» Cette droite perce $\beta$ en un point P. Or tout plan qui passe par P rencontre $R_3$ en des points BCD, qui peuvent être substitués à $B_5C_5D_5$ pour la recherche de $A_5$ (¹).

» Or, si l'on choisit arbitrairement deux points B, C sur $R_3$, le troisième point D se construira linéairement.

» Si l'Académie veut bien nous le permettre, nous montrerons, dans une prochaine Communication, comment cette méthode s'applique à la construction des courbes du quatrième ordre. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les courbes définies par les équations différentielles.* Note de M. **H. Poincaré**, présentée par M. Hermite.

« Dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie le 13 février 1882, j'ai étudié les points singuliers des courbes de l'espace définies par les équations

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}, \tag{1}$$

où X, Y et Z sont des polynômes entiers en $x$, $y$ et $z$. Mais l'étude de ces courbes dans le voisinage d'un point singulier ne nous donnerait qu'une idée imparfaite de leur forme générale. Il est nécessaire d'introduire ici un genre nouveau de considérations.

» Il faut d'abord chercher à reconnaître si, parmi les courbes qui satisfont aux équations (1) et que j'appellerai, pour abréger, les courbes C, il y a des courbes fermées; on y parviendra en appliquant des procédés analogues à ceux que j'ai employés dans ma Note du 23 juillet 1883. Supposons donc qu'on ait trouvé parmi les courbes C une courbe fermée $C_0$, et étudions la forme des courbes C dans le voisinage de $C_0$.

» Prenons pour origine un point de $C_0$; soit $(x, y)$ un point du plan des $xy$ très voisin de cette origine. Par ce point passera une courbe C qui viendra couper de nouveau le plan des $xy$ en un point $(x_1, y_1)$. En général, $x_1$ et $y_1$, qui s'annuleront en même temps que $x$ et $y$, seront des fonctions holomorphes de ces coordonnées initiales, de sorte qu'on aura

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= \alpha x + \beta y + \ldots, \\ y_1 &= \gamma x + \delta y + \ldots. \end{aligned} \right. \tag{2}$$

(¹) Nous avions déjà fait usage d'un artifice semblable dans le cas du troisième ordre. Voir notre Mémoire *Sur les surfaces du troisième ordre* (*Acta mathematica*, t. III, p. 184).

» *Premier cas.* — Si $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$, les courbes C qui passent dans le voisinage de $C_0$, après s'être approchées d'abord de cette courbe, finissent par s'en éloigner.

» *Deuxième cas.* — Si $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$, $\alpha + \delta \lesseqgtr 0$, on peut construire une surface qui enveloppe $C_0$ et qui ne touche en aucun point aucune des courbes C. C'est une *surface sans contact* qu'une courbe C ne peut traverser qu'une fois. Un point qui décrira la courbe C se rapprochera indéfiniment de la courbe $C_0$.

» *Troisième cas.* — Supposons maintenant $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$, $\alpha + \delta = 0$; si une infinité d'autres conditions où entrent les coefficients des termes d'ordre supérieur des développements (2) ne sont pas remplies à la fois, il y a encore une surface sans contact, et l'on retombe sur le cas précédent.

» *Quatrième cas.* — Supposons maintenant que toutes ces conditions, dont je viens de parler, soient remplies à la fois. Il pourra se faire alors qu'il existe une surface S sur laquelle la courbe C reste constamment, et qu'elle remplisse complètement (*überalldicht*).

» *Cinquième cas.* — Mais il peut arriver aussi qu'il n'existe pas de pareille surface, et que les coordonnées $x, y, z$ d'un point de la courbe C puissent croître sans limite. Dans ce cas, la courbe C remplit complètement (*überalldicht*) l'espace tout entier.

» *Sixième cas.* — Enfin il peut se faire que la courbe C ne reste pas constamment sur une surface, mais qu'elle reste constamment à l'*intérieur* d'une certaine surface, de sorte qu'elle remplisse complètement (*überalldicht*) non l'espace tout entier, mais toute une région de l'espace.

» Voyons maintenant comment ce qui précède peut se rattacher à la question de la convergence des séries de M. Lindstedt.

» Nous pourrons écrire les équations de la courbe $C_0$ sous la forme

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \theta(t), \tag{3}$$

$\varphi$, $\psi$ et $\theta$ étant des séries ordonnées suivant les sinus et cosinus des multiples de $t$. Posons ensuite, pour une courbe C voisine de $C_0$,

$$x = \varphi(t) + \delta x, \quad y = \psi(t) + \delta y, \quad z = \theta(t) + \delta z;$$

les équations (1) deviendront

$$\frac{d\,\delta x}{dt} = \frac{dX}{dx}\delta x + \frac{dX}{dy}\delta y + \frac{dX}{dz}\delta z + \frac{1}{2}\frac{d^2X}{dx^2}\delta x^2 + \ldots, \tag{4}$$

avec deux équations analogues donnant les valeurs de $\frac{d\,\delta y}{dt}$ et $\frac{d\,\delta z}{dt}$.

» Dans les équations (4), on a remplacé, dans les coefficients $\frac{dX}{dx}$, $\frac{dX}{dy}$, ..., $x$, $y$ et $z$ par leurs valeurs (3). Ces coefficients sont donc des fonctions périodiques de $t$ avec la période $2\pi$, de sorte que les équations (4) sont bien de la forme étudiée par M. Lindstedt.

» Appliquons donc à ces équations la méthode de ce savant. Dans les trois premiers cas, il s'introduira des termes séculaires dans les séries auxquelles on sera conduit, et la méthode ne s'appliquera pas. Dans les trois derniers cas, au contraire, et c'est ce qui arrive en général dans les équations de la Dynamique, il n'y aura jamais de pareil terme, et les séries trigonométriques existeront toujours. Mais, dans le quatrième cas, elles seront convergentes et même uniformément convergentes pour toutes les valeurs de $t$; dans le cinquième cas, elles seront encore convergentes, mais pas uniformément (*gleichmässig*). Dans le sixième cas enfin, elles ne sont plus convergentes. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une classe de fonctions abéliennes et sur un groupe hyperfuchsien.* Note de M. E. **Picard**, présentée par M. Hermite.

« On sait que, à côté de nombreuses analogies, la théorie des fonctions $\Theta$ de $p$ variables présente avec la théorie des fonctions $\Theta$ d'une seule variable des différences très sensibles, et celles-ci apparaissent surtout dans les questions relatives à la transformation. Peut-être cependant existe-t-il, pour chaque valeur du nombre $p$, des classes particulières de fonctions $\Theta$, dont l'étude relativement plus simple conduirait à des résultats se rapprochant davantage de ceux que l'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques. C'est un point qui paraîtra probable, si l'on considère une classe particulière de fonctions $\Theta$ relatives à $p = 3$, que j'ai rencontrée dans une recherche précédente, et dont il m'a paru intéressant de faire une étude plus complète.

» Soit

$$\varphi(m_1, m_2, m_3) = am_1^2 + bm_2^2 + cm_3^2 + 2dm_1m_2 + 2em_2m_3 + 2fm_3m_1$$

la forme quadratique servant à définir les fonctions $\Theta$. Nous particularisons les six coefficients de cette forme en posant (on désigne par $\lambda$ la racine cu-