ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions fuchsiennes.* Note de M. H. POINCARÉ, présentée par M. Hermite.

« Parmi les fonctions fuchsiennes existant dans toute l'étendue du plan, et dont j'ai parlé à la fin de ma dernière Communication, il en est un certain nombre sur lesquelles je voudrais attirer particulièrement l'attention. Considérons dans le plan des z l'axe des quantités réelles et $2n+1$ points $A_1, A_2, \ldots, A_n, C, B_1, B_2, \ldots, B_n$. Les points A_1 et B_1 sont situés sur l'axe des quantités réelles, les autres sont au-dessus de cet axe. Joignons les points

$$A_1A_2,\quad A_2A_3,\quad A_3A_4,\quad \ldots,\quad A_{n-1}A_n,\quad A_nC,\quad CB_n,\quad B_nB_{n-1},\quad \ldots,\quad B_3B_2,\quad B_2B_1$$

par des arcs de cercle ayant leurs centres sur l'axe des quantités réelles.

» On obtiendra ainsi un certain polygone curviligne

$$A_1A_2A_3A_4\ldots A_nCB_nB_nB_{n-1}\ldots B_2B_1,$$

dont tous les côtés seront des arcs de cercle ayant leurs centres sur l'axe des quantités réelles, excepté le côté A_1B_1, qui sera un segment de cet axe. Quant au sommet C, on peut, pour plus de symétrie, dans les énoncés, le considérer comme appartenant soit à la série des points A avec la notation A_{n+1}, soit à la série des points B avec la notation B_{n+1}.

» J'appelle D_i et D'_i les intersections de l'arc A_iA_{i+1} prolongé avec l'axe des quantités réelles; E_i, E'_i les intersections de cet axe avec l'arc B_iB_{i+1}.

» Je suppose :

» 1° Que le rapport anharmonique des quatre points D_i, D'_i, A_i, A_{i+1} sur le cercle $D_iD'_iA_iA_{i+1}$ est égal à celui des quatre points E_i, E'_i, B_i, B_{i+1} sur le cercle $E_iE'_iB_iB_{i+1}$;

» 2° Que les angles curvilignes A_i+B_i sont des parties aliquotes de 2π, ainsi que l'angle curviligne C.

» Dans ce cas, il existe une substitution linéaire

$$\left(z, \frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right),$$

dont les coefficients sont réels, et qui change A_iA_{i+1} en B_iB_{i+1}.

» En combinant ces n substitutions, on obtient un groupe discontinu, et ce groupe donne naissance à une infinité de fonctions fuchsiennes qui jouissent des propriétés suivantes :

» 1° Elles sont toutes fonctions rationnelles de l'une d'entre elles, que j'appelle $F(z)$;

» 2° Elles existent dans toute l'étendue du plan; leurs points singuliers essentiels sont isolés et en nombre infini, et ils sont tous situés sur l'axe des quantités réelles.

» Ces points singuliers sont infiniment rapprochés dans le voisinage de certains points singuliers du deuxième ordre; ceux-ci sont infiniment rapprochés dans le voisinage de certains points singuliers du troisième ordre, et ainsi de suite. D'ailleurs, les points singuliers de tous les ordres sont en nombre infini. Nous avons donc là un exemple de ces *fonctions du deuxième genre,* dont M. Mittag-Leffler a parlé dans sa Communication si intéressante du 3 avril.

» Si nous posons

$$x = F(z), \quad y = \sqrt{\frac{dF}{dx}},$$

on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \Phi(x)y, \tag{1}$$

$\Phi(x)$ étant rationnel en x. La fonction rationnelle $\Phi(x)$ a ses coefficients *réels;* et les points singuliers de l'équation (1) sont au nombre de $2n$ et sont imaginaires conjugués deux à deux. Pour chacun d'eux, les intégrales sont *régulières,* et la différence des racines de l'équation déterminante est une partie aliquote de l'unité.

» Dans le cas particulier où l'un ou plusieurs des sommets du polygone envisagé viennent sur l'axe des quantités réelles, les intégrales de l'équation (1) deviennent *logarithmiques* dans le voisinage des points singuliers correspondants.

» On peut former des fonctions kleinéennes ayant la même génération que les fonctions fuchsiennes dont je viens de parler. Les propriétés sont les mêmes. Seulement, les points singuliers essentiels ne sont plus situés sur l'axe des quantités réelles; la fonction $\Phi(x)$ n'a plus ses coefficients réels, et les points singuliers de l'équation (1) ne sont plus imaginaires conjugués deux à deux. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Solution du problème général de l'analyse indéterminée du premier degré.* Note de M. **Ch. Méray.**

« Voici l'énoncé du problème : *Étant donné un système quelconque de m équations du premier degré à coefficients entiers (positifs, nuls, ou négatifs) entre*