de transformations linéaires algébriques, c'est-à-dire dont les coefficients sont fonctions algébriques d'un certain nombre de paramètres arbitraires; c'est une question sur laquelle je me réserve de revenir, en prenant pour point de départ les résultats généraux sur les groupes de transformations donnés par M. Lie dans le beau Mémoire dont j'ai parlé plus haut.

» Donnons, en terminant, un exemple bien simple. Soit l'équation

$$(x - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x}{2}\frac{dy}{dx} + \alpha^2 y = 0,$$

où α est une constante, équation qui est un cas particulier de l'équation de Gauss. Son groupe de transformations sera donné par les équations

$$Y_1 = \lambda y_1 + \sqrt{1-\lambda^2}\, y_2,$$
$$Y_2 = \sqrt{1-\lambda^2}\, y_1 - \lambda y_2,$$

où λ est un paramètre arbitraire, et pour deux intégrales convenables y_1 et y_2 et toutes celles qui s'en déduisent par ces substitutions, on a

$$y_1^2 + y_2^2 = 1. \text{ »}$$

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions à espaces lacunaires.* Note de M. **H. Poincaré**, présentée par M. Hermite.

« Dans une Note récente, M. Goursat, généralisant un résultat de M. Picard, a montré qu'une fonction uniforme admettant n coupures *séparées* peut être regardée comme la somme de n fonctions, admettant chacune une seule coupure. Le théorème que j'ai l'honneur de communiquer aujourd'hui à l'Académie est analogue à celui de M. Goursat. Ce qui lui donne peut-être quelque intérêt, c'est qu'il jette une certaine lumière sur le mode d'existence des fonctions à espaces lacunaires.

» Considérons le plan des x comme divisé en deux parties par l'axe des quantités réelles. Soit $f(x)$ une fonction n'existant que dans la partie supérieure et étant partout holomorphe dans cette partie; soit $f_1(x)$ une fonction n'existant que dans la partie inférieure et étant partout holomorphe dans cette partie. La moitié inférieure du plan est pour $f(x)$, la moitié supérieure pour $f_1(x)$, un espace lacunaire. Je dis que je pourrai trouver deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ jouissant des propriétés suivantes : elles existeront dans tout le plan; la somme $\varphi + \psi$ sera égale à f dans la moitié supérieure du plan et à f_1 dans la moitié inférieure. La fonction φ admettra pour coupure le segment $(-1, +1)$ et la fonction ψ admettra les deux coupures $(-\infty, -1)$ et $(+1, +\infty)$.

» En effet, désignons par la notation $F(x)$ une fonction qui sera égale à f dans la partie supérieure du plan et à f_1 dans la partie inférieure. Décrivons sur le segment $(-1, +1)$ comme diamètre une circonférence C qui aura pour centre l'origine et pour rayon l'unité. On démontre aisément qu'on peut toujours trouver deux fonctions entières $G(x)$ et $G'(x)$ telles que

$$F(x)\,\theta(x) = F(x)\left[e^{G\left(\frac{1}{x-1}\right)+G'\left(\frac{1}{x+1}\right)}\right]$$

tende vers o quand x tend vers -1 ou vers $+1$ *en suivant la circonférence* C.

» Cela posé, si l'on pose $x = \rho e^{i\omega}$ et qu'on fasse $\rho = 1$, $F(x)\,\theta(x)$ sera une fonction de ω développable par la formule de Fourier, de sorte que

$$F(x)\,\theta(x) = \Sigma c_m \cos m\omega + \Sigma d_m \sin m\omega,$$

ou bien, en supposant toujours $\rho = 1$,

$$F(x)\,\theta(x) = \Sigma a_m x^{-m} + \Sigma b_m x^m;$$

posons

$$\varphi(x)\,\theta(x) = \Sigma a_m x^{-m}, \quad \psi(x)\,\theta(x) = \Sigma b_m x^m.$$

» Ces développements ne définissent la fonction φ qu'à l'extérieur et la fonction ψ qu'à l'intérieur du cercle C. Mais il est aisé de définir ces fonctions pour toute l'étendue du plan, à l'exception de leurs coupures respectives. Soit, par exemple, à définir la fonction $\varphi(x)$ pour un point x situé dans la moitié supérieure du plan. Soit AMB un arc du cercle C situé tout entier dans la moitié supérieure. Soit BNA ce qui reste de C quand on en a enlevé cet arc AMB. Soit APC un arc de courbe ne coupant pas l'axe des quantités réelles et laissant le point x en dehors; on définira $\varphi(x)$ de la façon suivante : on posera

$$2i\pi\varphi(x)\,\theta(x) = \int \frac{F(z)\,\theta(z)\,dz}{z-x},$$

l'intégrale étant prise le long du contour APBNA. On posera ensuite

$$\psi(x) = F(x) - \varphi(x)$$

et les fonctions φ et ψ ainsi définies satisferont aux conditions énoncées.

» Il est clair d'ailleurs que ce qui précède s'applique au cas où la fonction $f(x)$, au lieu d'être limitée par l'axe des quantités réelles, admettrait un espace lacunaire quelconque.

» Voici le point sur lequel je désirerais attirer l'attention. On pourrait croire qu'il existe une fonction $f_1(x)$ qui serait le prolongement naturel de $f(x)$ dans la moitié inférieure du plan, de telle sorte que, si deux fonctions φ et ψ existant dans tout le plan ont pour somme f dans la moitié supérieure, elles devront avoir pour somme f_1 dans la moitié inférieure. Il n'en est rien; je puis choisir tout à fait arbitrairement les deux fonctions f et f_1; de sorte que f n'a pas à proprement parler de *prolongement naturel* au delà de l'axe des quantités réelles. C'est le résultat auquel conduisait déjà l'étude des développements infinis.

» On pourrait se demander ce qui arriverait si l'axe des quantités réelles était pour f et pour f_1 une limite artificielle et non une *limite naturelle*, si, par exemple, on prenait $f = 1$ et $f_1 = 0$. Les coupures des fonctions φ et ψ seraient alors aussi des *coupures artificielles* et, si l'on voulait les prolonger au delà de ces coupures par la série de Taylor, elles cesseraient d'être uniformes. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une généralisation du théorème de Fermat.* Note de M. **Picquet**, présentée par M. Hermite.

« On sait que les $3m$ points d'intersection d'une cubique plane avec une courbe du degré m ne sont pas arbitraires. Bien qu'il faille plus de $3m$ points pour déterminer une courbe du degré m, on n'en peut prendre arbitrairement sur une cubique plus de $3m - 1$, au moyen desquels le dernier se trouve complètement déterminé. Lorsqu'on exprime, suivant l'une des méthodes connues, les coordonnées d'un point variable de la courbe en fonction doublement périodique d'un argument, cette propriété se traduit par une relation entre les arguments des $3m$ points d'intersection : Clebsch a fait voir que leur somme est constante; et si l'on emploie, par exemple, la méthode de M. Hermite, la constante est égale à m fois la somme des infinis de x et y. On peut donc supposer que la courbe C_m ait en un point donné $3m - 1$ points consécutifs confondus sur la cubique : elle n'est pas déterminée; mais, quelle qu'elle soit, elle rencontre la cubique en un dernier point qui est fixe. Si l'on opère sur ce point comme sur le premier, et ainsi de suite, on obtiendra une espèce particulière de polygones curvilignes, fermés si le premier sommet est convenablement choisi, dont les côtés sont indéterminés, mais dont les sommets sont parfaitement déterminés; qui sont à