
SUR LES

FORMES CUBIQUES TERNAIRES ET QUATERNAIRES,

PAR M. H. POINCARÉ,

Professeur à la Faculté de Caen.

SECONDE PARTIE.

Dans la première Partie de ce travail (*Journal de l'École Polytechnique*, L^e Cahier), j'ai étudié les formes en général, et en particulier les formes cubiques ternaires et quaternaires, à un point de vue purement algébrique, et j'ai cherché; entre autres choses, à trouver les transformations linéaires qui reproduisent une forme donnée.

Je vais maintenant pouvoir aborder les problèmes arithmétiques qui sont l'objet principal de ce Mémoire :

- 1° Reconnaître si deux formes données sont équivalentes;
- 2° Distribuer les formes en classes, en genres et en ordres;
- 3° Trouver les transformations à coefficients entiers qui reproduisent une forme donnée.

Je résoudrai ces problèmes par une généralisation de la méthode de M. Hermite, sur laquelle je veux donner d'abord quelques explications.

VI. — MÉTHODE DE M. HERMITE.

Pour que deux formes soient arithmétiquement équivalentes, il faut d'abord qu'elles soient réellement équivalentes, ce que l'on peut reconnaître

par des considérations purement algébriques, qui permettront également de trouver une transformation permettant de passer de l'une à l'autre.

Soient donc F et F' deux formes dont il s'agit de reconnaître l'équivalence arithmétique; supposons qu'elles soient réellement équivalentes et dérivent par des substitutions réelles d'une même canonique H . Pour reconnaître si F et F' sont arithmétiquement équivalentes, il faut définir des formes qui jouent, par rapport à F et F' , le même rôle que les réduites par rapport aux formes quadratiques.

Quelques définitions sont tout d'abord nécessaires.

On appellera *substitution réduite* toute substitution qui, appliquée à la forme quadratique définie,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \text{ou} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

donne une forme quadratique définie réduite.

Parmi les formes dérivées de la canonique H , on appellera *formes réduites* toutes les formes qui pourront être tirées de H par une substitution réduite.

Soit à trouver toutes les formes réduites arithmétiquement équivalentes à une forme F qui est elle-même réellement équivalente à la canonique H .

Soit T une transformation qui permet de passer de H à F , de telle sorte que

$$F = H.T.$$

Soit τ une transformation qui reproduit H ; on aura évidemment

$$F = H.\tau.T,$$

et l'on obtiendra toutes les transformations qui font passer de H à F , en prenant toutes les transformations qui reproduisent H , et les multipliant par T .

Pour trouver toutes les formes réduites équivalentes à F , il faut chercher toutes les transformations entières E , telles que la substitution

$$\tau.T.E$$

soit réduite, ou, ce qui revient au même, telles que la forme quadratique définie

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2). \tau. T. E,$$

ou

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2). \tau. T. E,$$

soit réduite.

D'après ce qu'on sait des formes quadratiques définies, on est sûr qu'il y a toujours une substitution entière E qui réduit

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2). \tau. T,$$

ou

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2). \tau. T;$$

en général, il n'y en a qu'une, et l'on peut la trouver aisément.

Si donc le type H n'est reproductible par aucune substitution, il y aura une forme réduite équivalente à F et, en général, il n'y en aura qu'une.

Si le type H est reproductible par différentes substitutions, il y aura, en général, un nombre fini ou une infinité de réduites équivalentes à F, et il sera aisé de les trouver.

Cela posé, il est clair que, pour que deux formes soient équivalentes, il faut et il suffit que le système des réduites de l'une soit identique au système des réduites de l'autre.

La méthode de M. Hermite peut également servir à trouver toutes les substitutions *entières* qui reproduisent F.

Supposons, en effet, que l'on ait

$$F = F.S,$$

S étant une substitution entière.

Soit E l'une des substitutions entières qui réduisent F, de telle sorte que

$$F.E$$

soit une réduite.

On aura de même

$$F.E = F.S.E.$$

La substitution entière $S.E$ réduira donc F et conduira à la même réduite que la substitution E .

Par conséquent, pour trouver une transformation entière qui reproduise F , il faut chercher deux substitutions entières et unitaires qui réduisent F et transforment cette forme en une même réduite.

Soient E et E_1 ces deux substitutions,

$$E_1.E^{-1}$$

sera une substitution entière qui reproduira F .

VII. — PROPRIÉTÉS DES TRANSFORMATIONS RÉDUITES.

Il y a plusieurs manières de définir les transformations réduites; car il y a plusieurs manières de définir les réduites d'une forme quadratique définie.

Supposons une forme ternaire, pour fixer les idées, et soit

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy$$

cette forme; d'après une première définition, on peut dire que cette forme est réduite: si A est le plus petit nombre qu'elle puisse représenter, quand on donne à x, y, z des valeurs entières telles, que l'on n'ait pas à la fois

$$x = y = z = 0;$$

si de plus A' est le plus petit nombre qu'elle puisse représenter, quand on donne à x, y, z des valeurs entières telles, que l'on n'ait pas à la fois

$$y = z = 0;$$

si enfin A'' est le plus petit nombre qu'elle puisse représenter, quand on

donne à x, y, z des valeurs entières, telles que l'on n'ait pas

$$z = 0.$$

Nous pourrions nous servir des transformations réduites définies de la sorte, et nous atteindrions, grâce à elles, le but que nous nous proposons; toutefois ce ne sera pas de cette définition que nous ferons le plus fréquent usage, mais bien de la définition qui est due à MM. Korkine et Zolotareff (*Mathematische Annalen*, Band 6).

On dit alors qu'une forme est réduite quand on peut l'écrire de la façon suivante

$$\mu_1(x_1 + \varepsilon_{21}x_2 + \varepsilon_{31}x_3)^2 + \mu_2(x_2 + \varepsilon_{32}x_3)^2 + \mu_3x_3^2,$$

où

- 1° Tous les ε sont plus petits en valeur absolue que $\frac{1}{2}$;
- 2° μ_1 est le plus petit nombre que puisse représenter la forme donnée;
- 3° μ_2 est le plus petit nombre que puisse représenter la forme binaire

$$\mu_2(x_2 + \varepsilon_{32}x_3)^2 + \mu_3x_3^2.$$

Une transformation sera alors réduite, si elle s'écrit

$$T \propto \begin{vmatrix} \sqrt{\mu_1} & \varepsilon_{21}\sqrt{\mu_1} & \varepsilon_{31}\sqrt{\mu_1} \\ 0 & \sqrt{\mu_2} & \varepsilon_{32}\sqrt{\mu_2} \\ 0 & 0 & \sqrt{\mu_3} \end{vmatrix},$$

où T est une substitution qui reproduit

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

et où les μ et les ε satisfont aux conditions précédentes.

MM. Korkine et Zolotareff ont démontré, dans le Mémoire auquel j'ai renvoyé, diverses propriétés des μ .

On a, dans le cas des formes ternaires,

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1,$$

$$\mu_2 > \frac{3}{4} \mu_1, \quad \mu_3 > \frac{2}{3} \mu_1;$$

dans le cas des formes quaternaires,

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 = 1,$$

$$\mu_2 > \frac{3}{4} \mu_1, \quad \mu_3 > \frac{2}{3} \mu_1, \quad \mu_4 > \frac{1}{2} \mu_1.$$

Nous ferons de ces propriétés un fréquent usage.

VIII. — RÉFLEXIONS SUR LA MÉTHODE PRÉCÉDENTE.

Il est clair que la définition que nous venons de donner des réduites équivalentes à une forme quelconque laisse quelque prise à l'équivoque ; en effet, on n'arrivera pas au même résultat :

1° Quelle que soit la manière dont on aura défini les transformations réduites (*voir* le paragraphe précédent);

2° Quelle que soit la forme H qui aura été choisie comme canonique parmi les formes algébriquement équivalentes à F.

Toutes les fois qu'on parlera des réduites d'une forme F, il faudra, par conséquent, spécifier :

1° Si l'on définit les transformations réduites à la manière ordinaire ou à la façon de MM. Korkine et Zolotareff, ou de toute autre manière ;

2° Quelle est la canonique H qui est choisie dans toutes les formes réellement équivalentes à F.

Ainsi, pour les formes quadratiques binaires par exemple, on choisit généralement pour la canonique ou bien $\alpha(x^2 + y^2)$, ou bien αxy , ou enfin $\alpha(x^2 - y^2)$; mais il est clair que l'on pourrait tout aussi bien choisir une canonique différente; et alors on arriverait à une théorie tout à fait identique à la théorie ordinaire, bien que les réduites soient définies d'une façon toute différente.

IX. — THÉORÈME DE M. JORDAN.

M. Jordan a démontré (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 5 mai 1879) un théorème qu'il énonce ainsi :

Les formes à coefficients entiers algébriquement équivalentes à une forme donnée se répartissent en un nombre fini de classes, pourvu que le discriminant ne soit pas nul.

Nous allons donner de ce théorème une démonstration nouvelle, et arriver ainsi à faire voir qu'il est vrai non seulement quand le discriminant n'est pas nul, mais encore, dans certains cas, bien que le discriminant soit nul.

Pour que les formes algébriquement équivalentes à une forme donnée se répartissent en un nombre infini de classes, il faut, en effet, nous allons le faire voir, que non seulement le discriminant, mais encore d'autres invariants, que nous apprendrons à former, s'annulent à la fois.

Pour démontrer le théorème de M. Jordan, nous allons faire voir qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini de réduites algébriquement équivalentes à une forme donnée.

Supposons en effet, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'une forme ternaire d'ordre m , algébriquement équivalente à une canonique H :

Appelons réduite de la première catégorie toute réduite telle que le coefficient de x_1^m et celui de $x_1^{m-1}x_2$ ne soient pas nuls à la fois.

Je dis d'abord que, les réduites à coefficients entiers de la première catégorie algébriquement équivalentes à H sont en nombre fini.

Soit

$$H = \sum A_{h,k,l} x_1^h x_2^k x_3^l$$

et soit

$$F = H.S = \sum B_{h,k,l} x_1^h x_2^k x_3^l$$

une forme réduite algébriquement équivalente à H ; S , qui est une substi-

tution réduite, s'écrira

$$S = T \times \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{31} \\ 0 & 1 & \varepsilon_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sqrt{\mu_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\mu_3} \end{vmatrix},$$

T étant une substitution qui reproduit

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

et dont, par conséquent, les coefficients sont tous plus petits que 1.

Quant aux ε , ils sont plus petits que $\frac{1}{2}$ en valeur absolue.

On a alors

$$H.T = \sum C_{m,n,p} x_1^m x_2^n x_3^p,$$

et il est clair que, les coefficients de T étant tous limités, les C devront être également limités. De même, si l'on pose

$$H.T \times \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{31} \\ 0 & 1 & \varepsilon_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sum D_{h,k,l} x_1^h x_2^k x_3^l,$$

les D seront ainsi limités. Or, on a

$$(29) \quad A_{h,k,l} = D_{h,k,l} \mu_1^{\frac{h}{2}} \mu_2^{\frac{k}{2}} \mu_3^{\frac{l}{2}}.$$

Par hypothèse, des deux coefficients

$$A_{m,0,0}, \quad A_{m-1,1,0},$$

l'un au moins n'est pas nul. Soit, par exemple, $A_{m-1,1,0}$, on a

$$(30) \quad A_{m-1,1,0} = D_{m-1,1,0} \mu_1^{\frac{m-1}{2}} \mu_2^{\frac{1}{2}}.$$

Multiplions les équations (29) et (30), après avoir élevé la deuxième au carré :

$$A_{h,k,l} \times A_{m-1,1,0}^2 = D_{h,k,l} \times D_{m-1,1,0}^2 \mu_1^{\frac{2m-2+h}{2}} \mu_2^{\frac{k+2}{2}} \mu_3^{\frac{l}{2}}.$$

Remarquons :

1° Que

$$h + k + l = m;$$

2° Que

$$\mu_2 > \frac{3}{4} \mu_1, \quad \mu_3 > \frac{3}{4} \mu_2, \quad \mu_3 > \frac{2}{3} \mu_1;$$

d'où

$$\begin{aligned} \mu_1^{\frac{2m-2}{2} + \frac{h}{2}} &< \mu_1^{\frac{m}{2}} \times \left(\frac{3}{4} \mu_2\right)^{\frac{m-2}{2}} \times \left(\frac{3}{2} \mu_3\right)^{\frac{h}{2}}, \\ \mu_2^{\frac{k+2}{2}} &< \mu_2 \times \left(\frac{4}{3} \mu_3\right)^{\frac{k}{2}}; \end{aligned}$$

d'où

$$\mu_1^{\frac{2m-2+h}{2}} \mu_2^{\frac{k+2}{2}} \mu_3^{\frac{l}{2}} < \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{m+k-2}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{h}{2}} (\mu_1 \mu_2 \mu_3)^{\frac{m}{2}},$$

ou

$$\mu_1^{\frac{2m-2+h}{2}} \mu_2^{\frac{k+2}{2}} \mu_3^{\frac{l}{2}} < \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{m+k-2}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{h}{2}},$$

ou enfin

$$A_{h,k,l} \times A_{m-1,1,0}^2 < D_{h,k,l} D_{m-1,1,0}^2 \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{m+k-2}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{h}{2}}.$$

Donc le produit de

$$A_{h,k,l} \quad \text{et} \quad A_{m-1,1,0}^2$$

est limité. Mais $A_{m-1,1,0}$, qui n'est pas nul, est au moins égal à 1. Donc $A_{h,k,l}$ est limité.

Donc il n'y a qu'un nombre fini de réduites de la première catégorie équivalentes à H.

Soit maintenant $\Delta \cdot H$ un covariant quelconque de H; on aura, T étant une transformation unitaire quelconque,

$$(\Delta \cdot H) T = \Delta(H \cdot T).$$

Si de plus H.T a ses coefficients entiers, $\Delta(H \cdot T)$ aura également ses coefficients entiers.

Supposons que, parmi les formes algébriquement équivalentes à $\Delta \cdot H$, on choisisse ΔH comme forme canonique ($\Delta \cdot H$), T sera alors une forme ré-

duite quand T sera une transformation réduite, c'est-à-dire quand $H.T$ sera une forme réduite.

Nous dirons que $\Delta.H$ est un covariant de la première espèce quand le symbole Δ représentera une opération telle qu'à une forme $\Delta.H$ corresponde une seule forme H (par exemple le hessien des formes cubiques ternaires de la première famille).

Nous dirons que $\Delta.H$ est un covariant de la deuxième espèce quand, sans être de la première espèce, il est du même degré que H (par exemple, le hessien des formes cubiques ternaires de la deuxième famille).

Enfin ΔH sera de la troisième espèce s'il n'est ni de la première ni de la deuxième.

$H.T$ sera une réduite de la deuxième catégorie si, sans être de la première catégorie, elle est telle que $\Delta.H.T$ soit de la première catégorie, et si $\Delta.H$ est de la première espèce.

Il est clair que les réduites de la première catégorie $\Delta.H.T$ et, par conséquent, les réduites de la deuxième catégorie $H.T$ seront en nombre fini.

$H.T$ sera une réduite de la troisième catégorie si, sans être de la première catégorie, elle est telle que $\Delta.H.T$ soit de la première catégorie, ΔH représentant un covariant de la deuxième espèce,

$$\Delta H + \lambda H,$$

où λ est un entier quelconque, sera alors un covariant de la première ou de la deuxième espèce, et

$$(\Delta H + \lambda H)T$$

sera, par rapport à la canonique $(\Delta H + \lambda H)$, une réduite de la première catégorie.

Il n'y aura donc qu'un nombre fini de réduites à coefficients entiers, telles que

$$(\Delta H + \lambda H)T,$$

et, comme il n'y a non plus qu'un nombre fini de réduites à coefficients

entiers, telles que

$$\Delta HT,$$

il n'y aura qu'un nombre fini de réduites de la troisième catégorie, telles que

$$HT.$$

$H.T$ sera une réduite de la quatrième catégorie si, sans être de la première catégorie, elle est telle que le coefficient du terme de ΔHT , dont le degré en x_1 est le plus élevé, ne soit pas nul, et si, de plus, ΔH est un covariant de la troisième espèce.

Je dis que les réduites de la quatrième catégorie sont encore en nombre fini.

En effet, les réduites à coefficients entiers, telles que ΔHT , sont encore en nombre fini.

Soit m le degré de H et p celui de ΔH ,

$$\Delta H^m + H^p$$

sera un covariant, et

$$[(\Delta H)^m + H^p]T$$

sera une réduite par rapport à ce covariant; si dans ΔHT le coefficient de x_1^p n'est pas nul, pendant que dans HT le coefficient de x_1^m est nul (ce qui a lieu puisque HT est une réduite de quatrième catégorie) le coefficient de x_1^{mp} dans

$$[(\Delta H)^m + H^p]T$$

ne sera pas nul et, par conséquent, cette réduite sera de la première catégorie. Donc il n'y aura qu'un nombre fini de réduites :

- 1° Telles que ΔHT ;
- 2° Telles que $(\Delta H)^m T$;
- 3° Telles que $[(\Delta H)^m + H^p]T$;
- 4° Telles que $H^p T$;
- 5° Enfin telles que HT .

C. Q. F. D.

En résumé, il n'y aura qu'un nombre fini de réduites à coefficients en-

tiers, dérivées de H , soit de la première catégorie, soit de la deuxième, de la troisième ou de la quatrième catégorie par rapport à un covariant quelconque de H .

Pour qu'il y ait un nombre infini de réduites dérivées de H , il faut donc qu'il y ait des réduites qui ne soient ni de la première catégorie, ni de la deuxième, de la troisième ou de la quatrième catégorie par rapport à aucun des covariants de H .

Or voyons ce que cela signifie dans le langage géométrique.

Supposons que la transformation T s'écrive

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3, \\x_2 &= \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + \beta_3 \xi_3, \\x_3 &= \gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2 + \gamma_3 \xi_3.\end{aligned}$$

Dire que le coefficient de ξ_1^m dans HT est nul, c'est dire que le point

$$\xi_2 = \xi_3 = 0$$

ou

$$\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\beta_1} = \frac{x_3}{\gamma_1}$$

est sur la courbe

$$H = 0.$$

Dire que les coefficients de ξ_1^m et $\xi_1^{m-1} \xi_2$ dans HT sont nuls à la fois, c'est dire que la droite

$$\xi_3 = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} x_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ x_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ x_3 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

est tangente à la courbe $H = 0$ au point

$$\xi_2 = \xi_3 = 0.$$

Dire que HT est une réduite qui n'est ni de la première, ni de la deuxième, ni de la troisième, ni de la quatrième catégorie, c'est dire que

la droite

$$\xi_3 = 0$$

est tangente, au point

$$\xi_2 = \xi_3 = 0,$$

à toutes les courbes telles que

$$\Delta H = 0,$$

ΔH étant un covariant quelconque de première ou de seconde espèce, et que le point

$$\xi_2 = \xi_3 = 0$$

est sur toutes les courbes telles que

$$\Delta_1 H = 0,$$

$\Delta_1 H$ étant un covariant quelconque de troisième espèce.

Pour qu'il y ait un nombre infini de réduites, il faut donc que toutes les courbes telles que

$$\Delta H = 0, \quad \Delta_1 H = 0$$

aillent passer par un même point, et que toutes les courbes telles que

$$\Delta H = 0$$

soient tangentes à une même droite en un même point.

Pour que les trois courbes

$$H = 0, \quad \Delta H = 0, \quad \Delta_1 H = 0$$

se coupent en un même point, il faut qu'un certain invariant soit nul; de même, pour que les deux courbes

$$H = 0, \quad \Delta H = 0$$

soient tangentes entre elles, il faut qu'un autre invariant soit nul.

Pour qu'il y ait un nombre infini de réduites, c'est-à-dire pour que le

théorème de M. Jordan soit en défaut, il faut donc que tous les invariants ainsi formés soient nuls à la fois.

Ce que nous venons de dire des formes ternaires s'étendrait aux formes d'un plus grand nombre de variables.

X. — FORMES CUBIQUES TERNAIRES DE LA PREMIÈRE ET DE LA SECONDE FAMILLE.

Nous allons appliquer les principes précédents aux formes cubiques ternaires.

Soit d'abord

$$6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3 + z^3) = H,$$

qui est la forme canonique de la première ou de la seconde famille.

Une pareille forme, nous l'avons vu, n'est reproductible que par des substitutions de la deuxième catégorie, qui se réduisent à des permutations entre les lettres x, y, z ; soit S l'une quelconque de ces substitutions qui reproduisent la forme H .

Soit

$$F = H.T$$

une forme quelconque réellement équivalente à H .

Les substitutions qui permettront de passer de H à F seront toutes de la forme

$$S.T.$$

Pour trouver les diverses réduites de F , il faut donc chercher la substitution entière E , qui réduit

$$(x^2 + y^2 + z^2)S.T,$$

et l'appliquer à F . Or S reproduit

$$x^2 + y^2 + z^2;$$

donc E doit réduire

$$(x^2 + y^2 + z^2)T.$$

Or, en général, il n'y aura qu'une substitution E qui réduise cette forme.

Donc F n'aura qu'une réduite

$$F.E.$$

Par conséquent, les formes cubiques ternaires de la première et de la seconde famille n'ont en général qu'une seule réduite.

Dans le cas particulier qui nous occupe, la considération des réduites n'est pas indispensable pour reconnaître l'équivalence de deux formes. En effet, comme on ne peut algébriquement passer d'une forme à l'autre que par un nombre fini de transformations, il suffit de s'assurer si les coefficients de l'une de ces transformations sont entiers, pour savoir s'il y a équivalence des deux formes.

Voyons ce que devient, dans le cas particulier qui nous occupe, le théorème de M. Jordan.

Nous ne considérerons qu'un seul des covariants de H, qui sera son hessien. Ce hessien est un covariant de la première espèce si H est de la première famille et de la seconde espèce si H est de la seconde famille; nous le désignerons, comme d'habitude, par la notation ΔH .

Mais les courbes

$$H = 0, \quad \Delta H = 0$$

ne peuvent jamais être tangentes entre elles.

Donc toutes les réduites algébriquement dérivées de H sont de la première ou de la deuxième catégorie si H est de la première famille, de la première ou de la troisième catégorie si H est de la seconde famille.

Le théorème de M. Jordan n'est donc jamais en défaut pour les formes de la première ou de la seconde famille.

Le problème qui se présente maintenant, c'est de trouver, en fonctions des invariants S et T, des limites supérieures que les coefficients de ces réduites ne puissent dépasser.

Mais limiter ces coefficients en fonctions de S et de T, c'est les limiter en fonctions de α et de β , qui sont des fonctions de S et de T définies par les égalités

$$S = 4\alpha(\alpha^3 - \beta^3),$$

$$T = 8\alpha^6 + 20\alpha^3\beta^3 - \beta^6.$$

On peut se servir de ces deux égalités soit pour calculer α et β , quand on connaît S et T, soit pour trouver des limites supérieures de α et de β , qui s'expriment d'une façon simple en fonctions de S et de T.

Quand on aura ensuite limité les coefficients des réduites en fonctions de α et de β , on pourra obtenir aisément des expressions des limites de ces fonctions de S et de T, expressions qui pourront être plus ou moins rapprochées des limites précises et plus ou moins compliquées.

PREMIER PROBLÈME. — *Limiter en fonctions de α et de β les coefficients des réduites de la première catégorie.*

Soit

$$\begin{aligned} HT = & A_1\xi_1^3 + A_2\xi_2^3 + A_3\xi_3^3 \\ & + 2B_{12}\xi_1^2\xi_2 + 3B_{23}\xi_2^2\xi_3 + 3B_{31}\xi_3^2\xi_1 \\ & + 3B_{21}\xi_1\xi_2^2 + 3B_{32}\xi_2\xi_3^2 + 3B_{13}\xi_3\xi_1^2 + 6C\xi_1\xi_2\xi_3 \end{aligned}$$

une réduite de la première catégorie.

Par définition, A_1 et B_{12} ne seront pas nuls à la fois, et l'on aura

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{31} \\ 0 & 1 & \varepsilon_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sqrt{\mu_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\mu_3} \end{vmatrix}$$

ou

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1\varepsilon_{21} + \beta_1 & \alpha_1\varepsilon_{31} + \beta_2\varepsilon_{32} + \gamma_1 \\ \alpha_2 & \alpha_2\varepsilon_{21} + \beta_2 & \alpha_2\varepsilon_{31} + \beta_2\varepsilon_{32} + \gamma_2 \\ \alpha_3 & \alpha_3\varepsilon_{21} + \beta_3 & \alpha_3\varepsilon_{31} + \beta_3\varepsilon_{32} + \gamma_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sqrt{\mu_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\mu_3} \end{vmatrix}.$$

Comme, d'après la définition des transformations réduites donnée par

Zolotareff, la substitution

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

reproduit $x^2 + y^2 + z^2$ et a, par conséquent, tous les coefficients plus petits que 1 en valeur absolue; comme, d'autre part, les ε sont plus petits que $\frac{1}{2}$ en valeur absolue, on aura, en valeur absolue, les inégalités suivantes :

$$\alpha_i < 1, \quad \alpha_i \varepsilon_{2i} + \beta_i < \frac{3}{2}, \quad \alpha_i \varepsilon_{3i} + \beta_i \varepsilon_{32} + \gamma_i < 2.$$

Posons

$$\Phi = H \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \varepsilon_{21} + \beta_1 & \alpha_1 \varepsilon_{31} + \beta_1 \varepsilon_{32} + \gamma_1 \\ \alpha_2 & \alpha_2 \varepsilon_{21} + \beta_2 & \alpha_1 \varepsilon_{32} + \beta_2 \varepsilon_{32} + \gamma_2 \\ \alpha_3 & \alpha_2 \varepsilon_{21} + \beta_3 & \alpha_3 \varepsilon_{31} + \beta_3 \varepsilon_{32} + \gamma_3 \end{vmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \Phi &= a_1 y_1^3 + a_2 y_2^3 + a_3 y_3^3 \\ &+ 3b_{12} y_1^2 y_2 + 3b_{23} y_2^2 y_3 + 3b_{31} y_3^2 y_1 \\ &+ 3b_{21} y_1 y_2^2 + 3b_{32} y_2 y_3^2 + 3b_{13} y_3 y_1^2 + 6c y_1 y_2 y_3. \end{aligned}$$

Les inégalités auxquelles satisfont les coefficients de la substitution qui permet de passer de H à Φ montrent que les a , les b et c satisfont aux inégalités que nous allons former.

Soit

$$\lambda = 6(\alpha) + 3(\beta),$$

(α) et (β) étant les valeurs absolues de α et de β ; nous appellerons de même Λ la quantité qui joue, par rapport au hessien de H, le même rôle que λ par rapport à H.

Λ et λ sont des fonctions de S et de T.

On a évidemment, en valeur absolue,

$$(32) \quad \begin{cases} a_1 < \lambda, & a_2 < \lambda\left(\frac{1}{2}\right)^3 \text{ ou } \lambda\frac{27}{8}, & a_3 < \lambda 2^3 \text{ ou } 8\lambda, \\ b_{12} < \lambda\frac{3}{2}, & b_{23} < \lambda\left(\frac{3}{2}\right)^2 2 \text{ ou } \lambda\frac{9}{2}, & b_{31} < \lambda 2^2 \text{ ou } 4\lambda, \\ b_{21} < \lambda\left(\frac{3}{2}\right)^2 \text{ ou } \lambda\frac{9}{4}, & b_{32} < \lambda\frac{3}{2} 2^2 \text{ ou } 6\lambda, & b_{13} < 2\lambda, \\ c < \lambda\frac{3}{2} 2 \text{ ou } 3\lambda. \end{cases}$$

Ces inégalités limitent les a , les b , etc. Cherchons maintenant à limiter les A , les B et C ; pour cela, nous nous servirons des égalités évidentes

$$(33) \quad \begin{cases} A_1 = a_1 \mu_1^{\frac{3}{2}}, & A_2 = a_2 \mu_2^{\frac{3}{2}}, & A_3 = a_3 \mu_3^{\frac{3}{2}}, & B_{12} = b_{12} \mu_1 \mu_2^{\frac{1}{2}}, \\ B_{23} = b_{23} \mu_2 \mu_3^{\frac{1}{2}}, & B_{31} = b_{31} \mu_3 \mu_1^{\frac{1}{2}}, & B_{21} = b_{21} \mu_2 \mu_1^{\frac{1}{2}}, \\ B_{32} = b_{32} \mu_3 \mu_2^{\frac{1}{2}}, & B_{13} = b_{13} \mu_1 \mu_3^{\frac{1}{2}}, & C = c \mu_1^{\frac{1}{2}} \mu_2^{\frac{1}{2}} \mu_3^{\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

On a

$$C = c,$$

d'où

$$C < 3\lambda,$$

$$A_1 = a_1 \mu_1^{\frac{3}{2}} < a_1 \mu_1^{\frac{1}{2}} \mu_2^{\frac{1}{2}} \mu_3^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{4}{3} \frac{3}{2}}, \quad \text{d'où} \quad A_1 < \lambda \sqrt{2},$$

$$B_{12} = b_{12} \mu_1 \mu_2^{\frac{1}{2}} < b_{12} \mu_1^{\frac{1}{2}} \mu_2^{\frac{1}{2}} \mu_3^{\frac{2}{2}} \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \text{d'où} \quad B_{12} < \lambda \sqrt{\frac{27}{6}},$$

$$B_{21} = b_{21} \mu_2 \mu_1^{\frac{1}{2}} < b_{21} \mu_1^{\frac{1}{2}} \mu_2^{\frac{1}{2}} \mu_3^{\frac{2}{2}} \sqrt{\frac{4}{3}}, \quad \text{d'où} \quad B_{21} < \lambda \sqrt{\frac{27}{1}},$$

$$B_{13} = b_{13} \mu_1 \mu_3^{\frac{1}{2}} < b_{13} \mu_1^{\frac{1}{2}} \mu_2^{\frac{1}{2}} \mu_3^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{4}{3}}, \quad \text{d'où} \quad B_{13} < \lambda \sqrt{\frac{8}{3}}.$$

Comme nous n'avons pas supposé jusqu'ici que la réduite HT fût de la première catégorie, les quatre inégalités précédentes subsistent, que la réduite soit de la première, de la deuxième ou de la troisième catégorie.

On a

$$A_1 A_2 = a_1 a_2 \mu_1^{\frac{3}{2}} \mu_2^{\frac{3}{2}} < a_1 a_2 \sqrt{\frac{4}{3} \frac{3}{2}}, \quad \text{d'où} \quad A_1 A_2 < \lambda^2 \frac{27}{8} \sqrt{2},$$

$$A_1 B_{23} = a_1 b_{23} \mu_1^{\frac{3}{2}} \mu_2 \mu_3^{\frac{1}{2}} < a_1 b_{23} \sqrt{\frac{2}{9}}, \quad \text{d'où} \quad A_1 B_{23} < \lambda^2 \times \frac{9}{4} \sqrt{6},$$

$$\begin{aligned}
A_1 B_{31} &= a_1 b_{31} \mu_1^2 \mu_{31} < a_1 b_{31} \frac{4}{3}, & \text{d'où} & \quad A_1 B_{31} < \lambda^2 \times \frac{16}{3}, \\
A_1 B_{32} &= a_1 b_{32} \mu_1^{\frac{3}{2}} \mu_2^{\frac{1}{2}} \mu_3 < a_1 b_{32} \sqrt{\frac{4}{9}}, & \text{d'où} & \quad A_1 B_{32} < \lambda^2 \times 4\sqrt{3}, \\
B_{12} A_2 &= b_{12} a_2 \mu_1 \mu_2^2 < b_{12} a_2 \frac{4}{3}, & \text{d'où} & \quad B_{12} A_2 < \lambda^2 \times \frac{27}{4}, \\
B_{12} A_{23} &= b_{12} b_{23} \mu_1 \mu_2^{\frac{3}{2}} \mu_3^{\frac{1}{2}} < b_{12} b_{23} \sqrt{\frac{4}{8}}, & \text{d'où} & \quad B_{12} B_{23} < \lambda^2 \times \frac{9}{2} \sqrt{3}, \\
B_{12} B_{31} &= b_{12} b_{31} \mu_1^{\frac{3}{2}} \mu_2^{\frac{1}{2}} \mu_3 < b_{12} b_{31} \sqrt{\frac{4}{3}}, & \text{d'où} & \quad B_{12} B_{31} < \lambda^2 \times 4\sqrt{3}, \\
B_{12} B_{32} &= b_{12} b_{32} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \leq b_{12} b_{32}, & \text{d'où} & \quad B_{12} B_{32} < \lambda^2 \times 9.
\end{aligned}$$

Comme des deux coefficients A_1 et B_{12} l'un au moins n'est pas nul et, par conséquent, au moins égal à 1, on aura en valeur absolue

$$\begin{aligned}
A_2 &< \frac{27}{4} \lambda^3, & B_{23} &< \frac{9}{2} \lambda^2 \sqrt{3}, \\
B_{31} &< 4 \lambda^2 \sqrt{3}, & B_{32} &< 9 \lambda^2.
\end{aligned}$$

Il reste à limiter A_3 ; nous y arriverons à l'aide des inégalités

$$\begin{aligned}
A_1^2 A_3 &= a_1^2 a_3 \mu_1^3 \mu_3^{\frac{2}{3}} < a_1^2 a_3 \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}, \\
B_{12}^2 A_3 &= b_{12}^2 a_3 \mu_1^2 \mu_2 \mu_3^{\frac{2}{3}} < b_{12}^2 a_3 \sqrt{\frac{4}{3}},
\end{aligned}$$

d'où

$$A_1^2 A_3 < \lambda^3 \times 8 \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad B_{12}^2 A_3 < \lambda^3 \times 8 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \sqrt{\frac{4}{3}},$$

et enfin

$$A_3 < 12 \lambda^3 \sqrt{3}.$$

§ DEUXIÈME PROBLÈME. — *Limitier en fonctions de α et de β ou, ce qui revient au même, en fonctions de λ et de Λ les coefficients des réduites de la deuxième et de la troisième catégorie.*

Je remarque d'abord que les cinq inégalités

$$C < 3\lambda, \quad A_1 < \lambda\sqrt{2}, \quad B_{12} < \lambda\sqrt{\frac{27}{8}}, \quad B_{13} < \lambda\sqrt{\frac{8}{3}}, \quad B_{21} < \lambda\sqrt{\frac{27}{4}}$$

subsistent toujours; de plus, nous devons remarquer que, le discriminant

n'étant pas nul, tandis que A_1 et B_{12} sont nuls, on doit avoir

$$B_{13} > 0,$$

d'où

$$B_{13} \geq 1$$

en valeur absolue.

On peut donc se servir des inégalités

$$\begin{aligned} B_{13} A_2 &= b_{13} a_2 \mu_1 \mu_3^{\frac{1}{2}} \mu_3^{\frac{6}{2}} < b_{13} a_2 \sqrt{\frac{4}{3}}, & \text{d'où } B_{13} A_2 < \frac{32}{3} \lambda^2 \sqrt{3}, \\ B_{13} B_{23} &= b_{13} b_{23} \mu_1 \mu_2 \mu_3 = b_{13} b_{23}, & \text{d'où } B_{13} B_{23} < 9 \lambda^2, \end{aligned}$$

d'où

$$A_2 < \frac{32}{3} \lambda^2 \sqrt{3}, \quad B_{23} < 9 \lambda^2.$$

Il reste à limiter B_{31} , B_{32} et A_3 .

Première méthode.

La première méthode consisterait à limiter les coefficients du hessien, puis à exprimer les coefficients de la forme elle-même en fonctions de ceux du hessien, d'après les formules données par M. Aronhold dans le tome 39 du *Journal de Crelle*; comme cette méthode ne s'appliquerait pas aux formes de la deuxième famille, nous ne la développerons pas.

Deuxième méthode.

Soient B'_{31} , B'_{32} , A'_3 les coefficients de $\xi_3^2 \xi_1$, $\xi_3^2 \xi_2$, ξ_3^3 dans le hessien de la réduite considérée.

ΔHT étant une réduite de la première catégorie, par rapport à laquelle Λ joue le même rôle que λ par rapport à HT , on aura les inégalités

$$(34) \quad \begin{cases} B'_{31} < 4 \sqrt{3} \Lambda^2. \\ B'_{32} < 9 \Lambda^2. \\ A'_3 < 12 \sqrt{3} \Lambda^3. \end{cases}$$

De même $(\Delta H + H)T$ étant une réduite de la première catégorie par

rapport à laquelle $\Lambda + \lambda$, joue le même rôle que λ par rapport à HT ; on aura

$$(35) \quad \begin{cases} B'_{31} + B_{31} < 4\sqrt{3}(\Lambda + \lambda)^2, \\ B'_{32} + B_{32} < 9(\Lambda + \lambda)^2, \\ A'_3 + A_3 < 12\sqrt{3}(\Lambda + \lambda)^3. \end{cases}$$

Des inégalités (34) et (35), on déduit enfin

$$\begin{aligned} B_{31} &< 4\sqrt{3}[(\Lambda + \lambda)^2 + \Lambda^2], \\ B_{32} &< 9[(\Lambda + \lambda)^2 + \Lambda^2], \\ A_3 &< 12\sqrt{3}[(\Lambda + \lambda)^3 + \Lambda^3]. \end{aligned}$$

XI. — FORMES DE LA TROISIÈME FAMILLE.

Soit maintenant

$$6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3) = H,$$

qui est l'une des deux canoniques des formes de la troisième famille.

On démontrerait, comme dans le cas de la première et de la deuxième famille, que les formes dérivées de cette canonique n'ont, en général, qu'une seule réduite, et toutes les remarques que nous avons faites à ce sujet trouveraient leur application.

Voyons maintenant à appliquer le théorème de M. Jordan à ces sortes de formes.

Cette fois, le point double de la courbe $H = 0$ étant aussi un point double de la courbe $\Delta H = 0$, il y a des réduites dérivées de H qui ne sont pas de la première catégorie et qui ne sont non plus, ni de la deuxième, ni de la troisième, ni de la quatrième catégorie par rapport à ΔH .

Les réduites de H se divisent donc en trois sortes :

1° Celles pour lesquelles on n'a pas, à la fois,

$$A_1 = B_{12} = 0,$$

et qui sont de la première catégorie ;

2° Celles pour lesquelles on a, à la fois,

$$A_1 = B_{12} = 0, \quad B_{13} \leq 0,$$

et qui sont de la deuxième catégorie par rapport à ΔH ;

3° Enfin celles pour lesquelles on a, à la fois,

$$A_1 = B_{12} = B_{13} = 0,$$

et qui demanderont une étude spéciale.

En ce qui concerne les réduites des deux premières sortes, on trouverait, par un calcul *absolument identique* à celui que nous avons fait pour les formes de la première et de la deuxième famille, les limites des coefficients, et on retomberait sur les mêmes inégalités à la condition d'appeler λ , non plus la somme de la valeur absolue de 6α et de celle de 3β , mais la somme de la valeur absolue de 6α et de celle de 2β et d'appeler Λ la quantité qui joue, par rapport à ΔH , le même rôle que λ par rapport à H .

Il resterait à trouver les limites des coefficients de la réduite de la troisième sorte

$$\begin{aligned} \Phi = & A_2 x_2^3 + A_3 x_3^3 + 3B_{23} x_2^2 x_3 + 3B_{32} x_3 x_2^2 \\ & + 3x_1 (B_{21} x_2^2 + 2C x_2 x_3 + B_{31} x_3^2); \end{aligned}$$

mais cela est impossible, comme on va le voir aisément.

Faisons, en effet, dans $H = 6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3)$,

$$\begin{aligned} z &= \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3, \\ x &= \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3, \\ y &= \beta_3 x_3 + \gamma_3 x_3. \end{aligned}$$

Pour que la substituti on

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

soit réduite, il faut et il suffit que

$$\begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

soit réduite; que

$$\beta_1 < \frac{1}{2}\alpha_1, \quad \gamma_1 < \frac{1}{2}\alpha_1$$

et que α_1^2 soit le minimum de la forme

$$(\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3)^2 + (\beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3)^2 + (\beta_3 x_2 + \gamma_3 x_3)^2.$$

Supposons que ces conditions soient remplies, et que HT, qui est une réduite, ait ses coefficients entiers; alors il est clair que la substitution

$$T_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda^2} \alpha_1 & \frac{1}{\lambda^2} \beta_1 & \frac{1}{\lambda^2} \gamma_1 \\ 0 & \lambda \beta_2 & \lambda \gamma_2 \\ 0 & \lambda \beta_3 & \lambda \gamma_3 \end{vmatrix},$$

où λ est un nombre entier positif, sera également réduite, et que HT₁ sera une réduite à coefficients entiers.

Si donc on peut trouver une réduite à coefficients entiers de la troisième sorte dérivée de H, on en peut trouver une infinité.

Or je dis qu'on peut toujours en trouver une, pourvu que α^2 soit un nombre entier.

Si, en effet, α^2 est un nombre entier, on peut trouver une infinité de formes Θ à coefficients entiers, algébriquement équivalentes à la forme binaire

$$2\alpha xy \doteq \theta.$$

Parmi les substitutions linéaires en nombre infini qui permettent de passer de θ à Θ , nous pouvons toujours en choisir une

$$x = \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2,$$

$$y = \mu_1 \xi_1 + \mu_2 \xi_2,$$

où

$$\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 1.$$

telle que

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}(h_1 + k_1 \alpha), \quad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}(h_2 + k_2 \alpha);$$

$$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}(h_1 - k_1 \alpha), \quad \mu_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}(h_2 - k_2 \alpha),$$

h_1, h_2, k_1, k_2 étant commensurables et a étant une quantité convenablement choisie.

Les formes Θ se répartissent en un nombre fini de classes; soit

$$S = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix};$$

les formes à coefficients entiers

$$(2\alpha xy)S$$

seront équivalentes à un nombre fini de réduites

$$(2\alpha xy)S.T$$

(T étant une substitution entière unitaire) dont les coefficients seront entiers et où $S.T$ sera une transformation réduite.

La forme

$$(x^3 + y^3)S$$

et, par conséquent aussi, la forme

$$(x^3 + y^3)S.T$$

auront leurs coefficients commensurables avec $\frac{1}{a\sqrt{a}}$. Par conséquent, on pourra toujours trouver un nombre λ incommensurable tel que la forme

$$(\lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3)S.T$$

ait ses coefficients entiers.

Soit alors

$$S.T = \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix};$$

soit μ un nombre quelconque; soit Σ la substitution

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\lambda^2 \mu^2} (x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_3 x_3), \\ x &= \lambda \mu \nu (A_2 x_2 + A_3 x_3), \\ y &= \lambda \frac{\mu}{\nu} (B_2 x_2 + B_3 x_3), \end{aligned}$$

Σ sera une transformation réduite, pourvu que $\frac{1}{\lambda^2 \mu^2}$ soit assez petit et que ε_2 et ε_3 soient plus petits que $\frac{1}{2}$ en valeur absolue et ν convenablement choisi.

Nous dirons que deux substitutions Σ appartiennent au même genre quand elles ne diffèrent que par les valeurs attribuées à μ et à ν .

Il est clair que si $\beta \mu^3$ est entier, si, de plus,

$$\nu = 1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0,$$

la forme

$$H. \Sigma$$

aura ses coefficients entiers; car

$$H. \Sigma = (6 \alpha x y z) \Sigma + (\beta x^3 + \beta y^3) \Sigma$$

ou

$$H. \Sigma = 3x, [(2 \alpha x y) S. T] + \beta \mu^3 [(\lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3) S. T].$$

Par conséquent, il existe toujours des réduites de la troisième sorte, dérivées de H et à coefficients entiers.

En donnant à $\beta \mu^3$ toutes les valeurs entières possibles, on obtiendrait toutes les réduites de la troisième sorte, pour lesquelles $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$.

Lorsque ε_2 et ε_3 ne sont pas nuls, il faut, pour que $H \Sigma$ ait ses coefficients entiers, que la forme binaire

$$3(\varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_3 x_3) [(2 \alpha x y) S. T] + \beta \mu^3 [(\lambda^3 \nu^3 x^3 + \frac{\lambda^3}{\nu^3} y^3) S. T]$$

ait également ses coefficients entiers.

Or les coefficients de cette forme binaire s'écrivent

$$\varepsilon_2 A_i + \varepsilon_3 B_i + \beta \mu^3 \nu^3 C_i + \frac{\beta \mu^3}{\nu^3} D_i,$$

A_i, B_i, C_i étant des nombres donnés; donc, pour que tous ces coefficients soient entiers, il faut et il suffit que l'on ait

$$(34) \quad \begin{cases} \varepsilon_2 &= h_1 t_1 + h_2 t_2 + h_3 t_3 + h_4 t_4, \\ \varepsilon_3 &= k_1 t_1 + k_2 t_2 + k_3 t_3 + k_4 t_4, \\ \beta \mu^3 \nu^3 &= l_1 t_1 + l_2 t_2 + l_3 t_3 + l_4 t_4, \\ \frac{\beta \mu^3}{\nu^3} &= m_1 t_1 + m_2 t_2 + m_3 t_3 + m_4 t_4, \end{cases}$$

où les h , les k , les l sont des quantités faciles à calculer, et où les t sont des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs.

Si l'on considère $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \beta \mu^3 \nu^3$ et $\frac{\beta \mu^3}{\nu^3}$ comme les coordonnées d'un point, les points qui satisferont aux conditions (34) constitueront un assemblage à la Bravais. Il y aura une infinité de points de cet assemblage satisfaisant aux inégalités

$$-\frac{1}{2} < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} < \varepsilon_3 < \frac{1}{2},$$

qui expriment que la substitution Σ est réduite; mais il n'y en aura qu'un nombre fini qui satisfassent aux inégalités

$$-\frac{1}{2} < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} < \varepsilon_3 < \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} < \beta \mu^3 \nu^3 < \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} < \frac{\beta \mu^3}{\nu^3} < \frac{1}{2},$$

et tous les autres s'en déduiront en faisant varier μ et ν .

Conséquence : *Les substitutions réduites Σ , telles que $H\Sigma$ ait ses coefficients entiers, se répartissent en un nombre fini de genres.*

Donc, en résumé :

1° *Les formes à coefficients entiers dérivées de H forment un nombre infini de classes. Ces classes seront dites de la première, de la deuxième, de la troisième sorte, selon que les réduites correspondantes seront elles-mêmes de la première, de la deuxième et de la troisième sorte;*

2° *Les classes de la première et de la deuxième sorte sont en nombre fini;*

3° Les classes de la troisième sorte sont en nombre infini; mais elles se répartissent en un nombre fini de genres, à la condition de considérer, comme appartenant au même genre, les classes dont les réduites dérivent de H par des substitutions réduites Σ appartenant au même genre.

Nous aurions maintenant à examiner les formes réellement équivalentes à la canonique

$$(7) \quad \beta x^3 + 3\alpha x^2 z + 3\alpha y^2 z + 3\beta xy^2;$$

mais nous nous dispenserons de faire cette étude, qui nous conduirait, par des raisonnements *identiques*, à des résultats *identiques*.

XII. — FORMES DE LA QUATRIÈME FAMILLE.

Considérons les formes à coefficients entiers, réellement équivalentes à

$$H = 3x^2 z + y^3.$$

Si l'une d'elles F dérive de H par la substitution

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3,$$

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3,$$

$$z = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3,$$

que nous appellerons T, il est aisé de voir :

1° Que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont commensurables entre eux; que, de même, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ sont commensurables entre eux, ainsi que $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$;

2° Que la forme F peut également dériver de H par la substitution

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_1 & \lambda\alpha_2 & \lambda\alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \frac{1}{\lambda^2}\gamma_1 & \frac{1}{\lambda^2}\gamma_2 & \frac{1}{\lambda^2}\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Nous pourrions donc écrire la substitution T sous la forme

$$\begin{vmatrix} ha_1 & ha_2 & ha_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ lc_1 & lc_2 & lc_3 \end{vmatrix},$$

où a_1, a_2, a_3 sont des nombres entiers premiers entre eux, de même que b_1, b_2, b_3 et que c_1, c_2, c_3 .

Envisageons maintenant les réduites équivalentes à ces formes.

Les réduites seront de la première sorte si A_1 et B_{12} ne sont pas nuls à la fois, de la deuxième sorte si A_1 et B_{12} sont nuls sans que B_{13} le soit, et enfin de la troisième sorte si

$$A_1 = B_{12} = B_{13} = 0.$$

On verrait, comme dans le cas des formes de la troisième famille, que les réduites de la première et de la deuxième sorte sont en nombre fini, et l'on trouverait les limites de leurs coefficients par un calcul tout à fait identique à celui que nous avons fait plus haut pour les formes de la première ou de la deuxième famille.

Si l'on considère, au contraire, les réduites de la troisième sorte, on voit qu'elles dérivent de H par des substitutions de la forme

$$T = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

ou

$$\begin{vmatrix} 0 & ha_2 & ha_3 \\ 0 & kb_2 & kb_3 \\ lc_1 & lc_2 & lc_3 \end{vmatrix},$$

d'où

$$\begin{aligned} H.T &= 3h^2l(a_2x_2 + a_3x_3)^2(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3) \\ &\quad + k^3(b_2x_2 + b_3x_3)^3. \end{aligned}$$

Un coefficient quelconque de H.T est de la forme

$$h^2 l A_i + k^3 B_i,$$

où A_i et B_i sont des nombres entiers, de sorte que, pour que les coefficients de H.T soient entiers, il faut qu'on ait

$$h^2 l = \delta_1 t_1 + \delta_2 t_2,$$

$$k^3 = \zeta_1 t_1 + \zeta_2 t_2,$$

où $\delta_1, \delta_2, \zeta_1, \zeta_2$ sont des quantités commensurables faciles à déterminer, et où t_1, t_2 sont des entiers quelconques, positifs ou négatifs.

Nous dirons que deux substitutions T appartiennent au même genre quand elles ne diffèrent que par les valeurs de h, k, l et qu'elles ne diffèrent pas par la valeur du rapport $\frac{h}{k}$.

Si une substitution est réduite, toutes les substitutions du même genre sont réduites, pourvu que l soit suffisamment petit.

Soient

$$\begin{vmatrix} 0 & ha_2 & ha_3 \\ 0 & kb_2 & kb_3 \\ lc_1 & lc_2 & lc_3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 0 & h'a_2 & h'a_3 \\ 0 & k'b_2 & k'b_3 \\ l'c_1 & l'c_2 & l'c_3 \end{vmatrix}$$

deux substitutions réduites de même genre; soient

$$h^2 l = \delta_1 t_1 + \delta_2 t_2, \quad h'^2 l' = \delta_1 u_1 + \delta_2 u_2;$$

$$k^3 = \zeta_1 t_1 + \zeta_2 t_2, \quad k'^3 = \zeta_1 u_1 + \zeta_2 u_2.$$

On devra avoir

$$hkl = h'k'l',$$

puisque les déterminants des deux substitutions sont égaux à 1 et

$$\frac{h}{k} = \frac{h'}{k'},$$

d'où

$$h^2 l = h'^2 l' \quad \text{et} \quad \delta_1 t_1 + \delta_2 t_2 = \delta_1 u_1 + \delta_2 u_2,$$

$$\frac{l'}{l} = \frac{h^2}{h'^2} = \frac{k^2}{k'^2};$$

si t_1, t_2, u_1, u_2 sont entiers, on devra avoir

$$t_1 = u_1 + \lambda_1 \tau, \quad t_2 = u_2 + \lambda_2 \tau,$$

τ étant entier, et λ_1 et λ_2 étant des quantités faciles à calculer.

On aura alors

$$k'^3 = k^3 - (\zeta_1 \lambda_1 + \zeta_2 \lambda_2) \tau,$$

d'où

$$\frac{l'}{l} = \sqrt[3]{\frac{k^6}{k'^6}} = \left(1 - \frac{\zeta_1 \lambda_1 + \zeta_2 \lambda_2}{k^3} \tau \right)^{-\frac{2}{3}}.$$

Quand τ tend vers l'infini, l' tend vers zéro; si donc on donne à τ une valeur entière suffisamment grande, T sera une substitution réduite et H.T aura ses coefficients entiers.

Si l'on dit que H.T et H.T₁ sont du même genre toutes les fois que T et T₁ sont du même genre, on voit, d'après ce qui précède, qu'il existe dans un même genre une infinité de réduites.

De plus, les genres eux-mêmes sont en nombre infini.

En effet, pour que la transformation

$$T = \begin{vmatrix} 0 & ha_2 & ha_3 \\ 0 & kb_2 & kb_3 \\ lc_1 & lc_2 & lc_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & ha_2 & ha_3 \\ 0 & h\lambda b_2 & h\lambda b_3 \\ lc_1 & lc_2 & lc_3 \end{vmatrix}$$

soit réduite et que H.T ait ses coefficients entiers, il faut et il suffit :

1° Que h et l soient convenablement choisis;

2° Que $a_2, a_3, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ soient entiers pendant que a_2 et a_3, b_2 et b_3, c_1, c_2 et c_3 sont premiers entre eux;

3° Que la transformation

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ \lambda b_2 & \lambda b_3 \end{vmatrix}$$

soit réduite;

4° Que $\frac{c_2}{c_1}$ et $\frac{c_3}{c_1}$ soient plus petits que $\frac{1}{2}$ en valeur absolue.

Si donc on choisit arbitrairement :

1° Deux entiers premiers entre eux, a_2 et a_3 ;

2° Deux entiers premiers entre eux, b_2 et b_3 ;

3° Trois entiers premiers entre eux, c_1 , c_2 et c_3 ;

4° Une quantité quelconque λ ,

en s'assujettissant seulement aux conditions suivantes :

1° Que $\frac{c_2}{c_1} < \frac{1}{2}$, $\frac{c_3}{c_1} < \frac{1}{2}$;

2° Que la substitution

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ \lambda b_2 & \lambda b_3 \end{vmatrix}$$

soit réduite, on pourra toujours trouver pour h et l des valeurs telles, que HT soit une réduite à coefficients entiers.

Un système de quantités

$$a_2, a_3, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, \lambda,$$

choisies de la sorte, définira donc un genre.

Or ce choix peut se faire d'une infinité de manières.

Donc il y a une infinité de genres.

Distinguons maintenant deux sortes de réduites.

Soit F une forme quelconque algébriquement équivalente à H; F pourra se déduire de H par une infinité de transformations S, de telle sorte que

$$F = H.S,$$

mais une seule de ces transformations (que nous appellerons S_1) a pour déterminant 1.

Soit τ une transformation telle que $S.\tau$ soit une substitution réduite, τ_1 une transformation telle que $S_1.\tau_1$ soit une substitution réduite.

Les réduites $F.\tau$ seront toutes équivalentes à F ; mais $F.\tau_1$ dérivera seule de H par une substitution réduite de déterminant 1.

Les réduites $F.\tau$ s'appelleront alors les *réduites secondaires*, pendant que $F.\tau_1$ sera la *réduite principale*.

Tout ce que nous avons dit jusqu'ici ne s'applique qu'aux réduites principales, de sorte que nous pouvons énoncer à l'égard de ces réduites les résultats suivants :

1° *Il n'y a, en général, dans chaque classe qu'une seule réduite principale;*

2° *Il y a une infinité de classes;*

3° *Les réduites principales se divisent en trois sortes;*

4° *Celles de la première et de la deuxième sorte sont en nombre fini;*

5° *Celles de la troisième sorte se répartissent en une infinité de genres, et chaque genre comprend une infinité de réduites.*

Occupons-nous maintenant des réduites secondaires.

Soit

$$S_1 = \begin{vmatrix} ha_1 & ha_2 & ha_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ lc_1 & lc_2 & lc_3 \end{vmatrix}$$

une substitution à déterminant 1, telles que

$$F = HS_1.$$

Si l'on pose

$$S = \begin{vmatrix} \lambda ha_1 & \lambda ha_2 & \lambda ha_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ \frac{1}{\lambda^2} lc_1 & \frac{1}{\lambda^2} lc_2 & \frac{1}{\lambda^2} lc_3 \end{vmatrix},$$

on aura

$$F = H.S.$$

Si $S.\tau$ est une substitution réduite, $F.\tau$ sera une des réduites secondaires de F .

Les coefficients de τ dépendent des coefficients de S , c'est-à-dire de λ . Donc les coefficients de la réduite $F.\tau$ sont des fonctions de λ .

Quand λ varie de $-\infty$ à $+\infty$, la réduite $F.\tau$ varie d'une manière discontinue, comme M. Hermite l'a fait voir dans son *Mémoire Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres*. On passe brusquement d'une réduite à une réduite contiguë.

Comme nous n'avons ici qu'une seule indéterminée λ , les réduites de F pourront être écrites à la suite l'une de l'autre sur une même ligne, de telle sorte que chacune d'elles soit contiguë à celle qui la précède et à celle qui la suit. Elles formeront donc une *chaîne* comme les réduites des formes quadratiques binaires indéfinies, et non un *réseau* comme les réduites des formes quadratiques ternaires indéfinies.

Je dis qu'il n'y a dans chaque classe qu'un nombre fini de réduites secondaires.

En effet, si l'on fait d'abord varier λ entre des limites finies, positives et différentes de 0, on ne trouve évidemment qu'un nombre fini de réduites.

Supposons maintenant λ très grand et proposons-nous de trouver la substitution τ , telle que $S.\tau$ soit réduite.

C'est chercher une substitution τ telle que la forme quadratique

$$\left[(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2\lambda^2h^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2k^2 + (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3)^2\frac{1}{\lambda^4}l^2 \right] \tau$$

soit réduite. Proposons-nous donc de réduire

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2\lambda^2h^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2k^2 \\ + (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3)^2\frac{1}{\lambda^4}l^2. \end{array} \right.$$

Les trois entiers a_1, a_2, a_3 étant premiers entre eux, il existe toujours

neuf nombres entiers satisfaisant aux conditions suivantes :

$$a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 = 1,$$

$$a_1 = \beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2,$$

$$a_2 = \beta_3 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_3,$$

$$a_3 = \beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1.$$

Alors la substitution

$$x_1 = \alpha_1 X_3 + \beta_1 Y_1 + \gamma_1 Y_2,$$

$$x_2 = \alpha_2 X_3 + \beta_2 Y_1 + \gamma_2 Y_2,$$

$$x_3 = \alpha_3 X_3 + \beta_3 Y_1 + \gamma_3 Y_2$$

donnera des relations de la forme

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = X_3,$$

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = \lambda_1 (d_1 Y_1 + d_2 Y_2 + d^3 X_3),$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = \lambda_2 (e_1 Y_1 + e_2 Y_2 + e_3 X_3),$$

où d_1 et d_2 , e_1 et e_2 sont des nombres entiers premiers entre eux et où d_3 et e_3 peuvent toujours être supposés plus petits que $\frac{1}{2}$ en valeur absolue.

Soient maintenant δ_1 et δ_2 deux nombres entiers, tels que

$$d_1 \delta_1 + d_2 \delta_2 = 1,$$

la substitution

$$Y_1 = -d_2 X_1 + \delta_1 X_2$$

$$Y_2 = d_1 X_1 + \delta_2 X_2$$

donne des relations de la forme

$$d_1 Y_1 + d_2 Y_2 = X_2,$$

$$e_1 Y_1 + e_2 Y_2 = \mu (X_1 + f X_2),$$

où l'on peut toujours supposer que f est plus petit que $\frac{1}{2}$ en valeur absolue.

La transformation

$$\tau = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -d_2 & \delta_1 & 0 \\ d_1 & \delta_2 & 0 \end{vmatrix}$$

est évidemment entière et de déterminant 1. De plus, on a

$$\begin{aligned} & \left[(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2 h^2 \lambda^2 + (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)^2 k^2 \right. \\ & \quad \left. + (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3)^2 l^2 \frac{1}{\lambda^4} \right] \tau \\ & = h^2 \lambda^2 X_3^2 + k^2 \lambda_1^2 (X_2 + d_3 X_3)^2 + l^2 \frac{1}{\lambda^4} \lambda_2^2 \mu^2 (X_1 + f X_2 + \frac{e_3}{\mu} X_3)^2, \end{aligned}$$

et cette forme quadratique est réduite pourvu que

$$k^2 \lambda_1^2 < h^2 \lambda^2, \quad l^2 \lambda_2^2 \mu^2 \frac{1}{\lambda^4} < k^2 \lambda_1^2$$

ou

$$\lambda > \frac{k \lambda_1}{h}, \quad \lambda > \sqrt{\frac{l \lambda_2 \mu}{k \lambda_1}}.$$

Donc, toutes les fois que λ sera plus grand qu'une certaine quantité A, F. τ ne dépendra plus de λ .

De même, toutes les fois que l'on aura

$$0 < \lambda < B,$$

B étant une quantité positive suffisamment petite, F. τ ne dépendra plus de λ .

Enfin τ ne change pas quand on change λ en $-\lambda$, de sorte qu'il suffit de faire varier λ de 0 à $+\infty$.

λ variant de 0 à B, on a une seule réduite.

λ variant de B à A, on a un nombre fini de réduites.

λ variant de A à $+\infty$, on a une seule réduite.

On n'a donc dans chaque classe qu'un nombre fini de réduites, de la même façon que dans chaque classe des formes quadratiques binaires indéfinies ; mais, grâce à une particularité digne de remarque, les deux cas sont très différents.

Les réduites d'une forme quadratique binaire indéfinie peuvent s'écrire sur un même ligne à la suite l'une de l'autre ; mais cette ligne est indéfinie dans les deux sens, de sorte que chaque réduite s'y reproduit périodiquement une infinité de fois.

Les réduites d'une forme de la quatrième famille, au contraire, forment une *série limitée dans les deux sens*, de sorte qu'on finit par arriver à deux réduites extrêmes, qui sont celles qui correspondent à

$$\lambda > A \quad \text{et} \quad \lambda < B.$$

Par conséquent, les formes de la quatrième famille ne peuvent être reproduites par une transformation semblable arithmétique, c'est-à-dire par une transformation à coefficients entiers et de déterminant 1, ce qu'il était aisé de prévoir.

Voyons maintenant comment les considérations qui précèdent permettront de traiter les questions relatives à l'équivalence des formes de la quatrième famille.

Si l'on se propose seulement de savoir si deux formes données sont équivalentes, c'est-à-dire dérivent l'une de l'autre par une transformation entière de déterminant 1, la considération des réduites principales sera suffisante, et même, à la rigueur, on pourra s'en passer ; car, une forme ne pouvant dériver d'une autre par une transformation de déterminant 1 que d'une seule manière, la question peut se traiter par des procédés purement algébriques.

Mais un problème plus général peut se poser :

Deux formes étant données, déterminer si l'une d'elles est équivalente à l'autre, multipliée par une constante convenable.

La considération des réduites secondaires devient alors nécessaire.

En effet, pour qu'une pareille équivalence ait lieu, il faut et il suffit

que le système des réduites de l'une des formes soit, à un facteur constant près, identique au système des réduites de l'autre forme.

Il est clair que, pour constater cette identité, il suffit de comparer deux réduites de même rang dans chacune des séries et, par exemple, de comparer les réduites extrêmes qu'il est aisé de former.

De là la règle suivante :

Pour savoir si F est équivalent à F', à un facteur constant près, on forme la réduite de F et celle de F' qui correspondent à λ infini et l'on examine si ces deux formes ne diffèrent que par un facteur constant.

XIII. — FORMES DE LA CINQUIÈME FAMILLE.

Soit la canonique

$$6xyz + z^3 = H,$$

qui est reproductible par la substitution

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{vmatrix}.$$

Signalons d'abord une différence importante entre le cas actuel et le cas précédent. La canonique n'est reproductible que par des substitutions de déterminant 1. Donc une forme ne peut dériver à la fois de la canonique par des transformations de déterminant 1 et par des transformations de déterminant différent. Donc la distinction que nous avons faite pour la quatrième famille, entre les réduites secondaires et les réduites principales, n'a plus ici de raison d'être.

On voit immédiatement, comme pour la troisième famille, que les réduites sont en nombre infini, qu'elles se divisent en trois sortes, que celles de la première et de la deuxième sorte sont en nombre fini.

Envisageons maintenant les réduites de la troisième sorte et leur distribution en genres.

Soit

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

une transformation réduite qui transforme la canonique en une réduite de la troisième sorte, à coefficients entiers.

Pour que T soit réduite, il faut encore ici :

1° Que

$$S = \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

soit réduite ;

2° Que

$$\alpha_2 < \frac{1}{2}\alpha_1, \quad \alpha_3 < \frac{1}{2}\alpha_1 ;$$

3° Que α_1^2 soit assez petit.

La forme

$$(6\alpha x y z + z^3)T$$

peut s'écrire

$$3\alpha_1 x_1 [(2\alpha y z)S] + (3\alpha_2 x_2 + 3\alpha_3 x_3) [(2\alpha y z)S] + (\gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3)^3 = 0,$$

ou bien, si

$$S_1 = \begin{vmatrix} \beta_2 \sqrt{\alpha_1} & \beta_3 \sqrt{\alpha_1} \\ \gamma_2 \sqrt{\alpha_1} & \gamma_3 \sqrt{\alpha_1} \end{vmatrix},$$

substitution dont le déterminant est 1, nous l'écrivons

$$F_1 + F_2 + F_3,$$

en posant

$$F_1 = 3x_1 [(2\alpha y z)S_1],$$

$$F_2 = \left(3x_2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + 3x_3 \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) [(2\alpha y z)S_1]$$

et

$$F_3 = (\gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3)^3.$$

S_1 ayant pour déterminant 1, la forme $\frac{F_1}{3x_1}$ devra être une forme réduite quadratique binaire indéfinie, dont les coefficients seront entiers. Donc ces coefficients seront limités, et si l'on considère maintenant la substitution S_1 elle-même, on reconnaîtra que l'on pourra toujours poser

$$\beta_2 \sqrt{\alpha_1} = b_2, \quad \beta_3 \sqrt{\alpha_1} = b_3, \quad \gamma_2 \sqrt{\alpha_1} = c_2, \quad \gamma_3 \sqrt{\alpha_1} = c_3$$

ou

$$b_2 c_3 - b_3 c_2 = 1,$$

où les rapports $\frac{b_2}{b_3}$ et $\frac{c_2}{c_3}$ ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs.

Comme $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ et $\frac{\alpha_3}{\alpha_1}$ sont limités, les coefficients de F_2 seront également limités.

La forme binaire $F_2 + F_3$ devra avoir ses coefficients entiers. Or ces coefficients s'écrivent

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} A_i + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} B_i + \frac{1}{\alpha_1 \sqrt{\alpha_1}} C_i = D_i,$$

A_i , B_i et C_i étant des quantités données; A_i et B_i sont entiers, puisque ce sont des coefficients de la forme $\frac{F_1}{3x_1}$; quant aux C_i , ils se réduisent respectivement à

$$c_2^3, \quad c_2^2 c_3, \quad c_2 c_3^2, \quad c_3^3.$$

Or je dis que c_2 et c_3 doivent être commensurables entre eux; en effet,

$$\Delta H = 12\alpha^3 xyz - 6\alpha^2 z^3, \quad \Delta H - 2\alpha^2 H = -8\alpha^2 z^3,$$

d'où il suit que la forme

$$(\Delta H - 2\alpha^2 H)T = -8\alpha^2 (\gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3)^3$$

doit avoir ses coefficients entiers, et, par conséquent, que $\frac{\gamma_2}{\gamma_3} = \frac{c_2}{c_3}$ (racines d'une équation du troisième ordre, ayant toutes ses racines égales et tous ses coefficients entiers) est commensurable. Donc c_2 et c_3 sont commensurables entre eux. Or on a

$$(2\alpha xy)S_1 = \frac{F_1}{3x_1} = Ax_2^2 + 2Bx_2x_3 + Cx_3^2,$$

où A, B, C sont entiers; or cette forme peut s'écrire

$$A\left(x_2 + \frac{c_3}{c_2}x_3\right)\left(x_2 + \frac{b_3}{b_2}x_3\right).$$

Donc

$$\frac{b_3}{b_2} = +\frac{2B}{A} - \frac{c_3}{c_2} = \text{un nombre commensurable.}$$

Or le discriminant de cette forme binaire quadratique est égal d'une part à α^2 , d'autre part à $A^2\left(\frac{b_3}{b_2} - \frac{c_3}{c_2}\right)^2$.

On a donc

$$\alpha = \pm A\left(\frac{b_3}{b_2} - \frac{c_3}{c_2}\right) = \text{un nombre commensurable.}$$

Conséquence. — Si $4S$ n'est pas puissance quatrième parfaite, il ne peut y avoir de réduite de la troisième sorte.

Prenons maintenant la canonique

$$H = 3\alpha x^2z + 3\alpha y^2z + z^3;$$

on ferait voir, tout à fait de la même manière :

1° Que les réduites de la première et de la deuxième sorte sont en nombre fini;

2° Que l'on ne peut avoir de réduite de la troisième sorte, *réellement* équivalentes à H, car ici les points doubles de la courbe $H = 0$ sont *imaginaires*.

Comme conséquence, on arrivera au résultat suivant :

Si les points doubles de $H = 0$ sont imaginaires ou si $4S$ n'est pas puissance quatrième parfaite, on n'a que des réduites de la première et de la deuxième sorte : on n'a donc qu'un nombre fini de réduites ; ces réduites se répartissent en un nombre fini de classes, et il n'y en a qu'un nombre fini dans chaque classe ; les réduites d'une même classe peuvent se disposer en une chaîne de telle façon que chacune d'elles soit contiguë à celle qui la précède et à celle qui la suit, et, en suivant cette chaîne, on verrait les différentes réduites se reproduire périodiquement.

Si les points doubles de $H = 0$ sont réels et que $4S$ soit puissance quatrième parfaite, nous diviserons les classes dérivées de H en deux catégories :

La première catégorie comprendra les formes qui dérivent de H par une substitution

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, de même que $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ et que $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont commensurables entre eux.

La deuxième catégorie comprendra les formes qui ne satisferont pas à cette condition :

Les classes de la deuxième catégorie sont en nombre fini, et tout ce que nous avons dit des cas où $4S$ n'est pas puissance quatrième parfaite s'applique à ces classes. Par conséquent, dans chaque classe, les réduites se disposent en une chaîne INFINIE, où on les voit se reproduire périodiquement.

Les classes de la première sont en nombre infini et tout ce que nous avons dit de la quatrième famille s'applique à ces classes. Par conséquent, dans chaque classe, les réduites se disposent en une chaîne limitée

présentant deux réduites extrêmes. La seule différence, c'est qu'ici il n'y a aucune distinction à faire entre les réduites principales et les réduites secondaires.

XIV. — FORMES DE LA SIXIÈME FAMILLE.

Soit la canonique

$$H = 3y^2z + 3x^2y.$$

1° Nous aurons encore ici des réduites principales et des réduites secondaires, car la canonique H est susceptible d'être reproduite, soit par des substitutions de déterminant 1, soit par des substitutions de déterminant différent de 1.

2° L'expression des substitutions qui reproduisent B contient plusieurs paramètres arbitraires; par conséquent, il peut y avoir dans chaque classe plusieurs réduites, et ces réduites forment non plus une *chaîne*, mais un *réseau*, de telle sorte que chaque réduite est contiguë à *toutes* celles qui l'avoisinent dans le réseau.

3° On verrait aisément que l'on ne peut avoir qu'un nombre fini de réduites principales de la première et de la deuxième sorte, tandis que l'on peut avoir un nombre infini de réduites secondaires de la première et de la deuxième sorte.

4° Étudions maintenant les réduites de la troisième sorte; ce sont celles que l'on peut déduire de H par une substitution de la forme

$$T = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix};$$

on verrait aisément que β_2 et β_3 doivent être commensurables entre eux; posons

$$\beta_2 = \lambda b_2, \quad \beta_3 = \lambda b_3,$$

b_2 et b_3 étant deux nombres entiers, premiers entre eux.

Considérons comme étant du même genre deux substitutions réduites

$$T = \begin{vmatrix} 0 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ 0 & \lambda b_2 & \lambda b_3 \\ \frac{1}{\lambda^2} c_1 & \frac{1}{\lambda^2} c_2 & \frac{1}{\lambda^2} c_3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 0 & \lambda_1 a_2 & \lambda_1 a_3 \\ 0 & \lambda_1 b_2 & \lambda_1 b_3 \\ \frac{1}{\lambda_1^2} c_1 & \frac{1}{\lambda_1^2} c_2 & \frac{1}{\lambda_1^2} c_3 \end{vmatrix} = T_1,$$

ne différant que par les valeurs de λ et λ_1 .

Considérons comme étant du même genre deux réduites dérivées de H par des substitutions du même genre. On voit alors :

1° Que le nombre des genres est infini.

En effet, supposons que b_2, b_3, a_2, a_3 soient quatre nombres entiers, tels que la transformation

$$\begin{vmatrix} \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ \lambda b_2 & \lambda b_3 \end{vmatrix}$$

soit réduite.

Cela peut se faire d'une infinité de manières.

La forme HT s'écrit alors

$$3c_1 x_1 (b_2 x_2 + b_3 x_3)^2 + 3(c_2 x_2 + c_3 x_3)(b_2 x_2 + b_3 x_3)^2 \\ + 3\lambda^3 (a_2 x_2 + a_3 x_3)^2 (b_2 x_2 + b_3 x_3).$$

Supposons que c_1 soit un nombre entier; la forme

$$3c_1 x_1 (b_2 x_2 + b_3 x_3)^2 \\ = 3Ax_1 x_2^2 + 6Bx_1 x_2 x_3 + 3Cx_1 x_3^2$$

sera à coefficients entiers.

La forme

$$3(c_2 x_2 + c_3 x_3)(b_2 x_2 + b_3 x_3)^2 \\ + 3\lambda^3 (a_2 x_2 + a_3 x_3)^2 (b_2 x_2 + b_3 x_3)$$

devra être à coefficients entiers; c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} 3 \frac{c_2}{c_1} A + 3 \lambda^3 a_2^2 b_2, \\ \frac{c_2}{c_1} B + \frac{c_3}{c_1} A + \lambda^3 (a_2^2 b_3 + 2 a_2 a_3 b_2), \\ \frac{c_2}{c_1} C + \frac{c_3}{c_1} B + \lambda^3 (2 a_2 a_3 b_3 + a_3^2 b_2), \\ 3 \frac{c_3}{c_1} C + 3 \lambda^3 a_3^2 b_3 \end{aligned}$$

devront être entiers. Or, si l'on considère $\frac{c_2}{c_1}$, $\frac{c_3}{c_1}$ et λ^3 comme les coordonnées d'un point dans l'espace, cela veut dire que ce point est sur l'un des sommets d'un assemblage à la Bravais.

Pour que la substitution T soit réduite, il faut et il suffit que λ^3 soit suffisamment grand et que $\frac{c_2}{c_1}$ et $\frac{c_3}{c_1}$ soient plus petits que $\frac{1}{2}$ en valeur absolue. Or il y a toujours un nombre infini de sommets d'un assemblage à la Bravais qui satisfont à cette condition. Donc il y a toujours, dans chaque genre, quels que soient a_2 , a_3 , b_2 , b_3 , une infinité de réduites, et il est clair qu'on a une infinité de genres.

Dans le cas qui nous occupe, je ne vois aucune raison pour que dans chaque classe les réduites soient en nombre fini.

Donc la méthode générale pour reconnaître l'équivalence de deux formes devient illusoire. Mais ici une méthode spéciale peut permettre d'arriver plus rapidement au résultat.

En effet, soit deux formes F et F₁ de la sixième famille; je suppose que l'on se propose de reconnaître si F est équivalent à αF_1 , α étant une constante.

Soit

$$\begin{aligned} F &= HT, \\ F_1 &= HT_1, \end{aligned}$$

$\alpha F_1 = F\tau$, où τ est unitaire et à coefficients entiers.

Si l'on prend les hessiens, on trouve

$$\begin{aligned}\Delta F &= (-6\gamma^3)T, \\ \Delta F_1 &= (-6\gamma^3)T_1, \\ \Delta(\alpha F_1) &= \alpha^3 \Delta F_1 = (\Delta F)\tau;\end{aligned}$$

on en tire

$$\alpha \sqrt[3]{\Delta F_1} = (\sqrt[3]{\Delta F})\tau.$$

Soit

$$\frac{F}{\sqrt[3]{\Delta F}} = S, \quad \frac{F_1}{\sqrt[3]{\Delta F_1}} = S_1,$$

S et S_1 seront des formes quadratiques, car elles seront, à un facteur constant près,

$$(\gamma z + x^2)T \quad \text{et} \quad (\gamma z + x^2)T_1.$$

On aura alors

$$S_1 = (\alpha S)\tau.$$

Il faudra donc rechercher si S_1 est équivalent à S à un facteur constant près et, dans le cas où l'on aurait constaté cette équivalence, reconnaître si la même substitution qui change αS en S_1 change $\sqrt[3]{\Delta F}$ en $\alpha \sqrt[3]{\Delta F_1}$. Quant à la valeur que doit avoir α , on la déduit aisément des déterminants de S et de S_1 .

Nous n'avons rien à ajouter au sujet des formes de la septième famille, qui ont été étudiées par M. Hermite.

XV. — RÉSUMÉ.

Première et deuxième familles.

Un nombre fini de réduites; un nombre fini de classes.
Une seule réduite en général dans chaque classe.

Troisième famille.

Les classes se partagent en trois sortes :
Chaque classe ne contient en général qu'une seule réduite.

Le Cahier.

Les réduites se partagent en deux catégories :

Celles de la première et de la deuxième sorte sont en nombre fini.

Celles de la troisième sorte se répartissent en un nombre fini de genres.

Chaque genre contient un nombre infini de classes.

Quatrième famille.

Réduites principales se divisant en trois sortes.		Réduites secondaires se divisant en trois sortes.	
Celles de la première et de la deuxième sorte sont en nombre fini.	Celles de la troisième sorte se répartissent en un nombre infini de genres.	Celles de la première et de la deuxième sorte sont en nombre infini.	Celles de la troisième sorte sont également en nombre infini.
Chaque genre comprend un nombre infini de réduites.		Il y a un nombre infini de classes. Chaque classe contient une seule réduite principale et un nombre fini de réduites secondaires. Ces réduites secondaires se disposent en une chaîne limitée; chacune d'elles étant contiguë à celle qui la précède et à celle qui la suit, sauf la dernière réduite, qui n'est contiguë qu'à celle qui la précède, et la première, qui n'est contiguë qu'à celle qui la suit.	

Cinquième famille.

PREMIER CAS. — Les points doubles sont imaginaires.	Un nombre fini de classes.
DEUXIÈME CAS. — Les points doubles sont réels. $4S$ n'est pas puissance 4^e parfaite.	Chaque classe contient un nombre fini de réduites qui forment une chaîne indéfinie où elles se reproduisent périodiquement, ainsi qu'il arrive dans le cas des formes quadratiques binaires indéfinies.
TROISIÈME CAS. — Les points doubles sont réels, et $4S$ est puissance 4^e parfaite.	Un nombre fini de genres se répartissant en un nombre infini de classes.
Les classes se partagent en deux catégories. { Classes de la première catégorie. Classes de la deuxième catégorie.	Chaque classe contient un nombre fini de réduites formant une chaîne limitée, ainsi qu'il arrive pour la quatrième famille.

Sixième famille.

Les réduites se partagent en :

Réduites principales se divisant en trois sortes.		Réduites secondaires se divisant en trois sortes.	
Celles de la première et de la deuxième sorte sont en nombre fini.	Celles de la troisième sorte se répartissent en un nombre infini de genres, et chaque genre en contient un nombre infini.	Celles de la première et de la deuxième sorte sont en nombre infini.	Celles de la troisième sorte se répartissent en un nombre infini de genres, et chaque genre en contient un nombre infini.

Il y a une infinité de classes. Chaque classe comprend une infinité de réduites principales disposées en une chaîne indéfinie, comme dans le cas des formes quadratiques binaires (sauf la reproduction périodique), et une infinité de réduites secondaires disposées en un réseau, comme dans le cas des formes quadratiques ternaires indéfinies.

Les mêmes principes peuvent s'appliquer à toutes les formes, et en particulier aux formes cubiques quaternaires ; mais la variété extrême des cas que je serais obligé de considérer si je voulais aborder l'étude complète de semblables formes m'empêche d'en faire l'application. Faisons toutefois une remarque importante. Quelle est la cause principale des différences que nous avons observées dans les propriétés des diverses familles de formes ? C'est que les unes sont et les autres ne sont pas reproductibles par certaines transformations. On voit donc quel rôle important joue, dans l'étude des propriétés arithmétiques des formes, cette considération purement algébrique de leur reproductibilité par des substitutions linéaires. C'est pourquoi j'ai voulu, dans le commencement de ce travail, étudier complètement les groupes de transformations susceptibles de reproduire une forme cubique quaternaire donnée, parce que la résolution de ce problème doit servir de point de départ au géomètre qui veut étudier ces formes au point de vue arithmétique.
