MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

SUR CERTAINES SOLUTIONS PARTICULIÈRES DU PROBLÈME DES TROIS CORPS

Par M. H. POINCARÉ.

But de ce travail.

La solution générale du problème des trois corps est encore à trouver, et, bien qu'on ait, dans ces derniers temps, donné des développements purement trigonométriques des distances mutuelles, ces séries, qui peuvent rendre des services dans la pratique, ne sont pas théoriquement satisfaisantes, parce que la convergence n'en est rien moins que démontrée. Il y a cependant certaines solutions particulières pour lesquelles ces difficultés relatives à la convergence n'existent pas : ce sont celles où les distances mutuelles sont des fonctions périodiques du temps et que l'on pourrait appeler *solutions périodiques*.

Je considère en effet trois masses, M, m et m', et je suppose que les rapports $\frac{m}{M}$ et $\frac{m'}{M}$ soient très petits. Je suppose de plus que les deux petites masses m et m' soient rapportées à la grande masse M, de sorte que, quand je parlerai de la position et de la vitesse des petites masses, j'entendrai leur position et leurs vitesses relatives par rapport à M.

Je dirai que les trois masses sont en conjonction symétrique si leurs vitesses sont perpendiculaires à leur plan. Dans le cas particulier où les inclinaisons sont nulles et où les trois masses restent constamment dans un même plan, je dirai qu'elles sont en conjonction symétrique si elles sont en ligne droite et de façon que leurs vitesses soient perpendiculaires à la droite qui les joint.

Supposons maintenant qu'à l'époque t_0 il y ait conjonction symétrique ; les distances mutuelles des trois masses seront alors les mêmes aux temps $t_0 + h$ et $t_0 - h$. Supposons qu'à l'époque t_1 il y ait encore conjonction symétrique ; les distances mutuelles reprendront les mêmes valeurs aux temps $t_1 + h$ et $t_1 - h$. Ces distances mutuelles seront donc des fonctions périodiques du temps avec la période $2(t_1 - t_0)$. Après une période, le système se retrouve dans la même situation relative; il a seulement tourné d'un certain angle dans l'espace. Je choisirai l'origine et l'unité du temps de telle façon que

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \pi,$$

et que la période soit 2π. Je prendrai pour plan des xy un plan perpendiculaire à la fois au plan des trois corps aux deux époques 0 et π : ce sera évidemment le plan du maximum des aires. Je prendrai l'axe des x dans le plan des trois masses à l'époque 0. Il en résulte qu'à l'époque 0 les longitudes de m et m' sont 0, celles des périhélies 0 et celles des nœuds $\frac{\pi}{2}$. Dans le cas des inclinaisons nulles, je prendrai pour plan des xy le plan commun des orbites et pour axe des x la droite qui joint les trois masses à l'époque 0.

Existe-t-il de pareilles solutions, au moins pour le cas dans lequel je me renfermerai et où deux des masses sont supposées très petites ? Je me propose de faire voir qu'il y en a de trois sortes :

Première sorte : inclinaisons nulles, excentricités très petites;

Deuxième sorte : inclinaisons nulles, excentricités finies;

Troisième sorte : inclinaisons finies, excentricités très petites.

Je ferai voir ensuite quel parti on peut en tirer.

Formule de M. Kronecker.

M. Kronecker a donné, dans les *Monatsberichte* (1869), une formule qui donne le nombre des solutions de n équations à n inconnues qui satisfont à des inégalités données. Nous ferons l'application suivante de cette formule :

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *n fonctions continues des n variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Supposons que* X_i *soit toujours positif pour* $x_i = a_i$ *et toujours négatif pour* $x_i = -a_i$. *Il existera au moins un système de valeurs des x qui satisfera aux inégalités*

$$(1) \qquad -a_1 < x_1 < a_1, \quad -a_2 < x_2 < a_2, \quad \ldots, \quad -a_n < x_n < a_n$$

et aux équations

$$(2) \qquad X_1 = X_2 = \ldots = X_n = 0.$$

Les équations (2) auront donc toujours une solution.

Pour faire comprendre comment on peut démontrer ce théorème, supposons que nous n'ayons que deux variables x_1 et x_2, que nous regarderons comme les coordonnées d'un point dans un plan. Alors les inégalités (1) signifient que ce point est à l'intérieur d'un certain carré ABCD dont les côtés ont pour équations

AB... $x_1 = a_1$ CD... $x_1 = -a_1$ BC... $x_2 = a_2$ DA... $x_2 = -a_2$.

La courbe $X_2 = 0$ part alors d'un point du côté AB pour aboutir à un point de CD; de même la courbe $X_1 = 0$, partant d'un point de BC pour aboutir à un point de DA, doit forcément rencontrer la première à l'intérieur du carré.

Méthode générale.

On voit immédiatement l'avantage que peut présenter l'application de ce théorème. Pour démontrer rigoureusement que certaines équations peuvent être satisfaites, il suffit d'étudier le signe de certaines fonctions. Or, si les masses sont très petites, les signes de ces fonctions seront les mêmes que quand ces masses sont nulles, c'est-à-dire dans le cas du mouvement keplérien.

J'ai supposé qu'au temps o les longitudes des masses et des périhélies sont nulles et celles des nœuds $\frac{\pi}{2}$. Il reste comme éléments initiaux arbitraires les moyens mouvements n et n', les excentricités e et e', les inclinaisons i et i'.

Soient maintenant X, Y, Z, ... un certain nombre de fonctions des coordonnées et des vitesses de m et de m' au temps π. Nous prendrons trois fonctions seulement pour fixer les idées; ce seront des fonctions des éléments initiaux et des masses. Si les masses sont assez petites, on démontre aisément que ces fonctions peuvent être développées en séries suivant les puissances croissantes des masses, de sorte qu'on a, par exemple,

$$X = X_0 + X_1 + X_2 + \ldots + X_n + \ldots,$$

X_n désignant l'ensemble des termes d'ordre n par rapport aux masses.

Considérons trois des éléments initiaux comme constants et faisons varier les trois autres. Je suppose que l'on puisse choisir ces derniers éléments de telle façon que

$$X_0 = Y_0 = Z_0 = 0,$$

et que le déterminant fonctionnel de X_0, Y_0, Z_0 par rapport aux trois éléments variables ne soit pas nul, je dis qu'on pourra choisir ces mêmes éléments de façon que

$$X = Y = Z = 0.$$

En effet, si le déterminant fonctionnel en question n'est pas nul, on pourra, en donnant aux éléments initiaux des valeurs voisines de celles qui annulent X_0, Y_0 et Z_0, obtenir pour ces trois fonctions tous les systèmes de valeurs satisfaisant aux inégalités

$$X_0^2 < a_1^2, \quad Y_1^2 < a_2^2, \quad Z_0^2 < a_3^2,$$

si a_1, a_2 et a_3 sont assez petits. On pourra alors considérer X, Y et Z comme des fonctions de X_0, Y_0 et Z_0, et il est clair que, si les masses sont assez petites par rapport à a_1, a_2, a_3, on aura

$$X > 0 \quad \text{pour} \quad X_0 = a_1; \quad X < 0 \quad \text{pour} \quad X_0 = -a_1,$$

et de même pour Y et pour Z. C'est dire qu'on pourra appliquer le théorème de M. Kronecker et que les éléments initiaux pourront être choisis de telle façon que

$$X = Y = Z = 0.$$

C. Q. F. D.

Ce théorème ne s'appliquerait pas si X_0 était identiquement nul, parce qu'alors le déterminant fonctionnel serait nul; mais dans ce cas il suffirait de remplacer X_0 par X_1, qui donne alors son signe à X quand les masses sont assez petites. Nous en verrons plus loin des exemples.

Solutions de la première sorte.

Supposons i et i' nuls, e et e' très petits. Soient maintenant X la différence de longitude de m et de m' au temps π; Y et Z les dérivées, par rapport au temps, des rayons vecteurs de m et de m' à cette même époque π.

Si l'on a

$$e = e' = 0, \quad n - n' = 1,$$

on a

$$X_0 = Y_0 = Z_0 = 0,$$

et il est aisé de voir que le déterminant fonctionnel n'est pas nul. On a donc, pour des valeurs très petites de e et de e',

$$X = Y = Z = 0.$$

Ces équations signifient qu'au temps π les trois masses se retrouvent en conjonction symétrique : il y a donc des solutions périodiques de la première sorte; il y en a même une quadruple infinité. En effet, renonçons momentanément au choix d'unités et d'axes que nous avons fait plus haut et supposons des unités et des axes quelconques. Nous pouvons alors choisir arbitrairement les époques t_0 et t_1 de la première et de la seconde conjonction symétrique, et les longitudes α_0 et α_1 de m à ces deux époques. On doit cependant exclure tout choix tel que $\alpha_1 - \alpha_0$ soit multiple de π, parce qu'alors notre déterminant fonctionnel ne serait plus nul; il ne faut même pas que la différence entre $\alpha_1 - \alpha_0$ et un multiple de π soit de même ordre que les masses.

Il en résulte que les distances mutuelles des trois corps peuvent se développer en séries ordonnées suivant les cosinus des multiples de t. Quant aux coefficients de $\cos pt$, ils peuvent eux-mêmes être développés en séries ordonnées suivant les puissances croissantes des masses, et convergentes pourvu que ces masses soient assez petites.

La difficulté était de démontrer rigoureusement l'existence de la solution périodique et d'écarter ainsi à l'avance tous les embarras que pourraient nous causer les questions de convergence. On peut ensuite calculer les coefficients par des approximations successives. Donnons ici la première approximation, en négligeant les carrés des masses. Si les masses étaient nulles, on aurait la solution du problème en donnant à a et a', n et n' des valeurs convenables, et avec des excentricités nulles et des longitudes o au temps o, on aura $n - n' = 1$.

Posons

$$R = \frac{1}{\sqrt{a^2 + a'^2 - 2aa' \cos t}} - \frac{a}{a'^2} \cos t = \sum A_j \cos jt$$

$$(j = -\infty \ldots -1, 0, t, \ldots, \infty)$$

et

$$B_j = 2n A_j + a \frac{dA_j}{da}, \quad C_j = 3n A_j + 2a \frac{dA_j}{da}.$$

On trouvera, pour les coordonnées polaires de la première petite masse,

$$r = a + \frac{a^2 n}{\mu} \sum B_j \left(\frac{1}{n+j} + \frac{1}{n-j}\right) \frac{\cos jt}{2},$$

$$v = nt + \frac{a}{\mu} \sum j B_j \left(\frac{1}{n+j} + \frac{1}{n-j}\right) \sin jt + \frac{an}{\mu} \sum \frac{C_j}{j} \sin jt,$$

μ étant un coefficient dépendant des masses, et de même pour la seconde petite masse.

Ces formules ne s'appliquent pas au cas où n est un nombre entier.

Solutions de la deuxième sorte.

Supposons encore les inclinaisons nulles, mais ne supposons plus les excentricités très petites. Soient l, l', ϖ et ϖ' les longitudes des deux masses m et m' et celles de leurs périhélies au temps π. Soient

$$X = \varpi - \varpi', \quad Y = l - \varpi, \quad Z = l' - \varpi'.$$

Ici X_0 est identiquement nul; pour de petites valeurs des masses, c'est donc X_1 qui donne son signe à X. Il faut donc démontrer que l'on peut choisir les éléments initiaux de telle façon que

$$X_1 = Y_0 = Z_0 = 0.$$

On peut évidemment choisir les moyens mouvements n et n' de telle façon que Y_0 et Z_0 soient nuls. Il s'agit maintenant de faire voir que, n et n' étant désormais regardés comme déterminés, on peut choisir e et e' de telle façon que

$$X_1 = 0. \tag{3}$$

Or cette équation peut s'écrire

$$m'\delta_1\varpi = m\delta_1\varpi',$$

en posant

$$m'\delta_1\varpi = -\frac{an\sqrt{1-e^2}}{e}\int_0^\pi \frac{dR}{de}\,dt,$$

$$m\delta_1\varpi' = -\frac{a'n'\sqrt{1-e'^2}}{e'}\int_0^\pi \frac{dR'}{de'}\,dt;$$

de sorte qu'on peut écrire

$$m'e\,\delta_1\varpi = A + Be + Ce' + \ldots$$
$$me'\,\delta_1\varpi' = A' + B'e + C'e' + \ldots,$$

les seconds membres étant des séries ordonnées suivant les puissances de e et de e' et convergentes pour les petites valeurs de ces quantités. Nous supposerons d'abord que ces excentricités sont assez petites pour qu'il y ait convergence. Cela nous suffira pour montrer la possibilité de satisfaire à l'équation (3). Si n n'est pas multiple de $n - n'$, A et A' sont nuls. Si n n'est pas multiple de $\frac{n-n'}{2}$, B, C, B', C' se réduisent aux termes dits *séculaires*. Nous supposerons que ces conditions sont remplies, puisque notre but est seulement d'établir la possibilité de satisfaire à l'équation (3).

L'équation (3) peut alors s'écrire

$$o = \boxed{1,0}\, e^2 + ee'[(0,1)-(1,0)] - e'^2 \boxed{0,1} + \varphi,$$

φ se composant de termes d'ordre plus grand que deux par rapport aux excentricités. Si l'on considère e et e' comme les coordonnées d'un point dans un plan, l'équation (3) représente une courbe présentant un point double à l'origine. Nous nous proposons de démontrer que cette courbe est réelle, et, pour cela, il nous suffit de faire voir que les tangentes au point double sont réelles; or ces tangentes sont données par l'équation

$$\boxed{1,0}\, e^2 + ee'[(0,1)-(1,0)] - e'^2 \boxed{0,1} = 0. \tag{4}$$

Mais on a

$$\boxed{1,0} = \boxed{0,1}\, \frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}.$$

Donc l'équation (4) a ses coefficients extrêmes de signe contraire; donc elle a des racines réelles. Donc par l'origine passent deux branches réelles de courbe que l'on pourra suivre jusqu'à une distance *finie* de l'origine. Donc l'équation (3) peut être satisfaite par des valeurs *finies* des excentricités. En répétant le raisonnement fait plus haut, on conclurait de là qu'on peut donner aux éléments initiaux des valeurs qui annulent à la fois XY et Z, ce qui démontre l'existence des solutions périodiques de la deuxième sorte.

Le raisonnement serait en défaut si les excentricités étaient infiniment petites de l'ordre des masses.

Solutions de la troisième sorte.

Supposons les inclinaisons finies et les excentricités très petites.

Soient l, l', θ et θ' les longitudes des deux masses et de leurs nœuds au temps π. Posons

$$X = \theta - \theta', \quad Y = l - \theta + \frac{\pi}{2}, \quad Z = l' - \theta' + \frac{\pi}{2}.$$

Soient maintenant T et U les dérivées des rayons vecteurs de m et de m' par rapport au temps, à l'époque π. Ici encore X_0 est identiquement nul, et c'est X_1 qui donne son signe à X. Si l'on annule e et e' et si l'on choisit convenablement n et n', on aura

$$Y_0 = Z_0 = T_0 = U_0 = 0.$$

Il reste à montrer que e, e', n et n' étant supposés désormais déterminés, on peut choisir i et i' de façon à satisfaire à l'équation

$$X_1 = 0.$$

Cela est toujours possible, car cette équation signifie simplement que le plan des xy est le plan invariable. On n'a qu'à répéter le raisonnement déjà fait plus haut pour voir que l'on peut choisir les éléments initiaux de telle sorte que

$$X = Y = Z = T = U = 0,$$

ce qui démontre l'existence d'une infinité de solutions périodiques de la troisième sorte.

Solutions de la quatrième sorte.

Il est possible qu'il existe des solutions de la quatrième sorte, où les excentricités et les inclinaisons sont finies à la fois ; mais je n'ai pu encore démontrer leur existence que pour certaines valeurs du rapport $\frac{m}{m'}$.

Application des solutions périodiques. — Il semble au premier abord que ces solutions périodiques ne puissent être d'aucune utilité pratique, puisqu'elles correspondent à des valeurs *particulières* des éléments initiaux, valeurs dont la probabilité est nulle. Mais, si les éléments initiaux sont très voisins de ceux qui correspondent à une solution périodique, on pourra rapporter les positions véritables des trois masses aux positions qu'elles occuperaient dans cette solution périodique et se servir, par conséquent, de cette solution comme d'une *orbite intermédiaire*. Appelons r, v, r', v' les coordonnées polaires de m et de m' sur cette orbite intermédiaire, $r + \rho$, $v + \omega$, z, $r' + \rho'$, $v' + \omega'$, z' les coordonnées semi-polaires de ces mêmes masses sur leur orbite réelle; les quantités ρ, ω, z, ... sont très petites au moins pendant un certain temps. Nous pourrons alors écrire les équations du mouvement sous la forme suivante :

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \mathrm{R}, \tag{5}$$

R étant une série ordonnée suivant les puissances de ρ, ω, z, ρ', ω', z' et de leurs dérivées du premier ordre et dont les coefficients dépendent de r, r' et $v - v'$, et sont par conséquent des fonctions périodiques du temps avec la période 2π. Il faut y ajouter cinq équations de même forme qui donnent les valeurs de

$$\frac{d^2\omega}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}, \quad \frac{d^2\rho'}{dt^2}, \quad \frac{d^2\omega'}{dt^2}, \quad \frac{d^2z'}{dt^2}.$$

On peut appliquer à ces équations les méthodes de M. Lindstedt et d'autres encore qui conduisent à des résultats sur lesquels je reviendrai plus tard.

Aujourd'hui je supposerai que ρ, ω, ..., qui sont de l'ordre des excentricités et des inclinaisons, soient assez petits pour qu'on puisse négliger leurs carrés ; les équations se réduiront à des équations linéaires (5) admettant pour coefficients des fonctions périodiques du temps avec la période 2π.

L'intégrale générale de l'équation (5) est de la forme

$$\rho = \mathrm{F} + t\Phi,$$

où F et Φ sont des séries trigonométriques. Le dernier terme est séculaire; mais *on peut toujours choisir l'orbite intermédiaire de façon que ce terme soit nul.* Les différences ρ, ω, z, ... sont alors exprimables par des séries trigonométriques.

Voici quelle me semble pouvoir être l'utilité de l'étude des équations (5). Dans le calcul des variations séculaires des excentricités, on est conduit à des équations qui sont linéaires comme les équations (5), mais où les coefficients sont des séries trigonométriques de plusieurs arguments (deux, dans le cas de trois corps). On supprime ensuite tous les termes périodiques pour ne conserver que les termes constants. Il n'est pas sûr qu'on ne commette pas ainsi une erreur considérable; car, si l'on faisait l'intégration en tenant compte des termes périodiques, les approximations successives introduiraient des termes à petit argument qui pourraient exercer une influence appréciable sur la valeur de la période des excentricités. Au contraire, en étudiant les équations (5), on ne rencontrera pas cette difficulté, puisque les coefficients ne dépendent que d'un seul argument. L'étude de cette équation permettra donc de se rendre compte de la grandeur de l'erreur commise par la méthode ordinaire.

NOTICE SUR LES RAIES TELLURIQUES DU SPECTRE SOLAIRE ET EN PARTICULIER SUR LE GROUPE α;

PAR M. A. CORNU.

Depuis les travaux de Brewster et de M. Janssen, on distingue dans le spectre solaire deux espèces de raies sombres : les unes dont l'aspect reste toujours le même, les autres qui deviennent plus larges et plus sombres à mesure que le Soleil s'approche de l'horizon. Les premières, pour la plupart identifiées avec les raies brillantes de vapeurs métalliques (fer, magnésium, calcium, sodium, nickel, etc.) ont été attribuées à l'absorption produite par les substances métalliques vaporisées à la surface du Soleil; les autres, en raison de leur intensité variable avec l'épaisseur atmosphérique traversée par les rayons solaires, s'expliquent par l'absorption élective que produisent les vapeurs ou les gaz froids de l'atmosphère terrestre : on doit donc distinguer les raies *solaires* et les raies *telluriques*.

Les désignations des principaux groupes de raies par des lettres A, B, C, ..., H, a, b, ..., imaginées dès le début par Fraunhofer (1817), c'est-à-dire, bien avant les travaux précités, n'établissent aucune distinction entre ces deux sortes de raies; quelques lettres nouvelles ont même été ajoutées, de sorte qu'actuellement la nomenclature des raies ne présente aucune symétrie et prêterait à la confusion, si le nombre de groupes à distinguer n'était fort restreint. Voici, en effet, le résumé de nos connaissances à ce sujet.

Parmi les huit raies principales primitivement dénommées par Fraunhofer depuis A jusqu'à H, pour séparer *à peu près* les sept couleurs principales du spectre (A, rouge extrême; B, rouge; C, orangé; D, jaune; E, vert; F, bleu; G, indigo; H, violet) six d'entre elles sont caractéristiques d'éléments métalliques et sont d'origine solaire (C et F, hydrogène; D, sodium; E, G, fer; H, calcium); les deux autres, A et B, sont telluriques.