# MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

## SUR L'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE ANIMÉE D'UN MOUVEMENT DE ROTATION;

Par M. H. POINCARÉ [1]

On s'est préoccupé depuis longtemps de déterminer les figures d'équilibre d'une masse fluide homogène dont toutes les molécules s'attirent d'après la loi newtonienne et qui est animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe. On est même arrivé assez promptement à deux solutions du problème, les ellipsoïdes de révolution et les ellipsoïdes de Jacobi; mais on ignorait jusqu'à ces derniers temps s'il existait d'autres figures d'équilibre possible. Dans la dernière édition de leur *Traité de Philosophie naturelle* (1er vol., 2e Part., p. 332), MM. Tait et Thomson ont énoncé sans démonstration un certain nombre de résultats fort intéressants. Ils annoncent, par exemple, trois classes nouvelles de figures d'équilibre, à savoir :

1° Un système de deux ou plusieurs masses sphéroïdales, animé d'un mouvement de rotation commun autour d'un certain axe dans l'espace.

2° Une surface annulaire de révolution, analogue à un tore.

3° Un système de plusieurs anneaux concentriques, animés d'une même vitesse de rotation autour de leur axe commun.

Je n'ai rien à ajouter sur la première solution, qui est celle à laquelle on est conduit en envisageant le système d'une planète et d'un satellite dont l'excentricité serait nulle et dont les deux vitesses de rotation seraient égales entre elles et à celle de révolution; ou bien encore le système de plusieurs masses se mouvant en restant

(1) Je viens de recevoir communication d'un Mémoire de Mme de Kowalewsky dont je n'avais pas connaissance au moment où j'ai rédigé le présent travail. Ce Mémoire, intitulé *Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnsringe*, a été écrit en 1874 et envoyé à cette époque à l'Université de Göttingen; mais il vient seulement d'être imprimé dans le n° 2643 des *Astronomische Nachrichten*. Bien que le problème traité par la savante mathématicienne ne soit pas tout à fait le même que celui dont je me suis occupé, son analyse se rapproche beaucoup de la mienne et je n'ai ajouté que peu de chose aux résultats qu'on pourrait facilement déduire de son Mémoire.

en ligne droite, conformément aux principes du Chapitre VI du Livre X de la *Mécanique céleste*.

Mais je crois utile de revenir sur la deuxième solution, en donnant une démonstration du résultat de MM. Tait et Thomson et en cherchant à déterminer approximativement les principaux éléments de la figure annulaire d'équilibre.

Dans des questions de cette nature, on ne peut compter sur les méthodes d'approximation successive pour démontrer rigoureusement la possibilité d'une solution. Il faut au contraire faire usage de considérations de continuité, ainsi que je l'ai fait dans ma Note sur certaines intégrales particulières du problème des trois corps. L'existence de la solution une fois rigoureusement établie, on se sert ensuite des méthodes habituelles pour la calculer approximativement.

Je choisirai les trois unités fondamentales de longueur, de temps et de masse de telle façon que la densité de la masse fluide que je considère soit égale à 1 et que l'unité de force soit l'attraction newtonienne de deux unités de masses à l'unité de distance. J'envisagerai une figure annulaire de révolution très peu différente d'un tore. J'appellerai R la distance du centre de gravité de la section méridienne à l'axe de révolution. Je supposerai de plus que la perpendiculaire abaissée sur l'axe de révolution de ce centre de gravité soit un axe de symétrie de cette section méridienne.

Il reste à écrire l'équation de la section méridienne. Pour cela je prendrai pour pôle le centre de gravité et pour axe polaire l'axe de symétrie de cette section, et j'aurai pour cette équation, en appelant $\rho$ et $\varphi$ les coordonnées polaires,

$$\rho = r + \beta_2 \cos 2\varphi + \beta_3 \cos 3\varphi + \ldots + \beta_n \cos n\varphi + \ldots.$$

Je supposerai que les rapports $\frac{r}{R}$, $\frac{\beta_n}{r}$ sont très petits, ainsi que la vitesse angulaire de rotation $\omega$.

J'envisagerai le potentiel V et l'énergie potentielle W.

$$V = \int \frac{dm}{\Delta}, \quad W = \int \frac{dm\, dm'}{\delta},$$

$dm$ et $dm'$ désignant deux éléments de masse de notre fluide, $\Delta$ étant la distance de l'élément $dm$ au point P dont les coordonnées sont $x$, $y$ et $z$, et $\delta$ étant la distance des deux éléments $dm$

et $dm'$. Le potentiel V est une fonction de $x, y$ et $z$, tandis que W est une constante qui ne dépend que de la forme de la surface.

Pour que la surface soit une figure d'équilibre, il suffit que l'expression

$$W + \frac{\omega^2 I}{2},$$

où I est le moment d'inertie de la surface par rapport à son axe de révolution, voie s'annuler toutes ses dérivées premières par rapport à R et aux $\beta$.

Étudions donc les variations de cette expression quand on fait varier $\omega$, $r$, R, et les $\beta_n$, et montrons que ces dérivées devront s'annuler pour des valeurs de ces quantités variables satisfaisant aux conditions de grandeur relative que nous nous sommes imposées.

Soient $dS$ et $dS'$ deux éléments de l'aire de la section méridienne, $y$ et $y'$ les distances de ces éléments à l'axe de révolution. Ces éléments engendreront par leur révolution deux anneaux infinitésimaux dont les masses seront

$$\mu = 2\pi y dS \quad \text{et} \quad 2\pi y' dS' = \mu'.$$

Soient $a$ et $b$ la plus petite et la plus grande distance de ces deux anneaux infinitésimaux, M $(a, b)$ la moyenne arithmético-géométrique de Gauss de ces deux distances. L'énergie potentielle provenant de l'attraction mutuelle de ces deux anneaux s'écrira

$$\frac{\mu\mu'}{M(a,b)} = \frac{\mu\mu'}{\pi} \frac{J}{\sqrt{b^2 - a^2}},$$

où

$$J = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(z+x)}}, \quad x = \frac{a^2}{b^2 - a^2}.$$

La théorie des fonctions elliptiques nous enseigne que, lorsque $x$ est très petit, J peut se mettre sous la forme

$$\varphi(x) \log x + \psi(x),$$

$\varphi$ et $\psi$ étant des séries ordonnées suivant les puissances de $x$ et dont il est aisé de calculer les coefficients. Le terme de degré le moins élevé dans cette expression est

$$-\log \frac{x}{16}.$$

Nous aurons

$$W = \int\int \frac{\mu\mu' J}{\pi\sqrt{b^2 - a^2}} = \int\int 2\pi\sqrt{yy'}\, J\, dS\, dS'.$$

Si l'on réduisait $\sqrt{yy'}$ à sa valeur approchée R et J à sa valeur approchée $\log\frac{16}{x}$ ou encore $2\log\frac{8R}{a}$, on trouverait

$$W = 4\pi\int\int R\log\frac{8R}{a}\, dS\, dS'.$$

Nous pourrons donc poser

$$W = 4\pi\int\int R\log\frac{8R}{a}\, dS\, dS' + W',$$

le rapport $\frac{W'}{W}$ étant de même ordre de grandeur que $\frac{r}{R}$.

On trouve d'autre part, sans trop de difficultés,

$$4\pi\int\int R\log\frac{8R}{a}\, dS\, dS' = \frac{\pi^2 r^4 R}{2}\left(\log\frac{8R}{r} + \frac{1}{4}\right) + \frac{\pi^2 r^2 R}{2}\sum \beta_n^2\left(\frac{1}{n} - 1\right) + W'',$$

$W''$ contenant en facteurs des puissances supérieures des $\beta$.

Pour le moment d'inertie I on trouve

$$I = \pi^2\left(2r^2R^3 + \frac{3}{2}Rr^4\right) + I',$$

$I'$ s'annulant avec les $\beta$.

Nous poserons, pour abréger,

$$W + \frac{\omega^2 I}{2} = U.$$

Pour qu'il y ait équilibre, il suffit que, pour toute déformation virtuelle infiniment petite de notre surface, la variation $\delta U$ soit nulle. Or toute déformation virtuelle peut être considérée comme la somme de deux autres que nous pourrons étudier séparément.

Dans la première déformation, R reste constant. La variation $\delta U$ dépend alors des variations des quantités $\beta$. Si, d'autre part, nous appelons M la masse totale de notre fluide, nous aurons

$$M = 2\pi^2 R\left(r^2 + \Sigma\frac{\beta_n^2}{2}\right).$$

Il suit de là que, si R est constant, il devra en être de même de

$$r^2 + \Sigma \frac{\beta_n^2}{2} = r_0^2.$$

On peut donc écrire

$$U = \frac{\pi^2 \pi_0^4 R}{2} \log \frac{\lambda R}{r_0} + \Sigma \beta_n^2 \frac{\pi^2 \pi_0^2 R}{2} \left( \frac{1}{n} - 1 - \log \frac{\lambda R}{r_0} + \frac{1}{8} \right) + \frac{\omega^2}{2} I_0 + U'$$

Dans cette formule on a posé

$$\lambda = 8 e^{\frac{1}{4}}, \quad I_0 = \pi^2 \left( 2 r_0^2 R^3 + \frac{3}{2} R r_0^4 \right),$$

et le rapport $\frac{U'}{U}$ est infiniment petit.

Soit $U_0$ la valeur de U quand on y annule tous les $\beta$; soit $U_1$ la valeur de U quand on donne aux $\beta$ des valeurs telles que

$$\Sigma \beta_n^2 = K r_0^2,$$

K étant une quantité très petite, mais d'ordre moindre que $\frac{U'}{U}$. On trouve alors

$$U_1 - U_0 = AK + U'_1 - U'_0,$$

A étant un coefficient négatif dépendant de R et de $r_0$. On en déduit, en tenant compte des hypothèses faites sur les grandeurs relatives des quantités K et U' :

$$U_1 < U_0.$$

D'où cette conséquence, que, si l'on fait varier les $\beta$ d'une manière continue, la quantité $\Sigma \beta_n^2$ ne pourra devenir plus grande que $K r_0^2$, sans que U passe par une valeur inférieure à $U_0$; ce qui prouve que la fonction U doit admettre un maximum pour des valeurs des $\beta$ inférieures à $r_0 \sqrt{K}$ et par conséquent très petites. Ce maximum que j'appelle $u$ est fonction de R, $r_0$ et $\omega$.

Il reste à étudier la deuxième espèce de déformation de la surface annulaire, pour laquelle R et par conséquent $r_0$ varieraient pendant que la section méridienne resterait semblable à elle-même. Il faut montrer qu'on peut trouver des valeurs de R et des $\beta$, telles que la variation $\delta U$ soit également nulle pour les deux espèces de déformations, c'est-à-dire que l'on ait à la fois

$$U = u \frac{dU}{dR} = 0.$$

Or il est aisé de vérifier l'égalité

$$\frac{dU}{dR} = -\frac{M^2}{8\pi^2}\frac{1}{R^2}\log\frac{\lambda' R}{r} + \omega^2 MR + H,$$

H représentant un ensemble de termes négligeables devant les deux termes conservés et $\lambda'$ une constante facile à déterminer.

Supposons que, R restant constant, on fasse varier $\omega$ ; $u$ sera alors une fonction de $\omega$, mais pour des valeurs suffisamment grandes de $\omega$ (lesquelles satisfont pourtant aux conditions de grandeur relative que nous nous sommes imposées) $\frac{dU}{dR}$ sera certainement positif, et pour des valeurs assez petites de $\omega$, $\frac{dU}{dR}$ sera certainement négatif. Donc, à chaque valeur de R correspond une valeur de $\omega$ telle que l'on ait à la fois

$$U = u, \quad \frac{dU}{dR} = 0.$$

C. Q. F. D.

L'existence de la forme annulaire d'équilibre étant ainsi rigoureusement établie, il nous reste à en déterminer approximativement les éléments. A cet effet, nous abandonnerons la fonction W dont nous nous sommes servis jusqu'ici pour considérer le potentiel V.

Je considère d'abord le tore et j'étudie l'expression du potentiel V en un point de sa surface; ce potentiel est évidemment une fonction de l'angle $\varphi$ qui définit la position du point de la surface sur la section méridienne. En partant de l'expression que j'ai donnée plus haut pour l'intégrale J, je suis arrivé à montrer que V pouvait se mettre sous la forme

$$V = r^2\left(v_0 + v_1 \log\frac{8R}{r}\right);$$

$v_0$ et $v_1$ étant des séries ordonnées suivant les puissances de $\frac{r}{R}$ et de $\cos\varphi$.

Les coefficients de ces séries s'expriment par des intégrales définies et les premiers termes sont

$$V = \pi r^2 \log\frac{8R}{r} + \frac{9\pi}{16}\frac{r^3}{R}\cos\varphi - \frac{\pi}{2}\frac{r^3}{R}\cos\varphi\log\frac{8R}{r} + \ldots$$

Il faut ensuite introduire dans cette expression les termes correctifs qui proviennent des coefficients que nous avons appelés $\beta$, c'est-à-dire que nous devons maintenant tenir compte de ce fait que notre figure annulaire n'est pas exactement un tore. Comme on voit sans peine que les coefficients $\beta_3$, $\beta_4$, ... sont très petits par rapport à $\beta_2$, nous négligerons ces coefficients ainsi que le carré de $\beta_2$.

Les termes correctifs que nous nous proposions de calculer se réduisent alors à

$$-\frac{\pi\beta_2 r}{2}\cos 2\varphi.$$

L'expression du potentiel V étant ainsi corrigée, nous pouvons écrire les conditions d'équilibre. La condition nécessaire et suffisante est, en effet, que l'expression

$$V + \frac{\omega^2}{2}(R + r\cos\varphi + \beta_2\cos 2\varphi\cos\varphi + \beta_3\cos 3\varphi\cos\varphi + \ldots)$$

soit indépendante de l'angle $\varphi$. Dans l'expression précédente nous négligerons tous les termes qui contiennent en facteur $\frac{r^5}{R^3}$ ou $\beta_3$, $\beta_4$, ..., ou $\beta_2^2$, ou $\omega^2\beta_2$. Elle ne contiendra plus alors que des termes en $\cos\varphi$ ou $\cos 2\varphi$. Égalons à o les coefficients de $\cos\varphi$ et $\cos 2\varphi$. Nous obtiendrons les deux équations suivantes

$$-\frac{\pi}{2}\frac{r^3}{R}\log\frac{8R}{r} + \frac{9\pi}{16}\frac{r^3}{R} + \omega^2 r R = 0,$$

$$\frac{\omega^2}{4}r^2 - \frac{\pi\beta_2 r}{2} + g\frac{r^4}{2R^2} + \frac{3\pi}{16}\frac{r^4}{R^2}\log\frac{8R}{r} = 0,$$

$g$ étant exprimé par une intégrale définie.

On tire de là les valeurs approximatives de $\omega^2$ et de $\beta_2$

$$\omega^2 = \frac{\pi}{2}\frac{r^2}{R^2}\left(\log\frac{8R}{r} - \frac{9}{8}\right)$$

et

$$\beta_2 = \frac{5}{16}\frac{r^3}{R^2}\log\frac{hR}{r},$$

$h$ étant une constante numérique exprimée par une intégrale définie.

On voit ainsi que la section méridienne peut être assimilée à une ellipse dont l'aplatissement est approximativement

$$\frac{5\omega^2}{4\pi}.$$

Quant au moment de la quantité de mouvement, il a pour valeur asymptotique

$$\mathrm{M}r\mathrm{R}\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(\log\frac{8\mathrm{R}}{r}-\frac{9}{8}\right)},$$

ce qui montre que ce moment croît indéfiniment quand R croît lui-même, tandis que la vitesse angulaire tend au contraire vers o.

Les mêmes méthodes sont applicables à la troisième solution de MM. Tait et Thomson, qui est celle où la figure d'équilibre est formée de plusieurs anneaux concentriques. L'existence de la solution se démontrerait comme plus haut. Nous allons chercher à en déterminer les éléments.

Nous prendrons seulement deux anneaux que nous assimilerons à des tores de rayons $r'$ et $\mathrm{R}'$, $r$ et R, en négligeant les aplatissements des sections méridiennes. Ces deux tores devront avoir un plan de symétrie commun, perpendiculaire à l'axe. Nous appellerons $\varphi$ l'angle que fait avec ce plan de symétrie le rayon qui joint un point M de la surface du tore au centre de la section méridienne correspondante; nous appellerons de même $\varphi'$ l'angle analogue pour le second tore. Nous supposerons $\mathrm{R} > \mathrm{R}'$. Nous appellerons $\mathrm{V}_0$ le potentiel en un point de la surface du premier tore et $\mathrm{V}'_0$ la valeur du potentiel en un point de la surface du second tore. Nous trouverons, en nous bornant aux premiers termes :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_0 &= \pi r^2 \log\frac{8\mathrm{R}'}{r'} - \frac{\pi}{2}\frac{r^3}{\mathrm{R}}\cos\varphi\left(\log\frac{8\mathrm{R}}{r}-\frac{9}{8}\right)\\ &\quad + \pi r'^2 \log\frac{8\mathrm{R}'}{\mathrm{R}-\mathrm{R}'} - \frac{\pi r'^2 r\cos\varphi}{\mathrm{R}-\mathrm{R}'},\\ \mathrm{V}'_0 &= \pi r'^2 \log\frac{8\mathrm{R}'}{r'} - \frac{\pi}{2}\frac{r'^3}{\mathrm{R}'}\cos\varphi'\left(\log\frac{8\mathrm{R}'}{r'}-\frac{9}{8}\right)\\ &\quad + \pi r^2 \log\frac{8\mathrm{R}}{\mathrm{R}-\mathrm{R}'} + \frac{\pi r^2 r'\cos\varphi'}{\mathrm{R}-\mathrm{R}'}.\end{aligned}$$

Soient $\omega$ et $\omega'$ les vitesses de rotation des deux tores; il faudra pour l'équilibre que les deux expressions

$$\mathrm{V}_0 + \frac{\omega^2}{2}(\mathrm{R}+r\cos\varphi),\quad \mathrm{V}'_0 + \frac{\omega'^2}{2}(\mathrm{R}'+r'\cos\varphi')$$

soient indépendantes de $\varphi$ et de $\varphi'$, ce qui nous donne les deux équations

$$\omega^2 R\, r - \frac{\pi r^3}{2R} \log \frac{\lambda R}{r} - \frac{\pi r'^2 r}{R - R'} = 0; \quad \lambda = 8e^{-\frac{9}{8}},$$

$$\omega'^2 R' r' - \frac{\pi r'^3}{2R'} \log \frac{\lambda R'}{r'} + \frac{\pi r^2 r'}{R - R'} = 0.$$

Si l'on veut que $\omega = \omega'$, il faut donc que l'on ait

$$M = \pi^2 r r' (R - R') \left( \frac{R r'}{r R'} \log \frac{\lambda R'}{r'} - \frac{R' r}{r' R} \log \frac{\lambda R}{r} \right),$$

M étant la masse totale du fluide. Cette équation montre que $R - R'$ doit être très petit par rapport à R, ou bien que l'on doit avoir approximativement

$$\frac{r}{R} = \frac{r'}{R'}.$$

Si en effet $R - R'$ n'est pas très petit par rapport à R, le produit $\pi^2 r r' (R - R')$ est de même ordre de grandeur que $r^2 R$, $r'^2 R'$, où M, et par conséquent le dernier facteur du second membre, doit être fini.

Je réserve pour un article ultérieur la discussion de la stabilité de ces figures d'équilibre. Je me bornerai, pour terminer, à faire la remarque suivante qui, malgré sa simplicité, n'a pas été faite encore à ma connaissance.

Si la vitesse angulaire $\omega$ dépasse une certaine limite, il n'y a aucune figure d'équilibre stable possible.

En effet, pour que l'équilibre soit stable, une condition nécessaire, mais non suffisante, c'est que la résultante de l'attraction et de la force centrifuge, qui doit être normale à la surface d'équilibre, soit dirigée vers l'intérieur de la masse.

Soient V le potentiel dû à l'attraction, $\omega$ la vitesse angulaire, $r$ la distance à l'axe, et posons

$$U = V + \frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

Les composantes de la force seront $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, $\frac{dU}{dz}$ et la force estimée suivant la normale $\frac{dU}{dn}$. On aura d'ailleurs

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2} = \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} + 2\omega^2 = -4\pi + 2\omega^2.$$

Le théorème de Green donnera donc

$$\int \frac{dU}{dn}\, d\omega = M(2\omega^2 - 4\pi)$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments de la surface d'équilibre. Si donc

$$\omega > \sqrt{2\pi},$$

l'intégrale sera positive; il sera donc impossible que $\frac{dU}{dn}$ soit toujours négatif, ce qui est nécessaire pour que la résultante de toutes les forces soit toujours dirigée vers l'intérieur de la masse. L'équilibre stable est donc impossible. C. Q. F. D.

---

## DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS DES ORBITES DES CINQ SATELLITES INTÉRIEURS DE SATURNE;

PAR M. B. BAILLAUD.

Nous avons donné dans ce *Bulletin* (avril 1884) une étude du mouvement de Mimas fondée d'une part sur 83 observations de ce satellite faites à Toulouse, d'autre part sur la comparaison des résultats obtenus aux observations antérieures.

Nous nous proposons d'indiquer sommairement ici les résultats de la discussion des nombreuses observations d'Encelade, Téthys, Dione et Rhéa, obtenues à Toulouse de juillet 1876 au commencement de 1883 par MM. Tisserand, Perrotin, Fabre et par moi-même, savoir :

| | Observations. |
|---|---|
| Encelade | 55 |
| Téthys | 104 |
| Dione | 55 |
| Rhéa | 51 |

La discussion présente de grandes difficultés, parce que les excentricités des orbites sont très faibles, probablement inférieures à 0,01, de sorte que l'équation du centre, même dans son maximum, n'est pas toujours supérieure aux erreurs des observations.

Une autre difficulté vient de ce que les inégalités que nous avons indiquées dans le mouvement de Mimas se retrouvent avec de faibles coefficients dans celui de Téthys, et des inégalités analogues se rencontrent probablement dans les longitudes d'Encelade et de