ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les groupes hyperfuchsiens.* Note de M. **H. Poincaré**, présentée par M. Hermite.

« Les substitutions hyperfuchsiennes se subdivisent en substitutions elliptiques et hyperboliques, si on laisse de côté certains cas particuliers. Appelons *polaire* du point (α, β) la droite

$$\alpha_0 x + \beta_0 y = 1.$$

» Dans les substitutions elliptiques, la polaire de chacun des trois points doubles passe par les deux autres. Dans les substitutions hyperboliques, deux des points doubles sont sur l'hypersphère

$$xx_0 + yy_0 = 1, \tag{1}$$

et le troisième est le pôle de la droite qui joint les deux autres. Soient (α, β) et (γ, δ) les deux premiers points doubles situés sur l'hypersphère.

» Considérons l'hypersphère

$$(x-\alpha)(x_0-\alpha_0) + (y-\beta)(y_0-\beta_0) = \varepsilon^2, \tag{2}$$

où je supposerai que ε est très petit. On peut toujours supposer que le multiplicateur de la substitution hyperbolique est assez grand pour que les transformés de tous les points de l'hypersphère (2) qui sont intérieurs à l'hypersphère (1) soient aussi près que l'on veut du point (γ, δ). Cela ne serait plus vrai des points extérieurs à (1).

» Cela posé, imaginons n substitutions hyperboliques $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Soient (α_i, β_i) et (γ_i, δ_i) les points doubles de S_i. Soient Σ_i une hypersphère

$$(x-\alpha_i)(x_0-\alpha_{i0}) + (y-\beta_i)(y_0-\beta_{i0}) = \varepsilon_i^2$$

et Σ'_i la transformée de cette sphère par S_i. On peut toujours supposer les ε assez petits et les multiplicateurs des substitutions assez grands pour que les Σ_i et les Σ'_i n'aient aucun point commun *à l'intérieur de l'hypersphère* (1).

» Envisageons un domaine D limité par l'hypersphère (1) et par les surfaces Σ_i et Σ'_i. D pourra être regardé comme le domaine générateur du groupe des substitutions S. La considération de ce domaine montre que ce groupe est discontinu à l'intérieur de l'hypersphère (1). La discontinuité peut même s'étendre à un domaine plus vaste, mais non pas à toutes les valeurs des variables.

» On est donc ainsi conduit à une classe de groupes hyperfuchsiens, tout à fait différente de la classe découverte par M. Picard et analogue à la troisième famille de groupes fuchsiens.

» Pour pouvoir appliquer à la théorie des groupes hyperfuchsiens les méthodes qui m'ont réussi dans l'étude des groupes fuchsiens, il est nécessaire de généraliser la notion des invariants analogues à la longueur, à l'angle et à la surface. Posons

$$\begin{aligned} xx_0 + yy_0 &= \rho^2, \\ x_0\,dx + y_0\,dy = \rho\,dt, &\quad x\,dx_0 + y\,dy_0 = \rho\,dt_0, \\ y\,dx - x\,dy = \rho\,du, &\quad y_0\,dx_0 - x_0\,dy_0 = \rho\,du_0. \end{aligned}$$

» L'intégrale

$$\int\sqrt{\frac{dt\,dt_0}{(1-\rho^2)^2} + \frac{du\,du_0}{1-\rho^2}}$$

est un invariant analogue à la longueur.

» Il existe aussi un invariant qui doit être assimilé à l'angle. Soient M, N, P trois points dont les coordonnées soient (x, y), $(x + dx, y + dy)$, $(x + \delta x, y + \delta y)$; l'invariant φ, analogue à l'angle NMP, sera défini par l'équation

$$\cos^2\varphi = \frac{\left[\dfrac{du\,\delta u_0 + du_0\,\delta u}{(1-\rho^2)^2} + \dfrac{dt\,\delta t_0 + dt_0\,\delta t}{1-\rho^2}\right]^2}{4\left[\dfrac{du\,du_0}{(1-\rho^2)^2} + \dfrac{dt\,dt_0}{1-\rho^2}\right]\left[\dfrac{\delta u\,\delta u_0}{(1-\rho^2)^2} + \dfrac{\delta t\,\delta t_0}{1-\rho^2}\right]}.$$

» Il existe également des invariants analogues à la surface ou au volume à trois ou à quatre dimensions.

» Celui de ces invariants qui est analogue au volume à quatre dimensions a déjà été signalé par M. Picard. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la décomposition des nombres en cinq carrés*; par M. A. **Hurwitz**. (Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite.)

« M. Stieltjes vous a communiqué, dans une Lettre insérée aux *Comptes rendus* du 31 décembre 1883, des résultats intéressants qui se rattachent à la décomposition d'un nombre entier en cinq carrés.

» A la fin de sa Lettre, M. Stieltjes indique une proposition qu'il a trouvée