ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une propriété des fonctions uniformes.* Note de M. H. POINCARÉ.

« Si $F(z)$ est une fonction uniforme de z, il pourra se faire ou qu'elle existe dans tout le plan, ou seulement dans une certaine région que j'appellerai la *région* S; si la fonction existait dans tout le plan, la région S s'étendrait dans tout le plan. A une même valeur de $F(z)$ correspondront une infinité de valeurs de z. Envisageons toutes ces valeurs comme fonctions de l'une d'entre elles que nous appellerons z, et appelons-les

(1) $$f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,\ f_i(z);$$

ces fonctions forment un groupe, et l'on a évidemment

$$F[f_i(z)] = F(z).$$

La région S va se trouver partagée en une infinité de régions

$$R_0,\ R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_i$$

telles que, si z parcourt la région R_0, $f_i(z)$ parcourra la région R_i : c'est dire que l'on ne pourra, en général, disposer de i de telle façon que le module de $f_i(z) - z$ soit aussi petit que l'on veut.

» Nous dirons alors que le groupe (1) est *discontinu*.

» *A fortiori*, tout groupe contenu dans le groupe (1) sera discontinu.

» Nous dirons que la fonction uniforme $F(z)$ *admet* le groupe (1); nous dirons aussi qu'elle *admet* tout groupe contenu dans le groupe (1).

» En résumé, un *groupe* de fonctions

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,\ f_i(z)$$

sera *discontinu* si l'on peut diviser le plan ou une partie du plan en régions $R_0, R_1, \ldots, R_i, \ldots$ telles que $f_i(z)$ parcoure R_i quand z parcourt R_0, et la fonction uniforme $F(z)$ admettra ce groupe si l'on a identiquement

$$F[f_i(z)] = F(z).$$

» Cela posé, soit un groupe discontinu quelconque; envisageons les deux séries

$$\Theta(z) = \sum_{i=0}^{i=\infty} H[f_i(z)]\left[\frac{df_i(z)}{dz}\right]^m,$$

$$\Theta_1(z) = \sum_{i=0}^{i=\infty} H_1[f_i(z)]\left[\frac{df_i(z)}{dz}\right]^m.$$

» Dans ces deux séries, m est un entier plus grand que 1; H et H_1 sont les algorithmes de deux fonctions rationnelles quelconques.

» Ces deux séries seront convergentes sans que leur somme soit altérée quand on change l'ordre des termes; elles définiront deux fonctions uniformes de z, jouissant de la propriété suivante :

$$\Theta\,[f_i(z)] = \Theta\,(z)\left[\frac{df_i(z)}{dz}\right]^{-m},$$

$$\Theta_1[f_i(z)] = \Theta_1(z)\left[\frac{df_i(z)}{dz}\right]^{-m}.$$

La fonction

$$\frac{\Theta(z)}{\Theta_1(z)} = F(z)$$

sera donc uniforme et jouira de la propriété suivante :

$$F[f_i(z)] = F(z),$$

c'est-à-dire qu'elle admettra le groupe proposé.

» *Il existe donc une infinité de fonctions uniformes admettant un groupe discontinu donné.* »

PHYSIQUE. — *Sur l'état liquide et l'état gazeux.* Note de M. **J.-B. Hannay.**

« Dans une Note intitulée *Recherches sur les changements d'état dans le voisinage du point critique de température*, communiquée à l'Académie le 4 avril 1881, MM. L. Cailletet et P. Hautefeuille expliquent qu'après avoir donné une couleur bleue à de l'acide carbonique en y dissolvant de l'huile de galbanum ils ont pu démontrer que les stries observées par M. Andrews étaient réellement produites par des couches superposées des états liquides et gazeux, et ils sont arrivés à la conclusion que la matière ne passe pas par degrés insensibles de l'état liquide à l'état gazeux. Dans une Note communiquée à la Société royale de Londres, le 24 mai 1880, intitulée *Sur l'état des fluides à leurs températures critiques*, j'ai dit :

« Il semblerait donc que la ligne d'ébullition ne s'étend pas au delà du point critique, mais que le point critique se trouve sur une ligne isothermale qui est la limite de l'état liquide.

» J'ai examiné plusieurs liquides et gaz liquéfiés, tels que CO^2, AzH^3, SO^2, Az^2O, CS^2, CCl^4, Cl, CH^4O, $C^2H^{10}O$ et C^2H^6O, et j'ai découvert que la capillarité disparaît au point critique ou près du point critique et que la pression ne la fait point reparaître.