MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions fuchsiennes.*
Note de M. POINCARÉ.

(Commissaires : MM. Bertrand, Hermite, Puiseux.)

« Le but que je me propose, dans le travail que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, est de rechercher s'il n'existe pas des fonctions analytiques analogues aux fonctions elliptiques et permettant d'intégrer diverses équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. Je suis arrivé à démontrer qu'il existe une classe très étendue de fonctions qui satisfont à ces conditions et auxquelles j'ai donné le nom de *fonctions fuchsiennes*, en l'honneur de M. Fuchs, dont les travaux m'ont servi très utilement dans ces recherches.

» Voici les notations dont je ferai usage. Soit z une variable imaginaire représentée par un point dans un plan. Si j'appelle K_1 l'opération qui consiste à changer z en $f_1(z)$, K_2 celle qui consiste à changer z en $f_2(z)$, j'écrirai habituellement

$$zK_1 = f_1(z), \quad zK^2 = f_2(z), \quad zK_1K_2 = f_2[f_1(z)].$$

» Quand z restera intérieur à une certaine région R, zK_1 restera intérieur à une certaine région S; j'écrirai

$$S = RK_1.$$

» J'appelle *cercle fondamental* le cercle qui a pour centre l'origine et pour rayon l'unité; *groupe hyperbolique* le groupe des opérations qui consistent à changer z en $\frac{az+b}{cz+d}$ (a, b, c, d étant des constantes), et qui n'altèrent pas le cercle fondamental; *groupe discontinu*, tout groupe qui ne contient pas d'opération infinitésimale, c'est-à-dire d'opération changeant z en une quantité infiniment voisine de z; *groupe fuchsien*, tout groupe discontinu contenu dans le groupe hyperbolique.

» J'appelle *fonction fuchsienne* toute fonction uniforme de z qui n'est pas altérée par les opérations d'un groupe fuchsien.

» Il fallait d'abord former tous les groupes fuchsiens; j'y suis arrivé à l'aide de la Géométrie non euclidienne, dont je ne parlerai pas ici. J'ai fait voir que la surface du cercle fondamental peut se décomposer (et cela d'une infinité de manières) en une infinité de régions R_0, R_1, ..., R_i, ..., satisfaisant aux conditions suivantes :

» I. Ces régions sont des polygones curvilignes dont les côtés sont des arcs de cercle appartenant à des circonférences qui coupent orthogonalement le cercle fondamental.

» II. On a, quel que soit l'indice i,

$$R_i = R_0 K_i,$$

K_i étant une opération du groupe hyperbolique.

» Il est clair que les différentes opérations K_i forment un groupe discontinu contenu dans le groupe hyperbolique, c'est-à-dire un groupe fuchsien.

» Problème I. — *Est-il possible d'effectuer cette décomposition de telle façon que la première de ces régions* R_0 *soit un polygone curviligne donné?*

» Prenons un exemple particulier; envisageons deux triangles curvilignes ABC, BCD dont les côtés soient des arcs appartenant à des circonférences qui coupent orthogonalement le cercle fondamental. Supposons que les angles curvilignes de ces triangles soient égaux respectivement :

$$\text{BAC et BDC à } \frac{\pi}{\alpha},$$

$$\text{CBA et CBD à } \frac{\pi}{\beta},$$

$$\text{BCA et BCD à } \frac{\pi}{\gamma},$$

α, β, γ étant des nombres entiers positifs (finis ou infinis), et tels que

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} < 1.$$

» On pourra décomposer la surface du cercle fondamental en une infinité de régions R_0, R_1, ..., R_i, ... satisfaisant aux conditions I et II et de telle sorte que R_0 soit précisément le quadrilatère ABCD. A ce mode de décomposition correspond un groupe fuchsien que j'appelle le groupe (α, β, γ).

» Je résous ensuite le problème I dans le cas général et je montre comment on peut former tous les groupes fuchsiens et en donner une classification rationnelle à deux points de vue différents.

» Parmi les groupes fuchsiens, il en est qui méritent d'attirer particulièrement notre attention :

» 1° Le groupe $(2, 3, \infty)$, qui est isomorphe au groupe des opérations qui changent z en $\frac{az+b}{cz+d}$, a, b, c, d étant des entiers tels que $ad - bc = 1$.

» 2° Certains groupes qui sont isomorphes aux groupes des substitutions linéaires à coefficients entiers, qui reproduisent une forme quadratique ternaire indéfinie à coefficients entiers.

» L'existence de ces groupes fait ressortir les liens intimes qui unissent la théorie des nombres à la question analytique qui nous occupe.

» J'appelle *fonction thétafuchsienne* toute fonction $\Theta(z)$ uniforme en z, et telle que (K_i étant une opération quelconque d'un groupe fuchsien) on ait identiquement

$$\Theta(zK_i) = \Theta(z)\left(\frac{dzK_i}{dz}\right)^{-m},$$

m étant un nombre entier positif.

» En d'autres termes, pour une infinité de valeurs de a, b, c, d, telles que

$$ad - bc = 1,$$

on aura identiquement

$$\Theta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \Theta(z)(cz+d)^{2m}.$$

» Je démontre qu'il existe une infinité de fonctions thétafuchsiennes définies par la série convergente

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} H(zK_i)\left(\frac{dzK_i}{dz}\right)^m.$$

m est un nombre entier plus grand que 1; K_i est une opération quelconque d'un groupe fuchsien quelconque G; $H(z)$ est une fonction rationnelle de z.

» Il peut se présenter deux cas : 1° Tous les points du cercle fondamental sont des points singuliers essentiels de $\Theta(z)$; il y a alors en réalité deux fonctions distinctes : la première n'existe qu'à l'intérieur du cercle fondamental, la seconde à l'extérieur seulement, car on ne peut passer de l'une à l'autre par continuité. 2° $\Theta(z)$ a une infinité de points singuliers essentiels sur le cercle fondamental, mais ces points singuliers sont isolés, de sorte que la fonction existe dans tout le plan.

» Cette fonction est toujours méromorphe, sauf sur le cercle fondamental; j'indique le moyen de calculer le nombre de ses zéros distincts et de ses infinis distincts. »