» VI. Généralement l'équation

$$px^4 - my^4 = z^2,$$

où p désigne un nombre premier, est impossible en nombres rationnels, lorsque les deux nombres m et p présentent l'une des combinaisons suivantes :

1° $m = 145$, $p = 5u^2 + 29v^2 = 5, 29, 109, 241, 281, 349, 499, 509, 541, 701, 709, \ldots$

2° $m = 150$, $p = 6u^2 + 25v^2 = 31, 79, 241, 409, 631, 751, 919, 1009, 1039, \ldots$

3° $m = 153$, $p = (13, 4, 13) = 13, 229, 373, 421, 433, 457, 587, 757, 769, 1033, 1069, \ldots$

4° $m = 154$, $p = 11u^2 + 14v^2 = 11, 67, 113, 137, 323, 331, 401, 449, 499, 949, \ldots$

5° $m = 156$, $p = 12u^2 + 13v^2 = 13, 61, 313, 337, 433, 601, 757, 937, 1093, \ldots$

6° $m = 160$, $p = (4, 2, 41) = 41, 89, 401, 409, 569, 769, 881, 1009, 1049, \ldots$

7° $m = 180$, $p = 9u^2 + 20v^2 = 29, 89, 101, 401, 461, 521, 761, 809, 1049, 1109, \ldots$

8° $m = 184$, $p = (8, 4, 25) = 41, 73, 257, 389, 449, 557, 593, 601, 673, 929, \ldots$

9° $m = 192$, $p = (4, 2, 49) = 73, 97, 193, 313, 337, 433, 463, 577, 631, 751, 991, 1087, \ldots$

10° $m = 198$, $p = 22u^2 + 9v^2 = 31, 97, 103, 313, 433, 463, 577, 631, 751, 991, 1087, \ldots$

11° $m = 205$, $p = 5u^2 + 41v^2 = 5, 41, 61, 389, 409, 449, 541, 569, 661, 701, 769, \ldots$

12° $m = 208$, $p = (16, 8, 17) = 17, 113, 313, 337, 521, 601, 809, \ldots$

13° $m = 220$, $p = 5u^2 + 44v^2 = 5, 89, 181, 401, 421, 449, 521, 641, 1021, \ldots$

14° $m = 225$, $p = 9u^2 + 25v^2 = 61, 109, 181, 349, 541, 601, 661, 769, 829, \ldots$

15° $m = 238$, $p = 2u^2 + 119v^2 = 127, 137, 151, 191, 281, 457, 673, \ldots$

16° $m = 252$, $p = 9u^2 + 28v^2 = 37, 109, 181, 349, 541, 601, 661, 769, 829, \ldots$

17° $m = 258$, $p = 6u^2 + 43v^2 = 43, 67, 97, 139, 193, 337. 643, 769, 907, \ldots$

18° $m = 282$, $p = 3u^2 + 94v^2 = 3, 97. 241, 337, 379, 457, 523, 601, 619, 739, \ldots$

19° $m = 288$, $p = (4, 2, 73) = 73, 97, 193, 241, 433, 601, 673, 769, 937, 1009, \ldots$

20° $m = 310$, $p = 10u^2 + 31v^2 = 31, 41, 71, 191, 281, 521, 439, 769, 1031, 1471, \ldots$

21° $m = 322$, $p = 2u^2 + 161v^2 = 163, 179, 193, 211, 233, 449, 499, 673, 739, 883, \ldots$

22° $m = 328$, $p = 8u^2 + 41v^2 = 41, 73, 113, 241, 401, 433, 569, 761, 881, 1009, \ldots$

23° $m = 333$, $p = 9u^2 + 37v^2 = 37, 73, 157, 181, 229, 273, 613, 877, 937, 1327, \ldots$

24° $m = 340$, $p = 4u^2 + 85v^2 = 89, 101, 149, 229, 281, 409, 569, 661, 761, 769, 829, \ldots$

25° $m = 352$, $p = (4, 2, 89) = 89, 97, 113, 137, 257, 313, 449, 617, 929, 1049, \ldots$

26° $m = 372$, $p = 4u^2 + 93v^2 = 97, 109, 157, 193, 349, 577, 769, 853, 877, 937, 1033, 1093, \ldots$

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une extension de la notion arithmétique de genre.* Note de M. H. POINCARÉ, présentée par M. Hermite.

« 4. Reprenons la forme quadratique $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ étudiée dans la Note précédente, et envisageons une autre forme $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ appartenant au même ordre et ayant même déterminant Δ.

» On reconnaîtra que ces deux formes seront toujours équivalentes suivant un module impair et premier à Δ, de telle façon que, pour savoir si elles sont du même genre, il suffit de rechercher si elles sont équivalentes suivant une puissance quelconque de 2 et des facteurs premiers impairs de Δ.

» Soit p un facteur premier impair de Δ et

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

une série de nombres tels que

$$\gamma_i \equiv 0 \pmod{p^{\lambda_i}} \quad \text{sans que} \quad \gamma_i \equiv 0 \pmod{p^{\lambda_i+1}}$$

» Voici quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que les deux formes f et φ soient équivalentes suivant une puissance quelconque de p.

» Le mineur formé dans le tableau des coefficients de f en prenant les i premières lignes et les i premières colonnes s'appellera le *premier mineur* d'ordre $n-i$; il sera divisible par p^μ, où

$$\mu = i\lambda_1 + (i-1)\lambda_2 + \ldots + 2\lambda_{i+1} + \lambda_i.$$

» Je l'égalerai donc à $\mathrm{A}p^\mu$. Nous pourrons toujours supposer que A est premier avec p, car, s'il ne l'était pas, on pourrait appliquer à la forme f une transformation linéaire telle que le premier mineur d'ordre $(n-i)$ ne soit pas divisible par $p^{\mu+1}$. De même, le premier mineur d'ordre $(n-i)$ de φ sera égal à $\mathrm{B}p^\mu$, B étant premier avec p.

Si $\lambda_{i+1} = 0$, A et B ne sont assujettis à aucune condition; si $\lambda_{i+1} > 0$, A et B doivent être tous deux restes quadratiques, ou tous deux non restes à p.

» On connaît ainsi les caractères génériques de f relativement au nombre p.

» 5. Il reste à examiner quelles sont les conditions pour que les deux formes f et φ soient équivalentes suivant une puissance quelconque de 2. Pour être du même genre que f, la forme φ devra présenter certains caractères relatifs aux modules 4 et 8, ainsi que Gauss l'a déjà montré pour les formes binaires. Je me bornerai ici à un exemple.

» Je suppose que le premier coefficient de f, tous ses premiers mineurs et son déterminant soient $\equiv 1 \pmod 4$. Il est facile d'en conclure que les nombres $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ doivent être impairs, et que

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{n-1} = 1.$$

» Si la forme φ est du même genre que f, ses caractères ordinaux de première et de seconde espèce seront les mêmes que ceux de f; on pourra donc toujours appliquer à φ une transformation telle que tous ses premiers mineurs (y compris le premier coefficient et le déterminant) deviennent impairs. Voici la condition à laquelle sera assujettie φ :

» *Le nombre de ses premiers mineurs qui seront* $\equiv 3$ (*mod.* 4) *sera divisible par* 4.

» 6. En ce qui concerne les formes cubiques binaires

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3, \tag{1}$$

je me bornerai encore à des exemples, et je montrerai seulement comment elles se répartissent en genres par rapport aux modules 2, 3 et 5.

» Par rapport au module 2, toutes les formes (1) sont équivalentes à l'une des six formes

$$\begin{gathered}2x^3 + 6x^2y + 6xy^2 + 2y^3,\\ x^3,\quad x^3 + y^3,\\ 3x^2y + 3xy^2,\quad x^3 + 3xy^2,\\ x^3 + 3xy^2 + y^3,\end{gathered}$$

qui appartiennent toutes à des genres différents. Parmi elles, la quatrième et la sixième ont même discriminant et appartiennent au même ordre (par rapport au module 2). Toutes les autres sont d'ordre différent.

» Par rapport au module 3, toutes les formes (1) sont équivalentes à l'une des six formes

$$\begin{gathered}3x^2y + 3xy^2,\quad 3x^2y,\\ 3x^3 + 9x^2y + 9xy^2 + 3y^3,\\ x^3,\quad x^3 + 3xy^2,\quad x^3 + 6xy^2.\end{gathered}$$

» Ces formes sont toutes d'ordre ou de déterminant différent.

» Classons maintenant les formes cubiques binaires en genres par rapport au module 5.

» Les formes de discriminant $\equiv 0$ (mod. 5) se distribuent en trois ordres, comprenant chacun un genre.

» Les formes de discriminant $\equiv 1$ ou 4 se répartissent en un seul ordre et en un seul genre.

» Les formes de discriminant $\equiv 2$ ou 3 se répartissent en un seul ordre et en trois genres. Supposons d'abord le discriminant $\equiv 2$ (mod. 5).

» Les formes des trois genres seront respectivement équivalentes à l'une des trois formes

$$x^3 + 6xy^2 + y^3, \quad 2x^2 + 12xy^2 + 2y^3, \quad x^3 + 9xy^2.$$

» Supposons maintenant que le discriminant soit $\equiv 3$; les formes des trois genres seront respectivement équivalentes à l'une des trois formes

$$x^3 + 12xy^2 + y^3, \quad 2x^3 + 24xy^2 + 2y^3, \quad x^3 + 6xy^2. \text{ »}$$

HYDRODYNAMIQUE. — *Sur les ondes que fait naître, dans l'eau en repos d'un canal, l'émersion d'un cylindre solide, plongé en travers dans ce canal.* Note de M. **J. Boussinesq**, présentée par M. de Saint-Venant.

« Les résultats démontrés dans mes deux Notes des 2 et 9 janvier, pour le problème des petits mouvements qu'exécute le liquide d'abord en repos d'un canal, à la suite de légères dénivellations $h = \mathrm{F}(x)$ produites aux environs de l'origine, consistent en ce que : 1° la fonction φ de x, z et t, qui donne, par ses dérivées partielles φ'_x et $\varphi'_z = \varphi''_t$, la composante horizontale u et la composante verticale w de la vitesse, peut se déterminer au moyen des deux équations indéfinies $\varphi^{\text{IV}}_t + \varphi''_x = 0$, $\varphi''_z + \varphi''_x = 0$ et des cinq conditions spéciales $\varphi = 0$ (pour $t = 0$), $\varphi''_t = 0$ (pour $t = 0$), $\varphi = 0$ (pour $\mathfrak{r}$ infini), $\varphi = 0$ (pour t infini), $-\varphi'_t = h = \mathrm{F}(x)$ (pour z et t nuls); 2° la première de ces équations indéfinies et les deux premières relations spéciales sont satisfaites en posant

$$(1) \qquad \varphi = \int_0^\infty \left[f\left(x - \frac{\alpha^2}{2}, z\right) + f\left(x + \frac{\alpha^2}{2}, z\right) \right] \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha,$$

où $f(x, z)$ désigne une fonction arbitraire de x et z, supposée toutefois tendre vers zéro quand $\mathfrak{r} = \sqrt{x^2 + z^2}$ grandit indéfiniment, et où $\psi(\gamma)$, intégrale de l'équation $\psi''(\gamma) + \psi(\gamma) = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}$, est la fonction $\int_0^{\sqrt{\gamma}} \sin(\gamma - m^2)\, dm$, donnant $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$, $\int_0^\infty \psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ et, par suite,

$$\varphi'_t = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} f(x, z)$$

à la limite $t = 0$. Or, pour que la même expression vérifie aussi la seconde équation indéfinie et la cinquième condition spéciale, il suffit que l'on ait