» En posant, avec M. Bourguet,

$$x(x+1)\Gamma(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots,$$

on en conclut aisément que, pour toutes les valeurs *paires* de i, les quantités

$$2B_i + B_{i-1},\quad 6B_i + 5B_{i-1} + B_{i-2},\quad 24B_i + 26B_{i-1} + 9B_{i-2} + B_{i-3},\quad \ldots$$

sont positives. La même chose n'a pas lieu pour les valeurs impaires de i; les signes des quantités précédentes varient alors d'une façon irrégulière.

» Toutes ces quantités tendent du reste très rapidement vers zéro, et on déduit de là un moyen de calculer de proche en proche les valeurs approchées des coefficients.

» La relation $6B_{18} + 5B_{17} + B_{16} > 0$ donne, par exemple, quand on y remplace B_{17} et B_{16} par leurs valeurs,

$$B_{18} > 0,000\,001\,906\,46;$$

la valeur donnée par M. Bourguet est

$$B_{18} = 0,000\,001\,906\,49.$$

» Les considérations qui précèdent suffisent pour mettre en évidence le rôle important que joue, dans la théorie des équations transcendantes, la notion des facteurs primaires, dont on est redevable à M. Weierstrass. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions fuchsiennes.* Note de M. **H. Poincaré**, présentée par M. Hermite.

« Dans la Note que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, je me propose d'exposer une méthode nouvelle et rapide pour exprimer une fonction fuchsienne donnée à l'aide de séries thétafuchsiennes. Je suppose, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'une fonction du genre 0 et de la première famille. J'envisage une équation du second ordre :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\,\frac{\varphi(x)}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2}; \tag{1}$$

je suppose que $\varphi(x)$ est un polynôme de degré $2n-2$, et que, pour les différents points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n, \infty$, les intégrales soient régulières, et que les différences des racines des équations déterminantes soient respectivement

$$\frac{1}{\mu_1},\ \frac{1}{\mu_2},\ \ldots,\ \frac{1}{\mu_n},\ \frac{1}{\mu_{n+1}}.$$

Je suppose que l'on sache que x est fonction fuchsienne du rapport z des intégrales. On peut choisir z d'une infinité de manières. On pourra toujours le choisir de telle façon que, pour z très voisin de o, x soit très voisin de a_1, et se développe de la façon suivante :

$$(2)\qquad x = a_1 + z^{\mu_1} + b_2 z^{2\mu_1} + b_3 z^{3\mu_1} + b_4 z^{4\mu_1} + \ldots.$$

En posant alors

$$x = f(z),$$

$f(z)$ est une fonction fuchsienne parfaitement déterminée; il est aisé de calculer les coefficients $b_2, b_3, b_4, \ldots$ et ceux des substitutions du groupe fuchsien correspondant

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right).$$

Cela posé, envisageons la fonction suivante :

$$\Lambda(z) = \frac{[f(z) - a_1]^{\lambda_1}[f(z) - a_2]^{\lambda_2}\ldots[f(z) - a_n]^{\lambda_n}}{[f'(z)]^m [f(z) - f(z_1)][f(z) - f(z_2)]\ldots[f(z) - f(z_p)]}.$$

Les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, m$ sont entiers positifs. Ils sont assujettis, ainsi que le nombre p des facteurs du dénominateur, aux inégalités suivantes :

$$\lambda_i > m\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right),$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n < m\left(1 + \frac{1}{\mu_{n+1}}\right) + p.$$

Les quantités $z_1, z_2, \ldots, z_p$ sont regardées provisoirement comme des constantes. Les infinis de la fonction $\Lambda(z)$ sont tous simples; ils sont compris dans la formule

$$\frac{\alpha_i z_1 + \beta_i}{\gamma_i z_1 + \delta_i},\ \frac{\alpha_i z_2 + \beta_i}{\gamma_i z_2 + \delta_i},\ \ldots,\ \frac{\alpha_i z_p + \beta_i}{\gamma_i z_p + \delta_i}.$$

Quels sont les résidus correspondants? Soit

$$\frac{1}{[f(z) - f(z_1)][f(z) - f(z_2)]\ldots[f(z) - f(z_p)]}$$
$$= \frac{A_1}{f(z) - f(z_1)} + \frac{A_2}{f(z) - f(z_2)} + \ldots + \frac{A_p}{f(z) - f(z_p)}.$$

On aura

$$(2)\quad \begin{cases} A_1 + A_2 + \ldots + A_p = 0, \\ A_1 f(z_1) + A_2 f(z_2) + \ldots + A_p f(z_p) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1 f(z_1)^{p-2} + A_2 f(z_2)^{p-2} + \ldots + A_p f(z_p)^{p-2} = 0. \end{cases}$$

Le résidu correspondant à l'infini

$$\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}$$

sera

$$\frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{m+1}} (\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(m+1)},$$

en posant, pour abréger,

$$F(z) = [f(z) - a_1]^{\lambda_1} [f(z) - a_2]^{\lambda_2} \ldots [f(z) - a_n]^{\lambda_n}.$$

Soit $\varphi(z)$ une fonction rationnelle quelconque ne devenant pas infinie à l'intérieur du cercle fondamental. La fonction $\varphi(z)\Lambda(z)$ jouira de la propriété suivante; elle sera égale à une somme de termes de la forme $\sum \frac{A}{z-a}$, comme on le démontre par des considérations très simples, mais qui cependant ne peuvent trouver place ici. On aura donc

$$\varphi(z)\Lambda(z) = \sum_i \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{m+1}} \frac{\varphi\left(\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)}{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{2(m+1)}} \frac{1}{z - \frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}}.$$

Cette identité a lieu quel que soit $\varphi(z)$. Nous pouvons donc écrire

$$(4)\quad \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{m+1}} \Theta(z_k) = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$\Theta(t) = \sum \frac{\varphi\left(\frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right) - \varphi(z)}{z - \frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}} (\gamma_i t + \delta_i)^{-2(m+1)}.$$

Cette fonction, si l'on y regarde z comme une constante, est une fonction thétafuchsienne de t. Si l'on rapproche l'identité (4) des équations (3), et si l'on remarque que, dans ces équations, $z_1, z_2, \ldots, z_p$ ont des valeurs quelconques, on en déduira l'existence d'une relation de la forme

$$(5)\quad \Theta(t) = \frac{[b'(t)]^{m+1}}{F(t)}[M_0 + M_1 f(t) + M_2 f^2(t) + \ldots + M_{p-2} f^{p-2}(t)],$$

où M_0, M_1, ..., M_{p-2} sont des constantes indépendantes de t. Les valeurs numériques de ces constantes peuvent être calculées aisément à l'aide de séries de même forme que Θ et des $p-2$ premiers coefficients b_1, b_2, ..., b_{p-2} de la série (2). Cette méthode nous donne donc l'expression d'une fonction rationnelle de $f'(z)$ et de $f(z)$ sous la forme d'une série thétafuchsienne. Connaissant trois pareilles expressions, nous pourrons exprimer rationnellement $f(z)$ par des séries thétafuchsiennes.

» On peut, par ce procédé, écrire effectivement certaines relations linéaires entre les séries thétafuchsiennes, relations dont j'ai démontré *a priori* l'existence.

» Les mêmes méthodes sont applicables, avec quelques changements, aux fonctions des autres genres et des autres familles. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur un moyen d'étendre la théorie des imaginaires, sans faire usage des imaginaires.* Note de M. SALTEL.

« Soit

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

une équation en x, y supposée algébrique, entière et d'ordre m. Remplaçons les variables x, y par

$$x = \alpha + \lambda\beta, \tag{2}$$

$$y = \alpha' + \lambda\beta'. \tag{3}$$

En ordonnant le résultat de la substitution par rapport à λ, on a une équation de la forme

$$\lambda^m A_0(\alpha, \beta, \alpha', \beta') + \lambda^{m-1} A_1(\alpha, \beta, \alpha', \beta') + \ldots + A_m(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0. \tag{4}$$

Cela fait, considérons la nouvelle équation

$$i_m A_0(\alpha, \beta, \alpha', \beta') + i_{m-1} A_1(\alpha, \beta, \alpha', \beta') + \ldots + A_m(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0, \tag{5}$$

obtenue en remplaçant dans (4) les puissances

$$\lambda^m,\ \lambda^{m-1},\ \lambda^{m-2},\ \ldots,\ \lambda \tag{6}$$

par les *nouvelles variables*

$$i_m,\ i_{m-1},\ i_{m-2},\ \ldots,\ i, \tag{7}$$