et de trouver une intégrale $\Theta(q_1, q_2, q_3, \alpha, \beta, h)$ de cette équation avec deux constantes arbitraires α et β; les équations de la courbe d'équilibre seront alors

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} = \alpha', \quad \frac{\partial\Theta}{\partial\beta} = \beta'. \tag{9}$$

» III. Supposons enfin que l'on ait à chercher la position d'équilibre d'un fil sollicité par la même force F et assujetti à rester sur une surface donnée. Les coordonnées d'un point de cette surface étant supposées exprimées en fonction de deux paramètres q_1 et q_2, on formera la fonction

$$P = \tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

et on l'exprimera au moyen des paramètres q_1, q_2 et des nouvelles variables p_1, p_2 définies par les équations

$$p_1 = \frac{\partial P}{\partial q'_1}, \quad p_2 = \frac{\partial P}{\partial q'_2}.$$

» Si alors on désigne par $H(q_1, q_2; p_1, p_2)$ la fonction $P - \frac{1}{2}(U + h)^2$ et si l'on considère l'équation aux dérivées partielles

$$H\left(q_1, q_2; \frac{\partial\Theta}{\partial q_1}, \frac{\partial\Theta}{\partial q_2}\right) = 0,$$

il suffira de trouver une intégrale $\Theta(q_1, q_2, \alpha, h)$ de cette équation avec une constante arbitraire α, et l'équation de la courbe d'équilibre sera

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} = \alpha',$$

α' étant une nouvelle constante arbitraire. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les groupes des équations linéaires.* Note de M. **H. Poincaré**, présentée par M. Hermite.

« La détermination complète du groupe d'une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels est l'un des problèmes les plus importants que l'on rencontre dans la théorie de ces équations. M. Fuchs a donné, dans le Tome 75 du *Journal de Crelle,* un moyen de calculer les coefficients de ce groupe avec une approximation indéfinie; mais il y a beaucoup d'autres moyens d'arriver au même résultat.

» Je considère en particulier l'équation suivante :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\left[\sum_{i1}^{n} \frac{A_i}{(x-a_i)^2} + \sum_{i1}^{n} \frac{B_i}{x-a_i}\right], \tag{1}$$

en supposant

$$\Sigma B_i = 0.$$

» Ce que je vais dire s'appliquerait d'ailleurs à une équation linéaire quelconque, et je n'ai envisagé l'équation (1) que pour fixer les idées.

» Soient y_1 et y_2 deux intégrales de l'équation (1) définies par les conditions suivantes : pour $x = 0$, y_1, y_2, $\frac{dy_1}{dx}$ et $\frac{dy_2}{dx}$ se réduisent respectivement à

$$1, \; 0, \; 0 \text{ et } 1.$$

» Si l'on considère un instant x et les a_i comme des constantes, les A_i et les B_i comme variables, il est aisé de voir que y_1, y_2, $\frac{dy_1}{dx}$ et $\frac{dy_2}{dx}$ sont des fonctions *entières* des A_i et des B_i, et peuvent être développées suivant les puissances croissantes de ces quantités en séries *toujours* convergentes.

» Supposons maintenant que l'on fasse décrire à x un contour fermé quelconque C en partant du point 0 et y revenant; soient z_1, z_2, t_1 et t_2 les valeurs finales de y_1, y_2, $\frac{dy_1}{dx}$ et $\frac{dy_2}{dx}$ seront des fonctions entières des A et des B. Quand on fera décrire à x le contour envisagé, y_1 et y_2 se changeront respectivement en

$$z_1 y_1 + t_1 y_2,$$
$$z_2 y_1 + t_2 y_2.$$

» Soient S_1 et S_2 les racines de l'équation en S,

$$(z_1 - S)(t_2 - S) - z_2 t_1 = 0.$$

» Si l'on connaissait, pour tous les contours possibles, les valeurs de S_1 et de S_2, le groupe cherché serait entièrement déterminé. Or on a constamment

$$S_1 S_2 = z_1 t_2 - z_2 t_1 = 1.$$

» Il reste à déterminer

$$S_1 + S_2 = z_1 + t_2.$$

» La valeur de $z_1 + t_2$ s'obtient immédiatement quand le contour C n'enveloppe qu'un point singulier ou les enveloppe tous. Il reste à étudier le cas où ce contour enveloppe plusieurs points singuliers sans les envelopper tous. Dans ce cas, $z_1 + t_2$ s'exprime par une série ordonnée suivant les puissances des A_i et des B_i, et les coefficients sont des sommes de termes que l'on peut former comme il suit :

» Posons

$$\Lambda(x, \alpha_1) = \log\left(1 - \frac{x}{\alpha_i}\right),$$

$$\Lambda(x, \alpha_1, \alpha_2) = \int_0^x \frac{\Lambda(x, \alpha_1)}{x - \alpha_1}\, dx,$$

$$\Lambda(x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \int_0^x \frac{\Lambda(x, \alpha_1, \alpha_2)}{x - \alpha_3}\, dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Soit enfin $\Lambda(C, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ l'intégrale

$$\int \frac{\Lambda(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1})}{x - \alpha_p}\, dx,$$

prise le long du contour C. Les coefficients de notre série seront des sommes de termes de la forme $\Lambda(C, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$, les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ étant, dans un certain ordre, les points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$, chacun de ces derniers pouvant être répété un certain nombre de fois dans la série des α. Ces coefficients peuvent donc être calculés par quadratures.

» 2. Voici un autre moyen de former le groupe de l'équation (1). Soient a_1 et a_2 deux points singuliers, et C_1 et C_2 deux cercles ayant pour centres a_1 et a_2, ne contenant aucun autre point singulier et ayant une partie commune P. Soient λ_1 et μ_1, λ_2 et μ_2 les racines des équations déterminantes relatives à a_1 et à a_2. L'équation (1) admettra quatre intégrales :

$$(2)\qquad \begin{cases} y_1 = (x - a_1)^{\lambda_1}\varphi_1(x - a_1), & y_2 = (x - a_1)^{\mu_1}\psi_1(x - a_1), \\ y_3 = (x - a_2)^{\lambda_2}\varphi_2(x - a_2), & y_4 = (x - a_2)^{\mu_2}\psi_2(x - a_2), \end{cases}$$

où les φ et les ψ sont des séries ordonnées suivant les puissances de $x - a_1$ et de $x - a_2$, et convergentes toutes quatre à l'intérieur de P. On aura d'ailleurs

$$(3)\qquad \begin{cases} y_1 = \alpha y_3 + \beta y_4, & \dfrac{dy_1}{dx} = \alpha\dfrac{dy_3}{dx} + \beta\dfrac{dy_4}{dx}, \\ y_2 = \gamma y_3 + \delta y_4, & \dfrac{dy_2}{dx} = \gamma\dfrac{dy_3}{dx} + \delta\dfrac{dy_4}{dx}. \end{cases}$$

» Si l'on pouvait déterminer les valeurs de α, β, γ, δ pour toutes les combinaisons deux à deux des points singuliers, le groupe cherché serait complètement déterminé; mais, avec les suppositions que nous avons faites sur les cercles C_1 et C_2, on peut substituer, dans les équations (3), les valeurs des y données par les équations (2), en donnant à x une valeur fixe x_0 située à l'intérieur de P. On a ainsi α, β, γ, δ sous forme de séries ordonnées suivant les puissances des A, des B, de $x_0 - a_1$ et de $x_0 - a_2$.

» Dans une prochaine Note, je montrerai, si l'Académie veut bien le permettre, comment on peut toujours ramener le problème au cas où l'on peut tracer deux cercles C_1 et C_2 satisfaisant aux conditions énoncées plus haut. Je montrerai également comment les résultats précédents peuvent s'étendre au cas des intégrales irrégulières et le lien intime qu'il y a entre ce dernier cas et divers problèmes de Mécanique céleste. »

THÉORIE DES NOMBRES. — *Sur la composition des périodes des fractions continues périodiques;* par M. E. de Jonquières [1].

« I. Lorsque le rapport $\frac{2a}{d}$ a pour valeur un nombre fractionnaire $\frac{p}{q}(p>q)$, la famille de nombres, dont l'étude se présente d'abord, est celle que définit la formule

$$E = \overline{an}^2 + 4n,$$

où $q=2$, n prenant successivement toutes les valeurs entières depuis l'unité jusqu'à l'infini, tandis que a, nécessairement impair, reçoit pour chacun des groupes, en nombre infini, dont la famille se compose, une valeur qui particularise et détermine le groupe.

» Cette famille se subdivise, selon que n est pair ou impair, en deux branches, où les périodes suivent, respectivement, les lois suivantes :

» Théorème VII. — *Si n est pair, la période a huit termes, savoir :*

$$\left[\left(\frac{a-1}{2}\right),\ 1,\ 1,\ \left(\frac{an}{2}-1\right),\ 1,\ 1,\ \left(\frac{a-1}{2}\right),\ 2an\right].$$

» Théorème VIII. — *Si n est impair, la période a dix termes, savoir :*

$$\left[\left(\frac{a-1}{2}\right),\ 1,\ 1,\ \left(\frac{an-1}{2}\right),\ 2a,\ \left(\frac{an-1}{2}\right),\ 1,\ 1,\ \left(\frac{a-1}{2}\right),\ 2an\right].$$

[1] Voir les *Comptes rendus* de la séance du 26 février 1883, p. 568. A la page 570, ligne 1, *il faut lire :* $\overline{(a+1)}^2 - 2$, *au lieu de :* $a^2 - 2$.