis à rester entiers, il existe une infinité de fonctions des trois coefficients a, b et c qui ne sont pas altérées par la transformation. Tels sont, par exemple, les coefficients de la forme réduite équivalente à la forme donnée. Ces fonctions sont, pour ainsi dire, des invariants arithmétiques, pendant que $b^2 - ac$ est un invariant algébrique. Parmi ces invariants, j'examine en particulier les séries

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{(am^2+2bmn+cn^2)^k},$$

où l'on doit exclure les valeurs $m=0$, $n=0$, qui peuvent s'exprimer à l'aide d'intégrales doubles définies. Mais la connaissance d'un invariant ne donne qu'une chose : une condition nécessaire, mais non suffisante, de l'équivalence de deux formes. La connaissance des covariants arithmétiques permet, au contraire, de reconnaître à coup sûr si deux formes sont équivalentes et, si elles le sont, de trouver la transformation qui permet de passer de l'une à l'autre. J'appelle *covariant* toute fonction des coefficients d'une forme qui est égale à la fonction analogue des coefficients de toute forme équivalente multipliée par une fonction connue de l'angle de transformation θ.

» Si donc on connaît deux formes F et F′ que l'on *sait* être équivalentes, on calculera le covariant de chacune d'elles, et, du rapport de ces covariants, on déduira facilement l'angle θ et, par conséquent, les paramètres α, β, γ, δ de la transformation. Si l'on *ne sait pas* à l'avance que les deux formes sont équivalentes, on *supposera* qu'elles le sont ; on calculera α, β, γ, δ, et, une fois que l'on connaîtra les valeurs que devraient avoir ces paramètres, à supposer que F et F′ soient équivalentes, il sera aisé de reconnaître si l'hypothèse faite au début était exacte.

» J'ai envisagé une série de covariants arithmétiques

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{\left[m\sqrt{a}+n\left(\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{\sqrt{a}}\right)\right]^{2k}},$$

et j'ai donné deux moyens de les calculer, soit à l'aide d'une intégrale définie, soit à l'aide de la série

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} u_m e^{imq},$$

ou u_m représente des puissances $(2k-1)^{\text{ièmes}}$ des diviseurs du nombre m.

» Comme application, j'ai donné la décomposition d'un nombre premier de la forme $4n+1$, en deux carrés, au moyen d'une intégrale définie. »

GÉOMÉTRIE. — *Détermination de courbes et de surfaces satisfaisant a des conditions de contact double.* Note de M. **H.-G. Zeuthen**, présentée par M. Chasles.

« On doit à M. Chasles une expression du nombre des courbes d'un système à caractéristiques données qui sont tangentes à une courbe dont on connaît l'ordre et la classe. Je désignerai par n l'ordre de la courbe donnée, par d et e les nombres de ses points doubles et stationnaires, par μ la première caractéristique du système, et, pour mettre la dualité aux yeux, par n', d', e', μ' les nombres qui correspondent selon le principe de dualité aux précédents : μ' est, par exemple, la seconde caractéristique du système. Alors, selon le théorème de M. Chasles, le nombre dont nous venons de parler est égal à

$$n'\mu + n\mu'.$$

» On trouve dans un Livre de M. Schubert, qui vient de paraître, *Kalkül der abzählenden Geometrie,* une démonstration de ce théorème, que j'ai trouvée applicable aussi à la déduction de résultats ultérieurs.

» M. Schubert fait usage de la circonstance que le nombre cherché sera le même pour une série de courbes homologiques entre elles, substituées à la courbe fixe, quand même le système donné reste inaltéré. Il suffit donc de résoudre le problème pour une seule courbe de cette série. Il est le plus commode de choisir celle qui s'est réduite à une droite n triple, coïncidente avec l'axe d'homologie, pendant que ses tangentes sont devenues les droites passant par n' points fixes (sommets) de la droite. Les solutions cherchées seront, dans ce cas particulier, les $n'\mu$ courbes du système qui passent par les n' sommets, et les μ' courbes tangentes à la droite n triple comptées n fois.

» Nous ferons usage de la même dégénération de la courbe fixe pour déterminer le nombre des courbes d'un système doublement infini qui ont avec elle deux contacts simples ou un contact du second ordre. Nous désignerons par (μ^2), $(\mu\mu')$ et (μ'^2) les nombres des courbes du système qui passent par deux points donnés, qui passent par un point donné et sont tangentes à une droite donnée ou qui sont tangentes à deux droites données,