pliquer la formule (11) à chacun des deux massifs hétérogènes entre lesquels se trouve compris le massif homogène proposé, pour avoir, en prenant finalement la demi-somme des deux résultats, l'angle moyen α de la surface de rupture avec la verticale. C'est ce que confirment d'autres expériences de M. Gobin. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une équation différentielle.* Note de M. **H. Poincaré**, présentée par M. Hermite.

« Dans l'application de sa méthode générale pour l'étude des mouvements des corps célestes, M. Gyldén a été conduit à une équation de la forme suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_0 + x\varphi_1 + x^2\varphi_2 + \ldots + x^m\varphi_m + \ldots, \tag{1}$$

où les φ sont des séries trigonométriques. MM. Gyldén et Lindstedt ont donné des procédés d'intégration de cette équation par approximations successives. Cette circonstance peut donner quelque intérêt à l'étude de cette équation différentielle.

» Je supposerai, pour fixer les idées, que le terme tout connu φ_0 est identiquement nul, et que les autres φ ne dépendent que d'un seul argument, par exemple que ces fonctions soient développées suivant les cosinus et les sinus des multiples de t, de façon à admettre la période 2π.

» Posons

$$y = \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = x\varphi_1 + x^2\varphi_2 + \ldots.$$

» Soit maintenant F une fonction de x, de y et de t,

$$F = F_2 + F_3 + F_4 + \ldots, \tag{2}$$

où F_m est un polynôme homogène de degré m en x et y, ayant pour coefficients des fonctions périodiques de t de période 2π. Soit ensuite

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}y + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \ldots, \tag{3}$$

où Φ_m est un polynôme homogène de degré m en x et y, ayant pour coefficients des fonctions périodiques de t. Nous allons chercher à déterminer les m premiers termes de la série (2), de façon que les m premiers termes de la série (3) soient identiquement nuls. On est conduit à l'équation suivante, qui définit F_m quand on connaît $F_2, F_3, \ldots, F_{m-1}$:

$$(4)\qquad \frac{\partial F_m}{\partial t} + \frac{\partial F_m}{\partial x} y + \frac{\partial F_m}{\partial y} x\varphi_1 + \sum \frac{\partial F_p}{\partial y} x^{m-p+1} \varphi_{m-p+1};$$

où p varie sous le signe Σ depuis 2 jusqu'à $m - 1$.

» Il semble, au premier abord, que l'intégration de cette équation introduira des termes séculaires dans l'expression de F_m. Il n'en est rien. Les termes séculaires sont tous nuls.

» Il en résulte qu'il existe toujours une série de la forme (2) qui satisfait *formellement* à l'équation $\frac{dF}{dt} = 0$; mais, comme cette série n'est pas convergente, en général, on pourrait croire que l'on ne peut tirer aucune conclusion de l'existence de cette série.

» Ce serait une erreur, et, pour le faire comprendre, je vais ajouter au second membre de l'équation (1) un terme

$$\psi x^p y^q,$$

de façon que cette équation devienne

$$(1\ bis)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = x\varphi_1 + x^2\varphi_2 + \ldots + x^m\varphi_m + \ldots + \psi x^p \left(\frac{dx}{dt}\right)^q,$$

ψ étant une fonction périodique de t de période 2π. Cherchons ensuite à former une série

$$F = F_2 + F_3 + \ldots + F_m + \ldots$$

qui satisfasse formellement à l'équation $\frac{dF}{dt} = 0$. On verrait, dans l'un des termes F_m de cette série, la variable t sortir des signes trigonométriques. On en conclurait l'existence d'une fonction $f(x, y, t)$ jouissant des propriétés suivantes :

» 1° C'est un polynôme entier en x et y, dont les coefficients sont des fonctions périodiques de t de période 2π.

» 2° Quand f est très petit, x et y sont très petits et réciproquement, quand x et y sont très petits, f est très petit.

» 3° Quand f est inférieur à une certaine limite f_0, sa dérivée totale $\frac{df}{dt}$ est toujours de même signe, par exemple positive.

» Il en résulte que, si la valeur initiale de f est inférieure à f_0, f ira en croissant jusqu'à ce qu'il ait atteint et dépassé la valeur f_0, et, après avoir franchi cette limite, il ne pourra jamais redevenir inférieur à f_0. En d'autres termes, si x et y sont originairement très petits, non seulement ils ne resteront pas très petits, mais ils ne pourront jamais le redevenir après avoir cessé de l'être.

» *Tel est le cas général,* et, dans le cas particulier où nous nous étions placé d'abord, la disparition des termes séculaires prouve précisément l'impossibilité de trouver une fonction f dont la dérivée totale $\frac{df}{dt}$ soit toujours de même signe quand x et y sont suffisamment petits.

» Il résulte de là et de considérations que je ne puis développer ici que les quantités x et y pourront cesser d'être très petites, *mais pour le redevenir ensuite.* Il y a exception, toutefois, quand un certain nombre est commensurable.

» Dans le cas où la série (2) serait convergente, x et y resteraient toujours très petits. »

ÉLECTRICITÉ. — *Distribution du potentiel dans une plaque rectangulaire, traversée par un courant électrique dont le régime est permanent.* Note de M. A. Chervet.

« Lemme. — *Soit la série*

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \log \frac{e^{\pi\frac{y+2nb}{a}} + e^{-\pi\frac{y+2nb}{a}} + 2\cos\pi\frac{x}{a}}{e^{\pi\frac{y+2nb}{a}} + e^{-\pi\frac{y+2nb}{a}} + 2\cos\pi\frac{x}{a}},$$

dans laquelle n est un nombre entier qui varie depuis $-\infty$ *jusqu'à* $+\infty$.

» C'est une fonction de deux variables, paire par rapport à chacune d'elles, à deux groupes de périodes $(0, 2b)$ et $(2a, 0)$, c'est-à-dire que l'on a

$$\Phi(x, y) = \Phi(-x, y) = \Phi(x, -y) = \Phi(-x, -y),$$
$$\Phi(x, y) = \Phi(x + 0, y + 2b) = \Phi(x + 2a, y + 0),$$
$$\Phi(x, y) = \Phi(2a - x, y) = \Phi(x, 2b - y).$$

» Les courbes définies par l'équation $\Phi(x, y) =$ const. couperont orthogonalement les quatre côtés du rectangle $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$. S le point (x, y) se déplace à l'intérieur de ce rectangle, la série est positive pour $x < \frac{a}{2}$, nulle pour $x = \frac{a}{2}$, négative pour $x > \frac{a}{2}$. Sa valeur est $+\infty$ pour $x = 0$, $y = 0$; elle est égale à $-\infty$ pour $x = a$, $y = 0$.