où le signe Σ s'étend de $r = 0$ à $r = \frac{1}{2}(p - n)$ ou $\frac{1}{2}(p - n - 1)$, suivant que $p - n$ est pair ou impair, toujours dans la supposition qu'on s'arrête au $p + 1^{\text{ième}}$ terme du développement (1). De plus, je remarquerai qu'on a

$$\Pi\left(\frac{s}{2} + l\right) = \frac{s}{2}\left(\frac{s}{2} + 1\right)\cdots\left(\frac{s}{2} + l\right)\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right).$$

» Au moyen de Tables construites pour $s = 3$ et $n = 0, 1, 2, \ldots, 20$, le développement numérique des $E^{(s)}$ est facilité de beaucoup. Entre $E^{(s)}$ et $E^{(s+2)}$ il existe, en outre, des relations très simples.

» Après avoir fini mes recherches sur l'application du développement proposé à la théorie du mouvement des corps célestes, j'exposerai plus en détail les propriétés analytiques des formules. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les séries trigonométriques.* Note de M. **H. Poincaré**, présentée par M. Hermite.

« M. Lindstedt a publié récemment, dans les *Comptes rendus* et dans les *Astronomische Nachrichten*, une solution nouvelle du problème des trois corps, qui lui permet d'exprimer les coordonnées des trois masses par des séries purement trigonométriques. Cet important résultat donne quelque intérêt à une remarque que j'avais faite dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie le 30 octobre 1882. J'avais montré, dans cette Note, qu'une série purement trigonométrique et toujours convergente peut cependant croître au delà de toute limite. Ainsi, même en supposant vaincues toutes les difficultés provenant des questions de convergence, le résultat de M. Lindstedt ne permettrait pas de conclure à la stabilité du système solaire, dans le sens rigoureux du mot.

» Je voudrais faire quelques observations au sujet de la belle méthode de M. Lindstedt. Ce savant astronome s'exprime comme il suit (1) :

« Sans entrer ici dans des discussions sur des conditions de convergences, nous supposerons que nos constantes aient des valeurs telles que nos développements soient *toujours* convergents. »

» Dans les *Astronomische Nachrichten*, au contraire, M. Lindstedt dit qu'il choisira ses constantes de telle façon que ses séries convergent *au moins pendant un certain intervalle de temps*.

---

(1) *Comptes rendus*, t. XCVII, p. 1278.

» Je me propose de faire voir :

» 1° Que si ces séries convergent pendant un intervalle de temps, si petit qu'il soit, elles convergeront toujours;

» 2° Qu'il n'est pas sûr qu'on puisse choisir les constantes de telle façon que les séries convergent;

» 3° Que les séries, même lorsqu'elles ne convergent pas, peuvent donner une solution du problème avec une approximation indéfinie.

» M. Lindstedt dit aussi qu'il a trouvé le véritable nombre des arguments qu'il faut introduire dans les expressions des coordonnées des masses. Cela n'a de sens que si les coordonnées ne peuvent se développer que d'une seule manière en séries trigonométriques convergentes, et c'est certainement là la supposition du géomètre de Dorpat. Je me propose de montrer que cette supposition est fondée, ce qui n'est pas évident *a priori*.

» Les séries de M. Lindstedt sont de la forme

$$\Sigma A_m \cos(\alpha_m t + \varpi_m) = \Sigma(B_m \cos\alpha_m t + C_m \sin\alpha_m t).$$

» Je les suppose convergentes pendant un petit intervalle de temps de part et d'autre de l'époque zéro. Il en résulte que les deux séries

$$\Sigma B_m \cos\alpha_m t, \quad \Sigma C_m \sin\alpha_m t$$

sont séparément convergentes; et il s'agit évidemment d'une convergence *absolue*, puisque M. Lindstedt ne tient aucun compte de l'ordre des termes. Je dis que les deux séries sont toujours convergentes. C'est évident pour la première, puisque la série ΣB_m doit converger. Si maintenant la seconde converge pour une certaine valeur de t, il en sera de même de

$$\Sigma(C_m \sin\alpha_m t \times 2\cos\alpha_m t) = \Sigma C_m \sin 2\alpha_m t.$$

» Ainsi, si la série converge dans un certain intervalle de temps, elle convergera dans un intervalle double; il s'ensuit qu'elle convergera toujours.

» Il arrive quelquefois qu'une série trigonométrique, quoique toujours convergente, ne représente une fonction donnée que dans un intervalle limité. C'est ainsi que la série $\sum \frac{\sin nt}{n}$ ne représente la fonction $\frac{\pi - t}{2}$ que quand t est compris entre zéro et 2π. Mais ce ne saurait être ici le cas, car les séries de M. Lindstedt, substituées dans les équations du problème, y satisfont identiquement en admettant qu'elles convergent.

» Enfin, il ne peut pas y avoir deux solutions du problème; une même fonction ne peut pas être représentée par deux séries trigonométriques, sans quoi l'on aurait identiquement

$$\Sigma B_m \cos \alpha_m t + \Sigma C_m \sin \alpha_m t = 0. \tag{1}$$

» Mais j'ai démontré (*Comptes rendus*, t. XCV, p. 766) que la valeur absolue d'une série telle que celle du premier membre peut devenir au moins égale à $\frac{B_m}{4}$ ou à $\frac{C_m}{4}$. La démonstration ne s'appliquait, il est vrai, qu'à une série particulière, mais il est facile, par un artifice assez simple, de l'étendre au cas général. Ainsi une équation telle que (1) est impossible.

» Toutes ces suppositions de M. Lindstedt sont donc confirmées. Je ne crois pas qu'il puisse en être de même d'une autre hypothèse faite dans ce même Mémoire. Le savant astronome suppose que l'on pourra choisir les constantes de façon que ces développements soient convergents. Il est vrai que, pour certaines valeurs *particulières* des constantes, les distances mutuelles des trois corps peuvent être développées en séries trigonométriques convergentes (ne contenant même qu'un argument), ainsi que je l'ai démontré dans une Note du 23 juillet 1883. Mais il n'est pas évident, il est même improbable, que la convergence subsiste lorsque les valeurs des constantes sont suffisamment voisines de ces valeurs particulières. Je connais, en effet, des problèmes tout à fait analogues où la convergence n'a pas lieu.

» Mais, même si elles divergent, les séries de M. Lindstedt peuvent fournir une solution du problème avec une approximation indéfinie, c'est-à-dire que l'on peut trouver des séries convergentes dont les coefficients diffèrent aussi peu que l'on veut de ceux des séries de M. Lindstedt et dont la somme diffère aussi peu que l'on veut des distances mutuelles que l'on cherche à exprimer. C'est dans ce sens que la méthode de M. Lindstedt nous fournit une véritable solution du problème. »

GÉOMÉTRIE. — *Sur la génération des surfaces*. Note de MM. **J.-S.** et **M.-N. Vaněček**, présentée par M. Ossian Bonnet.

» **1.** Dans une Note publiée dans les *Comptes rendus* [1], nous avons démontré que :

» Quand les sommets l_1, l_2, l_3 d'un tétraèdre polaire par rapport à une surface du second ordre F parcourent respectivement les courbes L, M et

[1] 29 mai 1882.