» Ainsi, en prenant

$$f(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = xy_0 + yx_0 + zz_0,$$

on aura

$$X = (1 + i\alpha)\xi + b\eta + c\zeta,$$
$$Y = -c_0\xi + d\eta + i\beta\zeta,$$
$$Z = -b_0\xi + i\gamma\eta + (2 - d_0)\zeta,$$

(ou $i = \sqrt{-1}$).

» Les trois quantités réelles α, β, γ et les quantités complexes b, c, d sont entièrement arbitraires.

» L'étude arithmétique des substitutions à coefficients entiers est une question plus difficile, sur laquelle je me propose de revenir dans une autre occasion. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les séries trigonométriques.* Note de M. **H. Poincaré**, présentée par M. Hermite.

« On sait quel est le rôle joué en Mécanique céleste par les séries de la forme

$$\sum A_p \sin(\mu m_p + \nu n_p)t + \sum B_p \cos(\mu m_p + \nu n_p)t,$$

où μ et ν sont des nombres indépendants de p et où m_p et n_p sont des entiers positifs ou négatifs. C'est ce rôle qui donne un grand intérêt à l'étude de ces expressions et plus généralement à celle des suites infinies de la forme

$$\sum_p{}_0^\infty A_p \sin\alpha_p t + \sum_p{}_0^\infty B_p \cos\beta_p t.$$

Voici un fait qui concerne ces séries et sur lequel je désirerais attirer l'attention. Je choisirai pour l'exposer un exemple particulier. Considérons la fonction

$$(1) \qquad \varphi(t) = \Sigma A_p \sin\alpha_p t.$$

» Je suppose que les nombres A_p et α_p sont positifs et que $\frac{1}{A_p}$ et α_p tendent vers zéro quand p augmente indéfiniment. La série du second membre est convergente, pourvu que la suite infinie $\Sigma A_p\alpha_p$ le soit ellemême. Le nombre A_p, par hypothèse, peut croître au delà de toute limite. Mais on ne saurait en conclure sans démonstration que le module de $\varphi(t)$

peut également devenir aussi grand que l'on veut. C'est là le fait que je me propose d'établir.

» Je dis que ce module peut devenir plus grand que $\frac{A_m}{4}$, A_m étant un des coefficients de la série (1). Supposons, en effet, que l'on ait constamment :

$$\operatorname{mod}\varphi(t) < \frac{A_m}{4};$$

on en conclurait

$$\operatorname{mod}\int_0^t \varphi(t)\sin\alpha_m t\,dt < \frac{A_m t}{4}, \quad \operatorname{mod}[\varphi(t)\cos\alpha_m t] < \frac{A_m}{4};$$

or on a, en intégrant par parties,

$$\int_0^t \varphi(t)\sin\alpha_m t\,dt = -\frac{\varphi(t)\cos\alpha_m t}{\alpha_m} + \int_0^t \frac{d\varphi}{dt}\frac{\cos\alpha_m t}{\alpha_m}dt.$$

On devrait donc avoir

$$\operatorname{mod}\int_0^t \frac{d\varphi}{dt}\frac{\cos\alpha_m t}{\alpha_m}dt < \frac{A_m}{4}\left(t + \frac{1}{\alpha_m}\right).$$

Or on a

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Sigma A_p\alpha_p\cos\alpha_p t,$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{dt}\cos\alpha_m t = \sum\frac{A_p\alpha_p}{2}\cos(\alpha_m - \alpha_p)t + \sum\frac{A_p\alpha_p}{2}\cos(\alpha_m + \alpha_p)t$$

et

$$(2)\quad \int_0^t \frac{d\varphi}{dt}\cos\alpha_m t\,dt = \frac{A_m\alpha_m t}{2} + \sum\frac{A_p\alpha_p\sin(\alpha_m - \alpha_p)t}{2(\alpha_m - \alpha_p)} + \sum\frac{A_p\alpha_p\sin(\alpha_m + \alpha_p)t}{2(\alpha_m + \alpha_p)}.$$

» Les deux séries

$$\sum\frac{A_p\alpha_p}{2\operatorname{mod}(\alpha_m - \alpha_p)} \quad \text{et} \quad \sum\frac{A_p\alpha_p}{2(\alpha_m + \alpha_p)}$$

sont convergentes, et j'appellerai leurs sommes B et C. Les deux séries du second membre de l'équation (2) ont évidemment, en valeur absolue, leurs sommes inférieures à B et à C. On aura donc

$$\operatorname{mod}\left(\int_0^t \frac{d\varphi}{dt}\cos\alpha_m t\,dt - \frac{A_m\alpha_m t}{2}\right) < B + C,$$

de sorte qu'on devrait avoir

$$\frac{A_m t}{2} < \frac{A_m}{4}\left(t + \frac{1}{\alpha_m}\right) + \frac{B}{\alpha_m} + \frac{C}{\alpha_m}.$$

Or cette inégalité ne peut subsister pour de grandes valeurs de t. Donc $\varphi(t)$ *peut devenir plus grand que* $\frac{A_m}{4}$ *et, par conséquent, que toute quantité donnée*, puisque A_m croît indéfiniment avec m. Le même résultat serait encore vrai si les nombres A_p et α_p n'étaient pas assujettis à être positifs; il le serait encore (pourvu que A_p puisse croître au delà de toute limite) de la série

$$\Sigma A_p(1 - \cos\alpha_p t) \tag{3}$$

qui est convergente, pourvu que la suite infinie $\Sigma \bmod A_p\alpha_p^2$ le fût également.

» Voici comment cela peut s'appliquer aux séries que l'on a à envisager en Mécanique céleste. On sait que, si t est le temps et a le grand axe, par exemple, on a pour la dérivée de ce grand axe une expression de la forme

$$\frac{da}{dt} = \Sigma A_p \sin d_p t + \Sigma B_p \cos\beta_p t,$$

les deux séries $\Sigma \bmod A_p$ et $\Sigma \bmod B_p$ étant convergentes. En négligeant les carrés des masses, on en conclut, pour la variation δa du grand axe, l'expression

$$\delta a = \sum \frac{A_p}{\alpha_p}(1 - \cos a_p t) + \sum \frac{B_p}{\beta_p}\sin\beta_p t. \tag{4}$$

» On serait tenté de conclure que δa reste toujours compris entre certaines limites. Cela a lieu en fait pour certaines valeurs incommensurables du rapport des moyens mouvements. Mais il est d'autres valeurs *également incommensurables* de ce même rapport pour lesquelles les séries du second membre de l'équation (4) se comportent comme les séries (1) et (3), et peuvent croître indéfiniment.

» Cela n'a pas d'importance au point de vue *pratique* du calcul des perturbations, puisque le rapport des moyens mouvements ne peut être connu qu'approximativement et que nous ne pouvons reconnaître par conséquent si les séries (4) restent finies ou croissent indéfiniment; puisque d'ailleurs l'équation (4) ne représente la variation du grand axe que si l'on néglige les termes d'ordre supérieur par rapport aux masses, et que nous ignorons si ces termes ne peuvent pas eux-mêmes croître au delà de toute limite.

» Néanmoins, il y a peut-être quelque intérêt à signaler ce fait, car il montre qu'il est impossible d'accepter certaines conséquences *théoriques* qu'on serait tenté de tirer de l'expression (4). »