forme

$$\xi_r(n) = P_{r,0} + P_{r,1} n + P_{r,2} n^2 + \ldots + P_{r,\rho-1} n^{\rho-1}.$$

» Cela étant, il est clair que la série (3) est la somme de plusieurs séries partielles qui correspondent respectivement aux diverses racines de l'équation génératrice. Si donc nous appelons $F(x)$ la somme de la série (3) et $\Phi_r(x)$ celle de la série partielle qui correspond à la racine r, nous avons, en étendant encore le signe Σ à toutes les racines de l'équation génératrice,

$$F(x) = \Sigma \Phi_r(x), \tag{4}$$

et tout le problème est ramené à la détermination de $\Phi_r(x)$.

» Cette détermination est facile. En effet, si l'on désigne par $f(x)$ la somme de la série primitive (1), que l'on représente par $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., les dérivées successives de la fonction $f(x)$; enfin que l'on pose

$$h!\,Q_{r,h} = \Delta^h 0^h P_{r,h} + \Delta^h 0^{h+1} P_{r,h+1} + \ldots + \Delta^h 0^{\rho-1} P_{r,\rho-1},$$

on a identiquement

$$\Phi_r(x) = Q_{r,0} f(rx) + Q_{r,1} rxf'(rx) + Q_{r,2} r^2 x^2 f''(rx) + \ldots + Q_{r,\rho-1} r^{\rho-1} x^{\rho-1} f^{(\rho-1)}(rx).$$

» Cette formule, jointe à celle (4) qui précède, nous fait connaître l'expression de $F(x)$; elle résout le problème que je m'étais proposé, et l'on voit qu'elle le résout dans toute sa généralité. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les équations différentielles linéaires à intégrales algébriques.* Note de M. **H. Poincaré**.

« Pour rechercher quelles sont les équations différentielles linéaires dont toutes les intégrales sont algébriques, il faut d'abord déterminer les groupes de substitutions linéaires qui ne se composent que d'un nombre fini de substitutions. Dans un travail inséré dans les *Mémoires de l'Académie de Naples*, M. Jordan donne une méthode générale pour résoudre ce problème, et il applique sa méthode aux équations des quatre premiers ordres. Connaissant ces groupes de substitutions linéaires en nombre fini, il faut ensuite former les équations différentielles correspondantes. M. Jordan insiste peu sur ce point. Je désirerais attirer l'attention sur quelques propriétés de ces équations.

» Bornons-nous au troisième ordre, pour fixer les idées. Envisageons l'un des groupes découverts par M. Jordan ; supposons que ce groupe G soit composé de n opérations, qui consistent à changer respectivement x, y, z en

$$a_i x + b_i y + c_i z,$$
$$a'_i x + b'_i y + c'_i z,$$
$$a''_i x + b''_i y + c''_i z,$$

$i = 1, 2, \ldots, n$.

» Soit

$$H(\xi, \eta) = \frac{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma}{\alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'}, \quad H_1(\xi, \eta) = \frac{\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1}{\alpha'_1\xi + \beta'_1\eta + \gamma'_1}.$$

» Soient A_i, B_i, C_i, A'_i, B'_i, C'_i, A''_i, B''_i, C''_i des quantités proportionnelles à a_i, b_i, c_i, a'_i, b'_i, c'_i, a''_i, b''_i, c''_i et telles que le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i \\ A'_i & B'_i & C'_i \\ A''_i & B''_i & C''_i \end{vmatrix} = 1.$$

» Soient

$$x = \sum_{i=1}^{i=n} H\left(\frac{A_i\xi + B_i\eta + C_i}{A''_i\xi + B''_i\eta + C''_i}, \frac{A'_i\xi + B'_i\eta + C'_i}{A''_i\xi + B''_i\eta + C''_i}\right),$$

$$y = \sum_{i=1}^{i=n} H_1\left(\frac{A_i\xi + B_i\eta + C_i}{A''_i\xi + B''_i\eta + C''_i}, \frac{A'_i\xi + B'_i\eta + C'_i}{A''_i\xi + B''_i\eta + C''_i}\right).$$

» Il est clair que x et y sont des fonctions rationnelles qui ne changent pas quand on change ξ et η en

$$\xi_i = \frac{A_i\xi + B_i\eta + C_i}{A''_i\xi + B''_i\eta + C''_i}, \quad \eta_i = \frac{A'_i\xi + B'_i\eta + C'_i}{A''_i\xi + B''_i\eta + C''_i},$$

et que toute fonction rationnelle de ξ et de η qui ne change pas quand on change ξ et η en ξ_i et η_i sera une fonction rationnelle de x et de y.

» Si D est le déterminant fonctionnel de x et de y par rapport à ξ et à η, les trois fonctions

$$z_1 = \xi\sqrt[3]{D}, \quad z_2 = \eta\sqrt[3]{D}, \quad z_3 = \sqrt[3]{D}$$

se changeront respectivement en

$$A_i z_1 + B_i z_2 + C_i z_3,$$
$$A'_i z_1 + B'_i z_2 + C'_i z_3,$$
$$A''_i z_1 + B''_i z_2 + C''_i z_3$$

quand ξ et η se changeront en ξ_i et η_i.

» Posons, pour abréger,

$$D_{m_1 m_2} z_i = \frac{d^{m_1+m_2} z_i}{dx^{m_1} dy^{m_2}};$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix} D_{m_1 p_1} z_1 & D_{m_1 p_1} z_2 & D_{m_1 p_1} z_3 \\ D_{m_2 p_2} z_1 & D_{m_2 p_2} z_2 & D_{m_2 p_2} z_3 \\ D_{m_3 p_3} z_1 & D_{m_3 p_3} z_2 & D_{m_3 p_3} z_3 \end{vmatrix}$$

ne changera pas quand on changera ξ et η en ξ_i et η_i, et sera par conséquent une fonction rationnelle de x et de y.

» Il en résulte que

$$z = z_1, \quad z = z_2, \quad z = z_3$$

sont trois intégrales particulières d'une infinité d'équations aux différences partielles à coefficients rationnels. Ces équations s'écrivent

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} D_{m_1 p_1} z & D_{m_1 p_1} z_1 & D_{m_1 p_1} z_2 & D_{m_1 p_1} z_3 \\ D_{m_2 p_2} z & D_{m_2 p_2} z_1 & D_{m_2 p_2} z_2 & D_{m_2 p_2} z_3 \\ D_{m_3 p_3} z & D_{m_3 p_3} z_1 & D_{m_3 p_3} z_2 & D_{m_3 p_3} z_3 \\ D_{m_4 p_4} z & D_{m_4 p_4} z_1 & D_{m_4 p_4} z_2 & D_{m_4 p_4} z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

$m_1, p_1, m_2, p_2, m_3, p_3, m_4, p_4$ sont des entiers positifs quelconques; il est clair que les coefficients des différentes dérivées partielles de z sont rationnels en x et en y. Si l'on fait, en particulier, dans l'équation (1),

$$\begin{aligned} m_1 &= 0, & p_1 &= 0, \\ m_2 &= 1, & p_2 &= 0, \\ m_3 &= 2, & p_3 &= 0, \\ m_4 &= 3, & p_4 &= 0, \end{aligned}$$

elle prendra la forme

$$B_3 \frac{d^3 z}{dx^3} + B_2 \frac{d^2 z}{dx^2} + B_1 \frac{dz}{dx} + B_0 z = 0.$$

» Les B seront des polynômes entiers en x et y. Si l'on donne à y une valeur constante quelconque, on obtiendra une équation linéaire du troisième ordre, dont tous les coefficients seront rationnels et dont les intégrales seront les fonctions algébriques z_1, z_2, z_3.

» *Conséquence.* — A chacun des groupes définis par M. Jordan, correspondent une infinité d'équations linéaires du second ordre. Dans chacune de ces équations, les coefficients sont rationnels par rapport à la variable indépendante x et à un paramètre arbitraire y. Si l'on considère les trois intégrales z_1, z_2 et z_3 de cette équation comme fonctions de x et de y, ce seront des fonctions algébriques de ces variables, et elles satisferont non seulement à l'équation proposée, mais à une infinité d'équations aux dérivées partielles à coefficients rationnels, à savoir les équations (1).

» Je ne me suis restreint au troisième ordre que pour fixer les idées; les résultats sont vrais pour tous les ordres. »

ASTRONOMIE. — *Sur la distribution de l'énergie dans le spectre solaire normal.* Note de M. S.-P. LANGLEY. (Extrait par M. Faye.)

« J'ai déjà eu l'honneur de présenter à l'Académie quelques observations au sujet de l'absorption que l'atmosphère du Soleil exerce sur la radiation de cet astre; on trouvera, par exemple (t. LXXX, p. 820), cette conclusion remarquable que cette atmosphère est bien plus transparente pour la chaleur que pour la lumière, et cette autre que les divers rayons du spectre sont d'autant plus absorbés que leur réfrangibilité est plus grande (t. LXXXI, p. 437).

» Il ne suffirait donc pas, pour étudier l'absorption, de mesurer, en deux points inégalement éloignés du centre, les intensités lumineuses ou calorifiques (LAPLACE, *Méc. cél.*, liv. X, ch. III). En employant cette méthode, avec les formules correctes de M. Faye ou de M. Roche, appliquées aux observations les plus soignées, je n'ai pas réussi à trouver deux couples de valeurs donnant le même résultat, en dedans des limites permises de l'erreur.

» La difficulté tient uniquement à ce que l'on considère, dans cette théorie, l'atmosphère comme étant composée de couches homogènes dont le pouvoir absorbant varie de l'une à l'autre suivant une loi donnée, sans distinguer entre les rayons dont la radiation primitive se compose. C'est la même difficulté qu'on rencontre dans les observations photométriques. Je ferai remarquer qu'il en résulte une valeur constamment trop faible pour la constante solaire, telle que l'ont obtenue Pouillet, Herschel et les physiciens français qui se sont occupés de cette recherche. Décomposons l'atmosphère dont l'action totale réduit l'intensité A à l'intensité Ap^2, suivant la formule adoptée indistinctement pour tous les rayons, en couches successives et désignons par a le coefficient d'absorption pour un rayon de réfrangibilité donnée: l'intensité sera réduite à Aa; par une seconde couche,