

» Je remarque encore seulement que, si vous désignez par $G(x)$ une fonction entière quelconque de x , la fonction $\overline{F(x)} = F(x) + G(x)$ a les mêmes propriétés caractéristiques que $F(x)$, et que, $\overline{F(x)}$ et $F(x)$ étant deux fonctions quelconques ayant ces propriétés, leur différence $\overline{F(x)} - F(x)$ sera toujours une fonction entière de x . Une telle fonction peut toujours être mise sous la forme $\sum_v g_v(x)$, où $g_1(x), g_2(x), \dots$ sont des fonctions entières rationnelles de x . On obtient par conséquent, au moyen de la série

$$\sum_v [F_v(x) + g_v(x)],$$

où $\sum_v g_v(x)$ représente une fonction entière arbitraire de x , une expression qui embrasse toutes les fonctions ayant les propriétés demandées. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Sur les points singuliers des équations différentielles.

Note de M. H. POINCARÉ, présentée par M. Hermite.

« J'envisage deux équations différentielles simultanées

$$(1) \quad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

où X, Y, Z sont des polynômes entiers en x, y, z . Si je regarde x, y, z comme les coordonnées d'un point dans l'espace, ces deux équations définissent une infinité de courbes gauches que j'appelle *caractéristiques*.

» Par chaque point de l'espace passe une caractéristique et une seule. Les seuls points qui ne satisfont pas à cette règle sont les *points singuliers*, c'est-à-dire les points d'intersection des trois surfaces

$$(2) \quad X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

» En général, ces trois surfaces ne se couperont pas suivant une courbe, et les points singuliers seront isolés. Pour les classer, on envisagera l'équation en S

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} - S & \frac{dX}{dy} & \frac{dX}{dz} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} - S & \frac{dY}{dz} \\ \frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{dZ}{dz} - S \end{vmatrix} = 0.$$

» Nous supposons que cette équation n'a pas de racine multiple ni de racine nulle, ce qui arrivera en général. Il y aura alors quatre sortes de points singuliers :

» 1° Les *nœuds*. L'équation (3) a toutes ses racines réelles et de même signe. Toutes les caractéristiques qui pénètrent dans une petite sphère décrite autour du point singulier viennent converger en ce point. exemple, l'équation

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

dont l'intégrale générale s'écrit

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

a, b, c étant les constantes d'intégration.

» 2° Les *cols*. L'équation (3) a toutes ses racines réelles, mais non de même signe. Une infinité de caractéristiques, dont l'ensemble forme une surface, viennent converger au point singulier; en dehors de cette surface, il existe encore une autre caractéristique qui vient passer par le point singulier; les autres restent constamment à une distance finie de ce point : exemple, l'équation

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{-z},$$

dont l'intégrale générale s'écrit

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{1}{cz}.$$

Une infinité de caractéristiques,

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \quad z = 0,$$

situées toutes sur la surface $z = 0$, viennent passer par l'origine. Il en est de même de la caractéristique

$$x = y = 0.$$

Les autres restent à une distance finie de l'origine.

» 3° Les *foyers*. L'équation (3) a une racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées, dont la somme est de même signe que la racine réelle. Une caractéristique, et une seule, passe par le foyer; les autres tournent

autour de ce foyer, en s'en rapprochant asymptotiquement, en forme de spirales et de tire-bouchons.

» 4° Les cols-foyers. L'équation (3) a une racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées; dont la somme n'est pas de même signe que la racine réelle. Une caractéristique, et une seule, passe par le point singulier; une infinité d'autres, dont l'ensemble forme une surface, tournent autour de ce point en s'en rapprochant asymptotiquement; les autres restent à une distance finie de ce point.

» Un cas particulier intéressant est celui où les trois surfaces (2) se coupent suivant une même courbe, qui est alors une *ligne singulière*.

» Considérons un point de cette ligne singulière. En ce point, l'équation (3) a une racine nulle. Il y a toujours une caractéristique qui passe par le point singulier, et c'est la ligne singulière elle-même.

» Les points d'une ligne singulière sont d'ailleurs de trois sortes :

» 1° Les *nœuds*. L'équation (3) a une racine nulle et deux racines réelles et de même signe. Dans le voisinage de ces points, une infinité de caractéristiques, dont l'ensemble forme une surface, viennent converger en chaque point de la ligne singulière.

» 2° Les *cols*. L'équation (3) a une racine nulle et deux racines réelles et de signe contraire. Par chaque point de la ligne singulière passent deux caractéristiques (outre la ligne singulière elle-même); les autres restent à distance finie de cette ligne.

» 3° Les *foyers*. L'équation (3) a une racine nulle et les deux autres imaginaires conjuguées. Toutes les caractéristiques se rapprochent alors asymptotiquement de la ligne singulière.

» On trouverait des singularités d'ordre plus élevé aux points qui séparent les arcs de la ligne singulière, dont tous les points sont des *nœuds*, des arcs dont tous les points sont des *cols* et de ceux dont tous les points sont des *foyers*. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Sur les formes des intégrales de certaines équations différentielles linéaires. Note de M. E. PICARD, présentée par M. Hermite.

« On a étudié principalement jusqu'ici la forme des intégrales d'une équation différentielle linéaire, dans le cas où, les coefficients étant uniformes, toutes les intégrales sont, d'après l'expression de M. Fuchs, régulières. Quoique les remarques qui suivent soient applicables à certaines