

et l'on trouve, pour seule restriction,

$$n_1 h_1 y > 0.$$

» 3° Voici les constantes de E, E<sub>1</sub>, exprimées par celles de M,

$$\frac{h}{n} = \frac{1}{2}x, \quad \frac{h_1}{n_1} = r - \frac{1}{2}y;$$

soient  $X > X'' > X'$  et  $X_1 > X_1'' > X_1'$  les racines toujours réelles des équations

$$F\left(\frac{2X+q}{p} + \frac{y^2-x^2}{2p}\right) = 0, \quad F\left(\frac{2X_1+q}{p}\right) = 0,$$

formées avec le polynôme F ci-dessus; on aura

$$X(h^2 - a^2) = X''(h^2 - b^2) = X'(h^2 - c^2) = \frac{nh}{4} \left[ \frac{x(x^2 - y^2)}{2} - py - qx \right],$$

$$X_1(h_1^2 - a_1^2) = X_1'(h_1^2 - b_1^2) = X_1''(h_1^2 - c_1^2) = -\frac{n_1 h_1}{4} (qy + px).$$

» Deux cas particuliers méritent une mention spéciale; dans l'un et l'autre, l'axe du corps passe périodiquement sur la verticale, le centre de gravité *au-dessous* du point de suspension dans l'un de ces cas, caractérisé par  $x = y$ , *au-dessus* dans l'autre, caractérisé par  $x = -y$ . L'un des axes de (E) est alors nul. »

MÉCANIQUE. — *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation.* Note de M. H. POINCARÉ, présentée par M. Hermite.

« Une masse fluide homogène dont toutes les molécules s'attirent d'après la loi de Newton, et qui est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe, est susceptible d'une infinité de figures d'équilibre. Les seules qui aient été signalées jusqu'ici sont l'ellipsoïde de révolution, l'ellipsoïde de Jacobi et les figures annulaires de MM. Tait et Thomson, que j'ai étudiées en détail dans une Note récente, insérée au *Bulletin astronomique*. Mais le problème admet une infinité d'autres solutions.

» Je considérerai des séries linéaires de figures d'équilibre, c'est-à-dire des séries telles, qu'à chaque valeur de la vitesse de rotation corresponde une figure, et une seule, ou un nombre fini de figures, et que ces figures d'équilibre varient d'une façon continue quand on fait varier cette vitesse. Ainsi les ellipsoïdes de révolution forment une série linéaire, les ellipsoïdes

de Jacobi en forment une autre. Il peut arriver qu'une même figure appartienne à la fois à deux séries linéaires. Ainsi il y a un ellipsoïde de révolution qui est en même temps un ellipsoïde de Jacobi.

» Je me suis alors proposé de rechercher s'il existe des séries linéaires de figures d'équilibre parmi lesquelles il y en ait une qui se réduise à un ellipsoïde. On arrive aisément au résultat suivant : Soient  $\rho$ ,  $\sqrt{\rho^2 - b^2}$ ,  $\sqrt{\rho^2 - c^2}$  les trois axes de l'ellipsoïde, et soit  $R$  une fonction de Lamé quelconque. On devra avoir

$$(1) \quad R^2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\rho}{R^2 \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}} = (\rho^2 - c^2) \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\rho}{(\rho^2 - c^2) \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

» Réciproquement, on arrive à démontrer que, si, pour une des fonctions de Lamé, les axes d'un ellipsoïde de révolution ou d'un ellipsoïde de Jacobi satisfont à l'équation (1), cet ellipsoïde appartiendra non seulement à la série des ellipsoïdes d'équilibre, mais encore à une autre série linéaire de figures d'équilibre non ellipsoïdales.

» J'ai discuté les équations (1) dans le cas des ellipsoïdes de révolution aplatis. Posons

$$b = 0, \quad c = 1, \quad \rho = \sqrt{k^2 + 1},$$

$$R = (k^2 + 1)^{\frac{i}{2}} \frac{d^{i+n}(k^2 + 1)^n}{dk^{i+n}} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Nous n'aurons à considérer que les valeurs de  $n$  au moins égales à 2. Nous trouverons que l'équation (1) n'a pas de racine quand  $i + n$  est impair et en a une, et une seule, quand  $i + n$  est pair. Ainsi à tout système de nombres entiers  $i$  et  $n$ , tels que

$$n > 2, \quad i \leq n, \quad i \geq 0 \quad [i \equiv n \pmod{2}]$$

correspond une série linéaire de figures d'équilibre. Il faut faire exception pour le cas de  $i = 0, n = 2$ ; la racine de l'équation (1) correspondante ne donne pas de série nouvelle de figures d'équilibre. Elle correspond à l'ellipsoïde de révolution dont la vitesse de rotation est maximum. Dans le cas de  $i = n = 2$ , on retrouve les ellipsoïdes de Jacobi.

» Si  $i = 0$ , les figures d'équilibre correspondantes seront de révolution. Elles ne le seront pas dans le cas contraire.

» Le même procédé peut servir pour déterminer les conditions de stabilité de l'ellipsoïde de révolution. MM. Tait et Thomson ont annoncé que les ellipsoïdes de révolution que l'on rencontre, en partant de la sphère et

en allant jusqu'à celui qui est en même temps un ellipsoïde de Jacobi, sont tous stables, et que les autres sont séculairement instables.

» Pour établir ce résultat, il suffit de montrer que, parmi toutes les équations (1), celle qui a la plus grande racine est celle qui correspond au cas de  $i = n = 2$ , ou bien encore que tous les rapports

$$\frac{R}{k^2 + 1} \quad [i \equiv n \pmod{2}]$$

vont constamment en croissant quand  $k$  croît de zéro à l'infini. Or cela est aisé à vérifier.

» Il est possible que les séries linéaires de figures d'équilibre que j'ai signalées plus haut contiennent des figures stables; mais il est certain au moins que celles de ces figures qui diffèrent peu de l'ellipsoïde, et qui sont les seules que nous connaissions un peu, sont toutes séculairement instables (à l'exception, bien entendu, des ellipsoïdes de Jacobi).

» Il y aurait intérêt à répéter, pour les ellipsoïdes de Jacobi, la discussion que je viens de faire pour les ellipsoïdes de révolution, d'autant plus que, parmi les figures d'équilibre que l'on découvrirait ainsi, il y en a qui sont stables. C'est ce que je chercherai à faire dans une Communication ultérieure, si l'Académie veut bien le permettre. »

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Applications de la formule empirique des forces mutuelles à la mécanique des solides et aux propriétés générales des corps.*

Note de M. P. BERTHOT, présentée par M. Tresca.

« Dans une Note que nous avons eu l'honneur d'adresser à l'Académie, le 30 juin 1884, Note dont M. de Saint-Venant a bien voulu s'occuper, nous avons proposé une formule empirique, relative aux forces mutuelles. Nous ne considérions alors que des files de molécules; depuis, nous avons étendu l'application de cette formule aux corps solides.

» Soit une file de molécules  $m$  équidistantes et placées sur une droite parallèle à  $OY$ , à une distance  $x$  de cet axe. Cherchons l'action de toutes ces molécules, suivant la direction  $OX$ , sur une molécule  $M$  placée à l'origine des coordonnées. Une molécule quelconque de la file, placée à une distance  $r$  de  $M$ , aurait pour action, d'après la formule précitée,  $f_x = KMm \frac{d-r}{r^3} \frac{x}{r}$ ; mais  $r = \frac{x}{\cos \alpha}$ , d'où  $f_x = KMm \left( \frac{d}{x^2} \cos^4 \alpha - \frac{1}{x^2} \cos^3 \alpha \right)$ ; notre but étant de considérer des files de molécules qui en contiennent le même nombre par