donc à $N(m+1, \mu)$ équations. D'autre part, soit $\varphi(m, \mu)$ (¹) le nombre des coefficients réellement distincts entrant dans les polynômes A_i.

» Pour que les diverses relations comprises dans l'équation (2) conduisent, par l'élimination des coefficients arbitraires, à des équations aux dérivées partielles auxquelles satisfera la fonction z, il faudra que l'on ait

$$N(m+1, \mu) > \varphi(m, \mu).$$

Ainsi, pour chaque degré m, le nombre μ des variables devra être supérieur à une certaine limite qui, on le reconnaît aisément, est inférieure à m. Autrement, l'équation (2) pourrait toujours être satisfaite par un choix convenable des coefficients qui entrent dans les polynômes A_i.

» Mais on peut, en généralisant les propositions que l'on connaît relativement aux fonctions algébriques d'une variable, obtenir les théorèmes suivants :

» *Il existera toujours, entre la fonction z et m de ses dérivées, ou entre $m+1$ dérivées de z, une relation linéaire et homogène, dont les coefficients seront des fonctions rationnelles des variables indépendantes.*

» *Si toutes les dérivées considérées sont du second ordre au moins, la relation a lieu entre m dérivées seulement.*

» J'ajoute qu'il est toujours possible de choisir, dans cet ensemble de relations, un certain nombre d'entre elles dont toutes les autres se déduisent par différentiation et élimination, et dont la solution commune se compose uniquement des diverses branches de la fonction z.

» Ces propositions sont analogues à celles que l'on emploie dans la théorie des équations linéaires, et elles se démontrent d'après les mêmes principes. Comme elles n'ont que des rapports éloignés avec la question que je m'étais proposée, je me contenterai des indications précédentes. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'intégration des équations différentielles par les séries.* Note de M. **H. Poincaré**, présentée par M. Hermite.

« Cauchy a démontré depuis longtemps que, si l'on a un ensemble d'équations différentielles simultanées telles que

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dy} = f_2(x, y, z, t), \quad \frac{dt}{dx} = f_3(x, y, z, t),$$

(¹) $\varphi(m, \mu)$ est une fonction numérique intéressante dont je réserve l'étude pour mon travail développé.

les intégrales peuvent se développer en séries convergentes ordonnées suivant les puissances de $x - x_0$, x_0 étant la valeur initiale de la variable x. Malheureusement ces séries ne restent convergentes que pour les petites valeurs de $x - x_0$; aussi, dans la plupart des applications, dans le calcul des perturbations, par exemple, leur a-t-on préféré d'autres séries et en particulier des séries trigonométriques.

» J'ai pensé qu'il y aurait quelque intérêt à rechercher si l'on ne peut pas intégrer les équations différentielles par des séries qui restent convergentes pour toutes les valeurs *réelles* de la variable. Voici comment on peut procéder. On peut ramener un système quelconque de relations algébriques entre un nombre égal de fonctions d'une seule variable indépendante et les dérivées de ces fonctions à la forme suivante :

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des polynômes entiers en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. J'introduis une variable auxiliaire s définie par l'équation différentielle

$$(2) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{ds}{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 + 1}.$$

» Je démontre qu'on peut toujours trouver un nombre α tel que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ puissent s'exprimer par des séries ordonnées suivant les puissances de

$$\frac{e^{\alpha s} - 1}{e^{\alpha s} + 1}$$

et convergentes pour toutes les valeurs réelles de s. Les coefficients sont des fonctions rationnelles de α, des coefficients des polynômes X et des valeurs initiales des variables.

» Cette formule permet de calculer $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tant que ces quantités restent réelles et ne prennent pas des valeurs qui annulent à la fois $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Si, par exemple, on voulait l'appliquer aux équations de la Mécanique céleste, les séries resteraient convergentes pour toutes les valeurs réelles du temps.

» Je n'ai voulu donner qu'un exemple, montrant qu'il était possible d'intégrer une équation différentielle quelconque par des séries toujours convergentes pour des valeurs réelles de la variable; mais ce problème comporte une infinité de solutions, et dans chaque cas particulier il y aurait lieu de rechercher quelle serait la plus avantageuse. »