» Rappelons d'ailleurs que, pour voir se dégager la loi géométrique qui préside à ces accidents, il est indispensable de faire de nombreuses mesures.

» Dans tous les cas, les diaclases se rattachent, comme un effet à sa cause, aux ploiements que les couches ont subis, et dont différents géologues, notamment M. Hébert et M. de Mercey [1], ont fait connaître l'existence.

» Il en est de même, comme on l'a vu, dans les expériences synthétiques, où se retrouve le double caractère, signalé plus haut, de régularité générale et d'irrégularités accidentelles. »

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions fuchsiennes.* Note de M. **H. Poincaré.**

(Commissaires : MM. Bertrand, Hermite, Puiseux.)

« Le quotient de deux fonctions thétafuchsiennes correspondant à un même groupe fuchsien et à une même valeur du nombre entier m est une fonction $F(z)$ uniforme en z, et telle que

$$F(z, K_i) = F(z).$$

» C'est donc une fonction fuchsienne, d'après la définition donnée dans la Note précédente. En d'autres termes, on a identiquement, pour une infinité de valeurs des constantes a, b, c, d,

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = F(z).$$

» Je démontre deux théorèmes :

» 1° *Entre deux fonctions fuchsiennes ayant même groupe et n'ayant d'autre point singulier essentiel que ceux qui sont une conséquence de leur définition, il y a une relation algébrique.*

» 2° *Toute fonction fuchsienne* $F(z)$ *permet d'intégrer une équation linéaire à coefficients algébriques de la manière suivante. Si l'on pose*

$$x = F(z), \quad y_1 = \sqrt{\frac{dF}{dz}}, \quad y_2 = z\sqrt{\frac{dF}{dz}},$$

(1) De Mercey, *Bulletin de la Société géologique de France*, 3e série, t. IV, p. 561 (1876); *Bulletin de la Société linnéenne du Nord*, t. I, p. 408.

y_1 et y_2 satisfont à l'équation différentielle.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\,\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant algébrique en x.

» Soit, en particulier, l'équation

$$(1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = y\left[\frac{\frac{1}{\alpha^2}-1}{4x^2} + \frac{\frac{1}{\beta^2}-1}{4(x-1)^2} + \frac{1+\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}}{4x(x-1)}\right],$$

où α, β, γ sont des nombres entiers positifs finis ou infinis, et tels que

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} < 1.$$

» Si z est le rapport des intégrales, on a

$$x = f(z),$$

$f(z)$ étant une fonction fuchsienne relative au groupe (α, β, γ).

» Elle n'existe qu'à l'intérieur du cercle fondamental, et peut être regardée comme le quotient des deux fonctions thétafuchsiennes

$$\frac{\left(\frac{df}{dz}\right)^m}{[f(z)]^p[f(z)-1]^q},\quad \frac{\left(\frac{df}{dz}\right)^m f(z)}{[f(z)]^p[f(z)-1]^q}.$$

m, p et q sont des nombres entiers qui satisfont aux inégalités toujours compatibles

$$1-\frac{p}{m} \geqq \frac{1}{\alpha},\quad 1-\frac{q}{m} \geqq \frac{1}{\beta},\quad \frac{p+q-1}{m}-1 \geqq \frac{1}{\gamma}.$$

» Ces deux fonctions, qui n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental, sont holomorphes à l'intérieur de ce cercle.

» Si $\alpha = \beta = \gamma = \infty$, l'équation (1) se ramène à l'équation qui détermine les périodes de $\sin \operatorname{am} x$ en fonctions du carré du module.

» Je ramène ensuite aux fonctions thétafuchsiennes ces invariants arithmétiques que j'ai définis dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie en septembre 1879.

» Soit $F(z)$ une fonction fuchsienne quelconque; posons $x = F(z)$.

» J'appelle *système de fonctions zétafuchsiennes* tout système de fonctions

$\theta_1(z), \theta_2(z), \ldots, \theta_n(z)$ uniformes en z, et telles que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{d^{\alpha_1}\theta_1}{dx^{\alpha_1}} & \frac{d^{\alpha_2}\theta_1}{dx^{\alpha_2}} & \cdots & \frac{d^{\alpha_n}\theta_1}{dx^{\alpha_n}} \\ \frac{d^{\alpha_1}\theta_2}{dx^{\alpha_1}} & \frac{d^{\alpha_2}\theta_2}{dx^{\alpha_2}} & \cdots & \frac{d^{\alpha_n}\theta_2}{dx^{\alpha_n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{\alpha_1}\theta_n}{dx^{\alpha_1}} & \frac{d^{\alpha_2}\theta_n}{dx^{\alpha_2}} & \cdots & \frac{d^{\alpha_n}\theta_n}{dx^{\alpha_n}} \end{vmatrix}$$

soit une fonction fuchsienne de z, quels que soient les entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

» Il est clair que $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ satisferont à une équation différentielle linéaire dont les coefficients seront algébriques en x.

» Je démontre que l'on peut former une infinité de fonctions zétafuchsiennes dont je donne diverses expressions par des séries, et qui permettent d'intégrer une infinité d'équations différentielles, entre autres *toutes les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels qui ne présentent que deux points singuliers à distance finie et un à l'infini.*

» Donnons une application particulière.

» Soient K et K' les périodes d'une fonction elliptique, ω le carré de son module.

» Soit φ un algorithme tel que

$$\omega = \varphi\left(\frac{K + \sqrt{-1}\,K'}{K - \sqrt{-1}\,K'}\right).$$

» Soit une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels ayant pour points singuliers

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = \infty.$$

» Posons $x = \varphi(z)$, et soient $\theta_1(z), \theta_2(z), \ldots, \theta_n(z)$ les intégrales de l'équation proposée :

» 1° $\varphi(z)$ sera une fonction fuchsienne, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ des fonctions zétafuchsiennes.

» Ces fonctions n'existeront qu'à l'intérieur du cercle fondamental.

» Elles seront holomorphes à l'intérieur de ce cercle, et par conséquent pourront toujours être représentées par des séries entières dont les coefficients sont aisés à calculer.

» En résumé, il existe une classe très étendue de fonctions dont les fonctions elliptiques ne sont qu'un cas particulier. Elles permettent d'intégrer un grand nombre d'équations différentielles. Différentes propriétés font ressortir leur analogie avec les transcendantes elliptiques et celle des fonctions thétafuchsiennes et zétafuchsiennes avec les fonctions Θ et Z. »

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance, une Notice sur « Guillaume-Philippe Schimper, sa vie et ses travaux », par M. *Ch. Grad.*

M. **Dumas** dépose sur le bureau, de la part de M. *Charpentier*, ingénieur civil, une Lettre adressée par Ampère à la Commission administrative de l'Académie, qu'il s'empresse de mettre à la disposition de la Compagnie. La Lettre dont il s'agit nous apprend que notre illustre confrère avait dépensé, pour établir les appareils au moyen desquels il a fondé l'électricité dynamique, une première somme de 1500^{fr}, et qu'il se trouvait en présence d'une seconde somme à payer, s'élevant à 2000^{fr}. Ampère avait obtenu déjà le concours de l'Académie à la première occasion; il le réclame pour la seconde. Ce concours ne lui fit pas défaut.

On voit ce qu'un homme de génie peut faire, au profit de la civilisation, avec une somme de 3500^{fr}, et ce que devient, en telle occasion, une avance dont le produit se chiffre aujourd'hui par centaines de millions.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une classe d'intégrales abéliennes et sur certaines équations différentielles.* Note de M. E. **Picard**, présentée par M. Hermite.

« Étant donnée une relation algébrique de genre p,

$$f(x, y) = 0,$$

considérons une intégrale abélienne de première espèce correspondante

$$\int \frac{F(x, y)\, dx}{f'_y(x, y)}, \tag{1}$$

et supposons que ses périodes se réduisent à deux. J'adjoins à cette intégrale $p - 1$ autres intégrales distinctes de première espèce, et soient F_1, F_2, ..., F_{p-1} les coefficients du numérateur sous le signe d'intégration;