

infinité d'hyperboloïdes de révolution équilatérales à des axes parallèles passant par la section conique des deux donnés, et parmi eux deux cônes de révolution équilatéraux, qui séparent les hyperboloïdes à une et à deux nappes. Chaque plan parallèle au plan de projection en détermine un, dont il est le plan principal; le centre, c'est le point d'intersection du plan avec la droite joignant les sommets des deux cônes indiqués, le cercle de gorges, respectivement le cercle des sommets, c'est le cercle de puissance du centre par rapport aux traces des cônes dans le plan. Les cercles de base des cônes dans le plan de projection sont tangents aux cercles représentant la section conique; tandis que les traces des hyperboloïdes les coupent sous un angle déterminé σ ; le cercle de gorge, respectivement des sommets de l'hyperboloïde; dont le cercle appartient au plan de projection, est celui qui coupe à angle droit respectivement en diamètres — de sorte que les cercles de trace forment un faisceau à points-limites réels ou imaginaires, etc. (Voir l'article 22 de la note n° V, p. 248 *a. a. O.*)

Si les trois cercles donnés ne se coupent pas, les deux cercles qui font avec eux des angles demandés *p. e.* qui résultent de H_1, H_2, H_3 sont tangents à trois couples de cercles et orthogonaux à trois cercles. Les cercles trouvés sont les cercles directeurs de Poncelet d'une section conique, sur la circonférence de laquelle sont placés les centres des cercles tangents. Cette conique appartient et au système plan de ceux-ci et à l'hyperboloïde représentée par le réseau, dans lequel le cercle de puissance du point de similitude intérieur des deux cercles directeurs est le cercle de gorge, ou cercle orthogonal, etc.

M. H. POINCARÉ

Ingénieur des mines, chargé de cours à la Faculté des sciences de Caen.

SUR LES APPLICATIONS DE LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE A LA THÉORIE DES FORMES QUADRATIQUES

— Séance du 16 avril 1881. —

Depuis longtemps, M. Hermite a démontré qu'une forme quadratique ternaire indéfinie à coefficients entiers n'est pas altérée par une infinité de substitutions linéaires dont les coefficients sont également entiers. Mais toutes les propriétés de ces substitutions ne sont pas encore

connues ; je crois donc qu'il n'est pas inutile d'en signaler quelques-unes qui me semblent curieuses. Je prendrai pour point de départ les importants mémoires de MM. Hermite et Selling sur cette question (*Journal de Crellé*, t. XLVII et LXXVIII). Je commencerai par rappeler les résultats obtenus par ces deux savants géomètres ; mais je les exposerai sous une forme un peu différente et plus commode pour mon objet.

Soit F une forme quadratique ternaire indéfinie ; on pourra l'écrire :

$$F = (ax + by + cz)^2 + (a'x + b'y + c'z)^2 - (a''x + b''y + c''z)^2.$$

Nous poserons :

$$\xi = ax + by + cz \quad \eta = a'x + b'y + c'z \quad \zeta = a''x + b''y + c''z.$$

$$F = \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2.$$

$$X = \frac{\xi}{\zeta + 1} \quad Y = \frac{\eta}{\zeta + 1} \quad t = X + iY.$$

Supposons que la forme F soit reproduite par une substitution linéaire à coefficients entiers, c'est-à-dire qu'en posant :

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= A_1x' + B_1y' + C_1z' \\ y &= A_2x' + B_2y' + C_2z' \\ z &= A_3x' + B_3y' + C_3z', \end{aligned}$$

on obtienne :

$$F = (ax' + by' + cz')^2 + (a'x' + b'y' + c'z')^2 - (a''x' + b''y' + c''z')^2,$$

je poserai :

$$\xi' = ax' + by' + cz' \quad \eta' = a'x' + b'y' + c'z' \quad \zeta' = a''x' + b''y' + c''z'$$

$$F = \xi'^2 + \eta'^2 - \zeta'^2.$$

$$X' = \frac{\xi'}{\zeta' + 1} \quad Y' = \frac{\eta'}{\zeta' + 1} \quad t' = X' + iY'.$$

Je suppose que l'on ait :

$$\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = -1;$$

d'où :

$$\xi'^2 + \eta'^2 - \zeta'^2 = -1;$$

ξ' , η' , ζ' seront déterminés en fonctions de ξ , η , ζ , par des équations de la forme :

$$(2) \quad \begin{aligned} \xi' &= \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta \\ \eta' &= \alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta \\ \zeta' &= \alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta, \end{aligned}$$

où α , β , γ , etc., sont des constantes réelles, telles que :

$$(2 \text{ bis}) \quad \begin{aligned} \alpha^2 + \alpha'^2 - \alpha''^2 &= 1 & \beta^2 + \beta'^2 - \beta''^2 &= 1 & \gamma^2 + \gamma'^2 - \gamma''^2 &= -1 \\ \alpha\beta + \alpha'\beta' - \alpha''\beta'' &= 0 & \alpha\gamma + \alpha'\gamma' - \alpha''\gamma'' &= 0 & \beta\gamma + \beta'\gamma' - \beta''\gamma'' &= 0. \end{aligned}$$

De plus, on aura entre t' et t une relation de la forme :

$$t' = \frac{h t + k}{h' t + k'}$$

où h , k , h' , k' sont des constantes imaginaires.

On connaîtra les coefficients des relations (1) quand on connaîtra ceux des relations (2); nous ne nous occuperons donc que de ces dernières.

Voici comment il faut opérer pour trouver toutes les réduites de F. Soient

$$\xi_1, \eta_1, \zeta_1,$$

trois quantités telles que :

$$(3) \quad \xi_1^2 + \eta_1^2 - \zeta_1^2 = -1.$$

Soient

$$(4) \quad X_1 = \frac{\xi_1}{\zeta_1 + 1} \quad Y_1 = \frac{\eta_1}{\zeta_1 + 1};$$

on formera la forme :

$$\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 + 2(\xi\xi + \eta_1\eta - \zeta_1\zeta)^2$$

qui est définie; on cherchera la substitution qui la réduit et on l'appliquera à la forme F. (Mémoire de M. Hermite, *Journal de Crelle*, t. XLVII.)

Considérons dans un plan le point m_1 , dont les coordonnées sont X_1 et Y_1 ; il sera intérieur au cercle C, dont le centre est l'origine et le rayon 1. Si l'on se donne X_1 et Y_1 , les relations (3) et (4) déterminent ξ_1 , η_1 , ζ_1 (que

nous appellerons coordonnées hyperboliques du point m_1) et, par conséquent, la réduite correspondante. A chaque point m_1 , intérieur au cercle C, correspond donc une réduite de F, et une seule; quand le point m_1 varie, la réduite reste la même, si m_1 ne sort pas d'une certaine région R_0 ; mais elle varie, si le point m_1 dépasse les frontières de cette région. La surface du cercle C va donc se trouver partagée en une infinité de régions telles que la réduite ne change pas tant que le point m_1 reste intérieur à l'une d'elles. Mais le nombre des réduites possibles est fini; il faut donc qu'il y ait une infinité de régions

$$R_0, R'_0, R''_0, \text{ etc...}$$

qui correspondent à une même réduite. Soit n le nombre des réduites distinctes. Soient

$$R_0, R_1, R_2 \dots R_{n-1}$$

un système de n régions contiguës les unes aux autres et correspondant respectivement à ces n réduites distinctes, ce qu'il est toujours possible de trouver. Soit P l'ensemble de ces régions. Il existera un système de régions

$$R'_0, R'_1, R'_2 \dots R'_{n-1}$$

disposées les unes par rapport aux autres comme l'étaient entre elles

$$R_0, R_1, R_2 \dots R_{n-1}$$

et correspondant, respectivement, aux mêmes réduites que ces dernières. Soit P' l'ensemble de ces régions; on définira de même P'', P'''...

Considérons l'une quelconque de ces régions; P'', par exemple. Il y aura une des substitutions (2) telle que, lorsque le point m_1 (dont les coordonnées hyperboliques sont ξ_1, η_1, ζ_1) décrit la région P, le point dont les coordonnées hyperboliques sont :

$$x\xi_1 + \beta\eta_1 + \gamma\zeta_1$$

$$x'\xi_1 + \beta'\eta_1 + \gamma'\zeta_1$$

$$x''\xi_1 + \beta''\eta_1 + \gamma''\zeta_1$$

décrive la région P''. De plus, l'on obtiendra de la sorte toutes les substitutions (2), de sorte que, pour étudier ces substitutions, il suffit d'étudier la figure formée par les régions P, P', P'', etc.

Ici, je vais faire appel à la géométrie non euclidienne ou pseudogéométrie. J'écrirai, pour abrégé, ps et pst , au lieu de pseudogéométrie et pseudogéométriquement.

J'appellerai droite ps toute circonférence qui coupe orthogonalement le cercle C ; distance ps de deux points le demi-logarithme du rapport anharmonique de ces deux points et des points d'intersection du cercle C et de la droite ps qui les joint (compté sur cette droite ps). L'angle ps de deux courbes qui se coupent sera leur angle géométrique. Un polygone ps sera une portion du plan limitée par des droites ps .

Deux figures seront pst égales s'il existe un système de 9 constantes :

$$\begin{aligned} & \alpha \beta \gamma \\ & \alpha' \beta' \gamma' \\ & \alpha'' \beta'' \gamma'', \end{aligned}$$

telles que

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \alpha'^2 - \alpha''^2 = 1 & \quad \beta^2 + \beta'^2 - \beta''^2 = 1 & \quad \gamma^2 + \gamma'^2 - \gamma''^2 = -1 \\ \alpha\beta + \alpha'\beta' - \alpha''\beta'' = 0 & \quad \alpha\gamma + \alpha'\gamma' - \alpha''\gamma'' = 0 & \quad \beta\gamma + \beta'\gamma' - \beta''\gamma'' = 0 \end{aligned}$$

et que, si le point (ξ_1, η_1, ζ_1) décrit la première figure, le point

$$+ (\alpha\xi_1 + \beta\eta_1 + \gamma\zeta_1, \alpha'\xi_1 + \beta'\eta_1 + \gamma'\zeta_1, \alpha''\xi_1 + \beta''\eta_1 + \gamma''\zeta_1)$$

décrit la seconde de ces figures.

Cela posé, on reconnaît que ces distances ps , angles ps , droites ps , etc., satisfont aux théorèmes de la géométrie non euclidienne, c'est-à-dire à tous les théorèmes de la géométrie ordinaire, sauf ceux qui sont une conséquence du *postulatum* d'Euclide.

Il résulte de ce qui précède que les régions $P, P', P'' \dots$ sont pst égales entre elles. On appellera mouvement ps toute opération qui change le point dont les coordonnées hyperboliques sont ξ, η, ζ en un point dont les coordonnées hyperboliques sont des fonctions linéaires de ξ, η, ζ . Ce mouvement ps sera une rotation s'il conserve un point fixe; une translation dans le cas contraire. Un mouvement ps sera complètement déterminé quand on saura qu'il change le point a en a_1 et le point b en b_1 ; nous l'appellerons le mouvement (a, a_1, b, b_1) . Il faut, bien entendu, que la distance $ps: a_1b_1$ soit égale à la distance $ps: ab$. Deux figures seront pst égales si l'on peut passer de l'une à l'autre par un mouvement ps .

Supposons que la forme donnée F ne satisfasse pas aux conditions du paragraphe 299 des *Disquisitiones arithmeticae*, c'est-à-dire qu'on ne puisse pas l'annuler en y substituant des nombres entiers à la place de x, y, z .

La région P ne s'étendra pas jusqu'à la circonférence du cercle C . En suivant son périmètre dans le sens positif, on côtoiera successivement les régions P_1, P_2, \dots, P_n . Soit b_i la frontière commune de P et de P_i ; soient a_i et a_{i+1} les extrémités de cette frontière; les b_i seront les côtés, les a_i les sommets de la région P , et, en suivant le périmètre, on rencontrera successivement le sommet a_1 , le côté b_1 , le sommet a_2 , le côté b_2 , le sommet a_3, \dots , le sommet a_n , le côté b_n , enfin le sommet a_{n+1} , qui n'est autre que le sommet a_1 .

C'est pourquoi nous disons que le côté qui suit le sommet a_i est b_i , et que le sommet qui suit b_i est a_{i+1} .

Joignons par des droites ps les différents sommets de P , nous obtiendrons un polygone ps Q . Faisons de même pour P', P'', \dots ; la surface du cercle C va se trouver divisée en une infinité de polygones ps Q, Q', Q'', \dots . Ces polygones ps seront ps égaux entre eux, et le mouvement ps , qui change P en P' , par exemple, changera Q en Q' . Envisageons le polygone Q , l'un de ses côtés $a_1 a_2$, par exemple, et le polygone Q_1 , qui lui est adjacent le long de $a_1 a_2$ et qui correspond à la région P_1 . Considérons le mouvement ps qui change Q en Q_1 ; le mouvement ps inverse changera Q en une certaine région Q_i , adjacente à Q_1 le long d'un côté $a_i a_{i+1}$. De deux choses l'une: ou bien Q_i différera de Q_1 .

Alors les côtés $a_1 a_2, a_i a_{i+1}$ seront homologues, formeront une paire, et le mouvement ps , qui change Q en Q_1 , changera a_1 en a_2 et a_{i+1} en a_i .

Ou bien Q_i ne différera pas de Q_1 ; et alors le mouvement ps , qui change Q en Q_1 , sera une rotation ps de 180° autour du milieu ps de $a_1 a_2$. Soit β ce milieu; on l'envisagera comme un sommet du polygone Q , de telle façon que ce polygone présente deux côtés consécutifs $a_1 \beta, \beta a_2$, faisant entre eux un angle de 180° . Ces deux côtés seront homologues, formeront une paire, et le mouvement ps , qui change Q en Q_1 , changera a_1 en a_2 et β en β .

Donc, grâce à la convention qui précède :

1° Les côtés du polygone Q se répartissent en paires; deux côtés d'une même paire sont dits homologues;

2° Tout mouvement ps qui change Q en l'un des polygones qui lui sont adjacents change un des côtés en son homologue.

Quand on connaîtra le polygone Q et la distribution de ses côtés en paires, on connaîtra tous les mouvements ps qui changent Q en Q', Q'', \dots , et; par conséquent, P en P', P'', \dots . On connaîtra donc toutes les substitutions (2) et, par conséquent, toutes les substitutions (1).

Supposons, pour fixer les idées, un quadrilatère $a_1 a_2 a_3 a_4$; supposons que $a_1 a_2$ soit homologue de $a_2 a_3$, et $a_1 a_4$ de $a_3 a_4$; les mouvements ps , qui changent Q en Q', Q'', \dots , seront tous des résultantes des deux mouvements $(a_1 a_3, a_2 a_2)$ et $(a_1 a_3, a_4 a_4)$.

Toute propriété des substitutions (1) se ramène donc à une propriété du polygone Q. J'en énoncerai deux :

1° *Deux côtés homologues sont pst égaux.*

Envisageons maintenant un sommet quelconque, le côté suivant, puis le côté homologue, puis le sommet suivant, puis le côté suivant, puis le côté homologue, et ainsi de suite. On rencontrera de la sorte un certain nombre de sommets et on finira par retomber sur le sommet qui a servi de point de départ. On dira que tous les sommets rencontrés de la sorte forment un *cycle*, et tous les sommets de Q se trouveront ainsi distribués en un certain nombre de cycles. Cela posé :

2° *La somme des angles correspondants aux différents sommets d'un même cycle est une partie aliquote de 2π .*

Supposons maintenant que la forme F puisse s'annuler quand on y remplace x, y, z par des entiers convenablement choisis. Les résultats seront les mêmes, sauf quelques différences. La région P s'étendra jusqu'à la circonférence du cercle C. On pourra, comme dans le cas précédent, décomposer la surface du cercle C en une infinité de polygones *ps* Q, Q', Q'', etc., de telle sorte que les mouvements *ps* qui changent P en P', P en P'', etc., changent de même Q en Q', Q en Q'', etc.

Seulement il pourra se faire que deux côtés consécutifs du polygone Q ne se coupent pas, ou, si l'on veut, que l'un des sommets de ce polygone soit imaginaire.

Les côtés du polygone Q se distribueront en paires, et les côtés d'une même paire seront *pst* égaux.

Les sommets de Q se distribueront en cycles comme dans le cas précédent ; mais il y aura deux sortes de cycles, les premiers ne contenant que des sommets imaginaires, les seconds que des sommets réels.

La somme des angles correspondants aux sommets d'un même cycle de la seconde sorte sera une partie aliquote de 2π .

M. H. BROCARD

Capitaine du génie, à Alger.

ÉTUDE D'UN NOUVEAU CERCLE DU PLAN DU TRIANGLE

— Séance du 16 avril 1881. —

1. La *Nouvelle Correspondance mathématique* a renfermé un long Mémoire dans lequel j'ai indiqué plusieurs propriétés du triangle, et entre