En rappelant que la valeur maximum de q est environ de $\frac{1}{23}$, on voit de suite de quelle convergence extraordinaire jouit cette série. Le terme seulement en q^{16} est $< \frac{1}{10^{22}}$.

» Il s'ensuit que, s'il s'agissait de construire des tables elliptiques avec vingt décimales exactes, la formule

$$\sqrt{\frac{K}{8\pi}} = \frac{1}{1+\sqrt{k'}+\sqrt[4]{1+k'}\sqrt[8]{64k'}},$$

qu'on peut écrire sous cette autre forme

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2K}{\pi}}} = \frac{1+\sqrt{k'}+\sqrt[4]{1+k'}\sqrt[8]{64k'}}{4},$$

suffirait à elle seule pour donner d'un seul coup le nombre cherché sans passer par les difficultés de calculs longs et compliqués, comme on a fait jusqu'ici. Cet exemple seul vaudra pour tous. Supposons $k = \sqrt{\frac{3}{4}}$, d'où $k' = \frac{1}{2}$. On trouvera, en s'aidant des tables auxiliaires de Callet, pour les logarithmes à vingt décimales,

$$\log K = \log \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{3}{4}x^2\right)}} = 0,33375\,26136\,98325\,44512.$$

Les tables à douze décimales de Legendre (p. 233, t. II) donnent

$$\log K = 0,333\,7526\,13\,698. »$$

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les transcendantes entières.* Note de M. H. POINCARÉ, présentée par M. Hermite.

« On sait que la découverte des facteurs primaires a jeté une lumière toute nouvelle sur la théorie des transcendantes entières, et a permis de les classer en un certain nombre de genres. D'après cette classification, une fonction du genre zéro est celle dont tous les facteurs primaires sont de la forme $1 - \frac{x}{a}$, et une fonction de genre n est celle dont tous les facteurs primaires sont de la forme $e^{P(x)}\left(1-\frac{x}{a}\right)$, $P(x)$ étant un polynôme de degré n.

» A l'égard de ces transcendantes entières, de genre n, je suis arrivé aux résultats suivants :

» I. Soit d'abord une fonction $F(x)$ de genre zéro.

» 1° Supposons que x croisse indéfiniment en conservant un argument déterminé, et que α soit un nombre tel que

$$\lim e^{\alpha x} = 0\,;$$

on aura également

$$\lim e^{\alpha x} F(x) = 0,$$

quelque petit que soit le module du nombre α.

» 2° Considérons l'intégrale définie

$$\int_0^\infty F(z)^{zx}\,dz,$$

l'intégrale étant prise le long d'une droite d'argument tel que la limite de e^{zx} pour $z=\infty$ soit nulle. Cette intégrale définira une fonction $\Phi\left(\frac{1}{x}\right)$ qui est holomorphe en x, sauf pour $x=0$, c'est-à-dire une fonction *entière* de $\frac{1}{x}$.

» 3° La fonction $F(x)$ peut se mettre sous la forme

$$\int \frac{\Phi(z)}{z} e^{\frac{x}{z}}\,dz,$$

l'algorithme $\Phi(z)$ désignant une fonction entière, et l'intégrale étant prise le long d'un contour enveloppant l'origine.

» 4° Si l'on se reporte maintenant au savant Mémoire de M. Halphen, intitulé « Sur une série d'Abel » et inséré dans un des derniers *Bulletins de la Société mathématique de France*, on reconnaîtra que $F(x)$ peut être représentée par la série d'Abel dont il est question dans ce Mémoire, et cela quelle que soit la constante β.

» II. Malheureusement ces propriétés ne sont pas caractéristiques des fonctions du genre zéro; elles appartiennent en outre à quelques fonctions de genre 1, parmi lesquelles je citerai la suivante :

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\log^2 n}\right).$$

Si plus généralement on envisage le produit infini

$$\Psi(x) = \prod \left(1 - \frac{x^2}{a_n^2}\right),$$

où la suite des nombres a_n est telle que la série $\sum \frac{1}{a_n}$ ne soit pas convergente, mais que cependant la limite de $\frac{a_n}{n}$ pour n infini soit infinie, la fonction $\Psi(x)$ sera de genre 1 et cependant jouira des propriétés énoncées plus haut.

» III. Considérons maintenant une fonction $F(x)$ de genre n.

» 1° Supposons que x croisse indéfiniment en conservant un argument déterminé, et que α soit un nombre tel que

$$\lim e^{\alpha x^{n+1}} = 0;$$

on aura également

$$\lim e^{\alpha x^{n+1}} F(x) = 0,$$

quelque petit que soit le module de α.

» 2° L'intégrale définie

$$\int_0^\infty e^{(xz)^{n+1}} F(z)\, dz,$$

prise le long d'une droite d'argument tel que la limite de $e^{(xz)^{n+1}}$ pour $z = \infty$ soit nulle, représente une fonction entière de $\frac{1}{x}$.

» 3° Si l'on pose

$$F(x) = \Sigma A_p x^p,$$

et si a est le plus grand entier contenu dans $\frac{p}{n+1}$, on aura

$$\lim A_p a! = 0, \quad \text{pour } p = \infty.$$

» 4° On aura de même

$$\lim A_p \sqrt[n+1]{(p!)} = 0, \quad \text{pour } p = \infty,$$

et même la série

$$\Sigma A_p \sqrt[n+1]{(p!)}\, x^p$$

représentera une fonction entière.

» 5° La fonction $F(x)$ peut se mettre sous la forme

$$\int \frac{\Phi(z)}{z} e^{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}} \frac{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+} - 1}{\frac{x}{z} - 1} dz,$$

$\Phi(z)$ désignant une fonction entière et l'intégrale étant prise le long d'un contour enveloppant l'origine. »

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Recherches sur l'emploi des manomètres à écrasement pour la mesure des pressions développées par les substances explosives.* Note de MM. **Sarrau** et **Vieille**, présentée par M. Berthelot.

« **1.** La mesure du maximum des pressions produites par les explosifs dans les canons et dans les éprouvettes closes est d'une haute importance pour l'étude théorique et pratique des effets de la poudre et des substances explosives : elle présente des difficultés spéciales tenant à la grandeur des pressions et à la rapidité avec laquelle ces pressions se modifient.

» Les manomètres ordinairement employés pour évaluer les pressions statiques ne s'appliquent pas à cette mesure et ils ne peuvent donner sur les pressions maxima aucun renseignement, même approché.

» **2.** On a employé, depuis quelques années, pour mesurer ces pressions, des procédés fondés sur les déformations permanentes qu'éprouvent les métaux sous l'action de forces énergiques.

» Le manomètre le plus répandu, fondé sur ce principe, est l'appareil dit *crusher*, imaginé par le capitaine Noble, de l'artillerie anglaise. Avec ce manomètre, on mesure l'écrasement d'un petit cylindre de cuivre rouge placé entre une enclume fixe et la tête d'un piston dont la base, de section connue, reçoit l'action des gaz.

» Cet appareil est actuellement réglementaire en France pour les épreuves de réception de poudre; il est d'un usage très commode, et ses indications sont en général fort régulières (1). Mais la nature des évaluations numériques que ces indications sont susceptibles de donner n'a pas

---

(1) La régularité de la déformation est remarquable pour les cylindres préparés par les soins de l'Artillerie de la Marine. Ces cylindres ont, avant l'écrasement, $0^m,008$ de diamètre et $0^m,013$ de hauteur; après écrasement, ils prennent la forme d'un petit baril dont les bases restent rigoureusement circulaires, bien que leurs surfaces deviennent doubles et triples des surfaces primitives. Le solide déformé reste poli, sans gerçures ni granulations. Ces résultats ne s'obtiennent que par des soins extrêmes donnés à la fabrication et par l'emploi de cuivre d'une pureté exceptionnelle.

Le piston écraseur est la pièce la plus importante de l'appareil; il doit être rodé dans son logement avec la plus grande précision. La moindre fuite, sous les pressions énormes des expériences, suffit pour déterminer des érosions profondes dans les pièces d'acier entre lesquelles la fuite se produit, et pour mettre, en une seule fois, l'appareil hors de service.