Donc $\lim \left[\frac{1}{x^2}\Phi(x)\right]_{x=\infty} = 0$. Donc $F(x)$ a bien $\frac{3x^2}{\pi^2}$ pour expression asymptotique, comme l'ont trouvé les géomètres cités plus haut.

» Dans une Communication ultérieure, si l'Académie veut le permettre, j'indiquerai d'autres applications, dont une fort importante. Je prouverai, en effet, que la fonction de M. Tchebychef, somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à x, est asymptotique à x, ce qu'on n'avait pu établir jusqu'à présent. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les séries des polynômes.* Note de M. H. **Poincaré**, présentée par M. Hermite.

« On sait quel parti l'Analyse a tiré des fonctions définies par des séries dont le $n^{\text{ième}}$ terme est un polynôme entier d'ordre n. On connaît en particulier les travaux de MM. Tchebychef, Darboux, Fröbenius, Halphen et Appell. Je suis arrivé, au sujet de ces séries, à un résultat incomplet, mais qui peut présenter quelque intérêt à cause de sa généralité.

» Considérons une série de polynômes $P_0, P_1, P_2, \ldots$, tels que P_n soit un polynôme entier de degré n en x, et soit lié aux k polynômes précédents par une relation de récurrence

$$(1) \qquad Q_0 P_n \pm Q_1 P_{n-1} + Q_2 P_{n-2} + Q_3 P_{n-3} + \ldots + Q_k P_{n-k} = 0.$$

Dans cette relation, je suppose que Q_i est un polynôme entier donné en x et en n, de degré i en x. Je considère les séries de la forme

$$(2) \qquad \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n + \ldots,$$

où les α sont des coefficients constants, et j'en recherche les conditions de convergence. Le plan des x sera divisé en deux régions par une certaine courbe limite; dans l'une des régions en série, (2) sera convergente, dans l'autre divergente. Quand on fera varier les coefficients α, il est aisé de voir que la courbe limite variera, mais les diverses courbes limites formeront une seule série de courbes s'enveloppant mutuellement, de telle façon que par un point du plan passe une courbe limite, et une seule. C'est ainsi que, si P_n se réduit à x^n, les courbes limites sont des cercles ayant pour centre l'origine, et, si P_n se réduit au polynôme de Legendre X_n, elles sont des ellipses ayant pour foyers -1 et $+1$. Cherchons à déterminer ces courbes limites. Pour cela envisageons la série

$$(3) \qquad P_0 + zP_1 + \ldots + z^n P_n + \ldots.$$

Si, dans cette série, on regarde un instant x comme une constante et z comme la variable indépendante, on voit qu'elle satisfait à une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynômes entiers en x et en z. Pour trouver les limites de convergence de la série (3), il faut chercher les points singuliers de cette équation; on les obtient en égalant à zéro le premier coefficient de cette équation, qui est un polynôme entier en x et en z. Voici comment on formera ce coefficient : soit λ la plus haute puissance de n dans le premier membre de (1); formons l'expression

$$Q_0 + Q_1 z + \ldots + Q_k z^k.$$

Cette expression, si on l'ordonne suivant les puissances de n, s'écrira

$$Hn^\lambda + Kn^{\lambda-1} + \ldots,$$

H, K, ... étant des polynômes en x et en z. H sera le coefficient cherché. L'équation

$$H = 0$$

nous donne alors les points singuliers. On en tirera k valeurs de z, que j'appelle $z_1, z_2, \ldots, z_k$, en fonctions de x. Le plus petit module de ces k quantités sera aussi une fonction de x, que j'appelle $\varphi(x)$. L'équation générale des courbes limites sera alors

$$\varphi(n) = \text{const.}$$

» Si, par exemple, on a

$$H = z^2 + 2zx + 1,$$

les courbes limites seront des ellipses ayant -1 et $+1$ pour foyers.

» Si l'on a

$$H = (z - x + a)(z - x + b),$$

les courbes limites seront formées de deux arcs de cercle ayant pour centres l'un le point a, l'autre le point b.

» Cette méthode est en défaut quand le polynôme H, ordonné suivant les puissances de z, se réduit à un seul terme; mais la difficulté peut être tournée. Posons, en effet,

$$P_n = \frac{R_n}{(n!)^p},$$

p étant un nombre donné, positif ou négatif, entier ou fractionnaire. On aura entre les R_n une relation de récurrence de la forme

$$S_0 R_n + S_1 R_{n-1} + \ldots + S_k R_{n-k} = 0,$$

les S étant des polynômes entiers en x et des fonctions de n; on pourra choisir μ de telle façon que

$$\lim \frac{S_0 + S_1 z + \ldots + S_k z^k}{n^\mu} = H_1 \quad (\text{pour } n = \infty),$$

H_1 étant un polynôme entier en x et en z, et l'on aura pu choisir p de telle façon que ce polynôme, ordonné suivant les puissances de z, contienne plus d'un terme. Le polynôme H_1 remplacera alors le polynôme H.

» Il resterait à trouver les conditions pour qu'une fonction donnée $F(x)$ puisse être développée en série de la forme (2) à l'intérieur d'une certaine courbe limite. Il *faut* qu'elle soit holomorphe à l'intérieur de cette courbe limite. Mais je n'ai pu encore démontrer rigoureusement que cette condition soit suffisante. »

MÉCANIQUE. — *Sur les trajectoires des divers points d'une bielle en mouvement.* Note de M. **H. Léauté**, présentée par M. Resal.

« On utilise fréquemment, dans les mécanismes, les courbes décrites par les divers points d'une bielle oscillante dont la tête parcourt un cercle complet, et le pied un arc de cercle, les points décrivants pouvant d'ailleurs être pris sur la droite qui joint ces deux points, c'est-à-dire sur l'axe même de la bielle, ou en dehors de cet axe.

» Pour les mécanismes employés d'ordinaire, le cercle décrit par la tête de la bielle est petit par rapport à la longueur de cette pièce et par rapport au rayon de l'arc de cercle que parcourt le pied.

» Cette double condition, par les simplifications qu'elle entraîne, est caractéristique du problème que nous avons en vue, et elle détermine les propriétés mécaniques spéciales de ces courbes qui doivent être utilisées dans la pratique.

» Les trajectoires en question peuvent alors être définies par le système général d'équations

$$x = A_0 + A_1 \cos\theta + B_1 \sin\theta + A_2 \cos 2\theta + B_2 \sin 2\theta,$$
$$y = C_0 + C_1 \cos\theta + D_1 \sin\theta + C_2 \cos 2\theta + D_2 \sin 2\theta,$$

qui représente des courbes unicursales du quatrième ordre et dans lequel