représentée directement par (5). L'autre partie, savoir

$$\frac{\partial \psi_h}{\partial y_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_h},$$

à cause de (1), c'est-à-dire de

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_h} = \frac{\partial \psi_k}{\partial y_h},$$

rentre dans ce même groupe.

» Le retour à la fonction V, par des quadratures, en partant de (3) ou de (4), donne lieu à un grand nombre de singularités que je n'ai pas encore approfondies. Il en est de même pour ce qui concerne les intégrales multiples des fonctions de variables imaginaires. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions de deux variables.* Note de M. **H. Poincaré**, présentée par M. Hermite.

« On sait que M. Weierstrass a démontré le théorème suivant :

» *Si* $F(x)$ *est une fonction méromorphe dans toute l'étendue du plan, on peut la mettre sous la forme du quotient de deux fonctions entières.*

» Le théorème analogue pour les fonctions de deux variables n'est pas encore démontré. Je crois en avoir trouvé une démonstration rigoureuse, dont j'exposerai ici la marche générale si l'Académie veut bien le permettre.

» Je considère une fonction $F(X, Y)$ de deux variables imaginaires

$$X = x + iy, \quad Y = z + it,$$

et je suppose que, dans le voisinage d'un point quelconque, cette fonction puisse se mettre sous la forme $\frac{N}{D}$, N et D étant deux fonctions holomorphes.

» La partie réelle u d'une fonction quelconque de X et de Y satisfait aux équations

$$\Delta u = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d^2u}{dt^2} = 0,$$

$$\Delta_1 u = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0, \quad \Delta_2 u = \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d^2u}{dt^2} = 0,$$

$$\Delta_3 u = \frac{d^2u}{dy\,dz} - \frac{d^2u}{dx\,dt} = 0, \quad \Delta_4 u = \frac{d^2u}{dx\,dz} + \frac{d^2u}{dy\,dt} = 0.$$

» J'appellerai fonction *potentielle* toute fonction qui satisfait à l'équation $\Delta u = 0$, et je dirai que cette fonction est entière si elle est holomorphe pour toutes les valeurs finies de x, y, z, t.

» L'ensemble des points x, y, z, t qui satisfont à l'inégalité

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+(t-t_0)^2<r^2$$

formera une région que j'appellerai *hypersphérique*, à cause de la ressemblance entre l'inégalité précédente et celle qui exprime qu'un point est intérieur à une sphère.

» 1° Cela posé, je construis une infinité de régions hypersphériques R_1^0, R_2^0, ... Je suppose qu'un point quelconque (x, y, z, t) appartient au moins à une et au plus à cinq de ces régions. Je suppose que ces régions sont choisies de telle sorte qu'à l'intérieur de R_i^0, par exemple, la fonction F peut se mettre sous la forme $\frac{N_i}{D_i}$.

» J'envisage également les régions R_i^1, formées par la partie commune à deux des régions R_i^0 et les régions R_i^2, R_i^3, R_i^4, formées par la partie commune à trois, à quatre ou à cinq de ces régions.

» 2° Je construirai une fonction potentielle J_i^p jouissant des propriétés suivantes : elle est holomorphe à l'extérieur de R_i^p et tend vers o quand $x^2+y^2+z^2+t^2$ croît indéfiniment. La différence $J_i^p - \log \operatorname{mod} D$ est holomorphe à l'intérieur de R_i^p; enfin, sur la limite de la région R_i^p, J_i^p est holomorphe quand D ne s'annule pas.

» Par exemple, si la région R_i^0 est formée de l'ensemble des points qui satisfont à l'inégalité

$$x^2+y^2+z^2+t^2<1,$$

voici comment on peut former la fonction J correspondante : on posera

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta\cos\psi,\quad z=r\sin\theta\sin\psi\cos\varphi,\quad t=r\sin\theta\sin\psi\sin\varphi.$$

» Considérons trois angles θ', ψ' et φ', et posons

$$\alpha r = x\cos\theta'+y\sin\theta'\cos\psi'+z\sin\theta'\sin\psi'\cos\varphi'+t\sin\theta'\sin\psi'\sin\varphi',$$
$$d\omega'=\sin^2\theta'\sin\psi'\,d\theta'\,d\psi'\,d\varphi'.$$

» Quand on fait $r=1$, modD et $\frac{d(\operatorname{mod}D)}{dr}$ se réduisent à des fonctions ν et λ de θ, φ et ψ; soient ν' et λ' ce que deviennent ν et λ quand on y remplace θ, φ et ψ par θ', φ' et ψ'. La fonction J sera égale,

$$\text{pour } r>1,\text{ à}\qquad -\frac{1}{2\pi^2}\int\frac{2\nu'(1-\alpha r)+\lambda'(1-2\alpha r+r^2)}{(1-2\alpha r+r^2)^2}\,d\omega';$$

$$\text{pour } r<1,\text{ à}\quad \log\operatorname{mod}D-\frac{1}{2\pi^2}\int\frac{2\nu'(1-\alpha r)+\lambda'(1-2\alpha r+r^2)}{(1-2\alpha r+r^2)^2}\,d\omega'.$$

» 3° Je formerai ensuite, à l'aide des fonctions J_i^p, une fonction potentielle Φ, telle que si, en un point quelconque, F peut se mettre sous la forme $\frac{N}{D}$, la différence $\Phi - \log \operatorname{mod} D$ soit holomorphe. Je n'ai, pour cela, qu'à appliquer, sans y rien changer, la méthode par laquelle M. Weierstrass démontre le théorème de M. Mittag-Leffler (*Monatsberichte*, août 1880).

» 4° La fonction Φ ne satisfait pas, en général, aux équations

$$\Delta_1 \Phi = \Delta_2 \Phi = \Delta_3 \Phi = \Delta_4 \Phi = 0;$$

mais les expressions $\Delta_i \Phi$ sont des fonctions potentielles entières.

» Je démontre que je puis trouver une fonction potentielle entière G satisfaisant aux quatre équations

$$\Delta_1 G = \Delta_1 \Phi, \quad \Delta_2 G = \Delta_2 \Phi,$$
$$\Delta_3 G = \Delta_3 \Phi, \quad \Delta_4 G = \Delta_4 \Phi.$$

» La différence $\Phi - G$ est alors la partie réelle d'une fonction de deux variables $\psi(X, Y)$, et l'on voit aisément que les fonctions

$$e^{\psi} = G_1 \quad \text{et} \quad F e^{\psi} = G_2$$

sont des fonctions entières, de sorte que F est le quotient de deux fonctions entières G_1 et G_2. C. Q. F. D.

» Les mêmes considérations peuvent servir à établir le théorème suivant :

» *Si* Y *est une fonction quelconque de* X, *non uniforme, qui ne présente pas de point singulier essentiel à distance finie, et qui ne puisse pas, pour une même valeur de* X, *prendre une infinité de valeurs finies infiniment voisines les unes des autres, elle pourra être considérée comme la solution d'une équation*

$$G(X, Y) = 0,$$

où G *est une fonction entière.* »

GÉOMÉTRIE. — *Sur les courbes du sextant.* Note de M. **Gruey**.

« 1. J'appelle *courbes du sextant* les courbes décrites, dans le champ de la vision, par l'image doublement réfléchie d'un point, lorsqu'on *balance* ou fait tourner l'instrument autour de la ligne de visée directe, c'est-à-dire autour de l'axe optique soit de la *lunette*, soit de la *pinule* que les marins emploient suivant les cas. Dans le cas de la lunette, la courbe est rapportée