

ques à deux maxima et des époques à un maximum seulement par hémisphère : c'est probablement à des conditions analogues de circulation que l'on pourrait attribuer les surélévations constatées sur le contour apparent de Vénus, c'est-à-dire que la planète serait encore à l'état gazeux. »

MÉTÉOROLOGIE. — *Sur une auréole rouge, observée autour de la Lune.*
Lettre de M. P. TACCHINI à M. le Président.

« Rome, 13 juillet 1884.

» Le 4 juillet, j'ai observé, au commencement de la nuit, un magnifique halo lunaire ; à 9^h30^m, la Lune se montrait colorée en rouge, avec une auréole rougeâtre, dont la largeur était d'un diamètre lunaire à peu près ; la teinte était à peu près celle du rouge du cuivre. Cette coloration a été également observée par un de mes assistants, M. Lugli, et par d'autres personnes. La hauteur de l'astre était à peu près de 30°. Les nuages n'ont pas permis de suivre le phénomène après 10^h.

» Le 5, on a vu un phénomène semblable, mais bien plus faible ; le 6, le ciel était voilé ; et ensuite le phénomène n'a plus été visible.

» Il est intéressant de noter que, pendant les nuits des 4, 5 et 6, nous avons eu une humidité excessive, à partir de 9^h du soir jusqu'à 5^h et 6^h du matin, une saturation presque complète, tandis que, pendant le jour, le degré d'humidité tombait à 0,40. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur un théorème de M. Fuchs.*

Note de M. H. POINCARÉ, présentée par M. Hermite.

« M. Fuchs a présenté dernièrement à l'Académie de Berlin un travail où il étudie les conditions pour que les intégrales d'une équation différentielle algébrique n'aient qu'un nombre fini de points singuliers qui soient les mêmes pour toutes les intégrales. On comprend aisément quel intérêt il y a à rechercher s'il existe de pareilles équations et à les former, si elles existent. En effet, les procédés qui permettent d'intégrer les équations linéaires par le moyen des fonctions fuchsiennes leur seraient applicables, et l'on serait ainsi conduit à une classe nouvelle d'équations différentielles intégrables à l'aide des nouvelles transcendentes.

» M. Fuchs donne, pour les équations du premier ordre, les conditions nécessaires et suffisantes pour que le nombre des points singuliers des intégrales soit fini. Il commence ensuite une discussion à laquelle je vou-

drais ajouter quelques remarques. Si l'on met l'équation sous la forme

$$(1) \quad F\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right) = 0,$$

et si l'on regarde un instant la variable indépendante z comme une constante, la relation algébrique entre y et $\frac{dy}{dz}$ aura un certain genre que j'appelle p .

» Dans le cas où $p = 0$, M. Fuchs montre que l'équation se ramène à celle de Riccati, et par conséquent aux équations linéaires. Je n'ai rien à ajouter sur ce cas.

Si l'on a $p = 1$, M. Fuchs montre que l'équation peut se ramener à la forme

$$(2) \quad \frac{dt}{dz} = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 \sqrt{R(t)},$$

où les A sont des fonctions de z et où R est un polynôme du quatrième degré en t dont les coefficients sont des fonctions de z et qui satisfait à la relation

$$(3) \quad \frac{dR}{dz} + \frac{dR}{dt}(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) = (B_0 + B_1 t) R.$$

» Il est possible de simplifier encore cette équation. Posons, en effet,

$$t = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta},$$

α, β, γ et δ étant des fonctions de z ; les équations (2) et (3), où t sera remplacé par u , conserveront la même forme; mais on aura pu choisir α, β, γ et δ de telle façon que le nouveau polynôme R ,

$$R' = u^4 + 2Cu^2 + 1,$$

C étant une fonction de z . Les équations (2) et (3) deviennent alors

$$\frac{du}{dz} = A_3 \sqrt{R'}, \quad \frac{dC}{dz} = 0,$$

ce qui montre que C , et par conséquent le module des fonctions elliptiques dérivées du radical $\sqrt{R'}$, sont des constantes absolues indépendantes de z . L'intégration de ces équations se ramène à de simples quadratures.

» On peut d'ailleurs arriver au même résultat et poursuivre la discussion pour le cas de $p > 1$, par le moyen suivant.

» Soient y_0 et y'_0 les valeurs d'une intégrale y et de sa dérivée $\frac{dy}{dz}$ pour $z = z_0$; soient y_1 et y'_1 les valeurs de cette même intégrale y et de sa dérivée pour $z = z_1$; il est aisé de voir que y_1 et y'_1 sont des fonctions rationnelles de y_0 et y'_0 , et réciproquement. Ainsi les deux surfaces de Riemann

$$(s_0) \quad F\left(z_0, y, \frac{dy}{dz}\right) = 0,$$

$$(s_1) \quad F\left(z_1, y, \frac{dy}{dz}\right) = 0,$$

où z_0 et z_1 sont regardés comme des constantes, et où les variables sont y et $\frac{dy}{dz}$, ont non seulement même genre, mais encore mêmes modules. Les modules de la surface de Riemann représentée par l'équation (1) sont donc constants et indépendants de z .

» Cela posé, ou bien la surface S_1 ne pourra dériver de la surface S_0 par une transformation birationnelle que d'un nombre fini de manières; dans ce cas, on pourra déterminer ces transformations, et par conséquent l'intégrale générale de l'équation (1) par des procédés purement algébriques: cette intégrale sera donc algébrique; ou bien les deux surfaces pourront dériver l'une de l'autre par une infinité de transformations birationnelles, ce qui signifie que l'une d'elles, S_0 par exemple, sera reproduite par une infinité de pareilles transformations. Mais cela ne peut jamais avoir lieu si $p > 1$. Dans le cas de $p = 1$, on retrouverait d'ailleurs aisément le résultat énoncé plus haut.

» En résumé, on peut tirer du beau théorème de M. Fuchs les conséquences suivantes, en laissant de côté le cas de $p = 0$, complètement traité par le savant géomètre de Berlin.

» Si les conditions énoncées par M. Fuchs sont remplies pour une équation du premier ordre, et si $p = 1$, l'équation est intégrable par quadratures. Si $p > 1$, l'intégrale est algébrique.

» Il serait intéressant de rechercher si, dans le cas des équations d'ordre supérieur, on arrive à des théorèmes analogues, ou si, au contraire, on est conduit à une classe essentiellement nouvelle d'équations intégrables par les fonctions fuchsiennes. »