a_ν, ... Si l'on sait que la partie réelle de $\alpha - x$ est $< -\delta < 0$ tant que x est contenu à l'intérieur de S et α à l'intérieur de S_1, on voit que la série est uniformément convergente pour ces valeurs des variables α et x, ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{1}{(\alpha - x)^2} = \frac{1}{(\alpha - a_1)^2} + \frac{(x - a_1)}{(\alpha - a_1)(\alpha - a_2)}\left[\frac{1}{\alpha - a_1} + \frac{1}{\alpha - a_2}\right]$$
$$+ \frac{(x - a_1)(x - a_2)}{(\alpha - a_1)(\alpha - a_2)(\alpha - a_3)}\left[\frac{1}{\alpha - a_1} + \frac{1}{\alpha - a_2} + \frac{1}{\alpha - a_3}\right] + \ldots$$

et

$$\frac{1}{(\alpha - x)^2} = \frac{1}{(\alpha - a_1)(\alpha - a_2)}$$
$$+ \frac{(x - a_1)(x - a_2)}{(\alpha - a_1)(\alpha - a_2)(\alpha - a_3)}\left[\frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2}\right] + \ldots,$$

ces égalités ayant lieu, elles aussi, tant que la partie réelle de $\alpha - x < 0$.

» De même les développements de $\frac{1}{(\alpha - x)^n}$ sont aussi convergents tant que la partie réelle de $\alpha - k$ est < 0.

» Quand la partie réelle de $\alpha - x$ est ≥ 0, toutes ces séries sont divergentes.

» II. Si $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu} = -\infty$, le développement de $\frac{1}{\alpha - x}$ se fait tant que la partie réelle de $a - x$ est > 0. Quand la partie réelle de $\alpha - x$ est ≤ 0, la série est divergente.

» La première de ces égalités nous donne

$$0 = 1 - \frac{x}{a_2} + \frac{x(x - a_2)}{a_2 a_3} - \frac{x(x - a_2)(x - a_3)}{a_2 a_3 a_4} + \ldots,$$

laquelle pour $a_\nu = \nu - 1$ se change en la formule binôme

$$0 = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1.2} - \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} + \ldots,$$

convergente tant que la partie réelle de $x > 0$. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les séries trigonométriques.* Note de M. **H. Poincaré**, présentée par M. Hermite.

« Les séries de la forme suivante

$$\Sigma A \sin \alpha t$$

qui sont convergentes sans l'être uniformément présentent un certain intérêt, parce qu'on en rencontre d'analogues dans la Mécanique céleste. Dans une Communication que j'ai eu l'honneur de faire à l'Académie le 30 octobre 1882, j'ai montré qu'une fonction définie par une pareille série peut devenir plus grande que toute quantité donnée. Mais on peut se demander si elle « tend vers l'infini » (c'est-à-dire si, après être devenue plus grande qu'une quantité donnée, elle reste plus grande que cette quantité); ou bien si sa valeur subit des oscillations d'amplitude indéfiniment croissante. Dans ce dernier cas, quelque grand que soit t_0, on peut toujours trouver une valeur de $t > t_0$ et telle que la fonction ait la valeur que l'on veut.

» Je vais montrer par deux exemples que les deux cas peuvent se présenter. Soit

$$F(t) = \sin t + A \sin \frac{t}{2} + A^2 \sin \frac{t}{4} + \ldots + A^n \sin \frac{t}{2^n} + \ldots$$

Cette série sera absolument convergente si $A < 2$; mais la convergence ne sera pas uniforme si $A > 1$. On a alors

$$F(2t) = A\,F(t) + \sin 2t,$$

d'où

$$(1) \qquad F(2t) > A\,F(t) - 1.$$

» Observons maintenant que, si l'on suppose $t > 0$,

$$\sin t > t - \frac{t^3}{6}, \quad \sin \frac{t}{2^n} > \frac{t}{2^n}\left(1 - \frac{t^2}{6}\right),$$

d'où

$$(2) \qquad F(t) > \left(t - \frac{t^3}{6}\right) \frac{1}{1 - \frac{A}{2}}.$$

Prenons ensuite

$$t_0 < \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad t_0 - \frac{8t_0^3}{6} = B > 0;$$

si $t_0 < t < 2t_0$, on aura, en vertu de l'inégalité (2),

$$F(t) > \frac{B}{1 - \frac{A}{2}}.$$

Soit θ une quantité positive plus grande que 1. Faisons

$$A = \frac{2 + \frac{\theta}{B}}{1 + \frac{\theta}{B}}, \quad \frac{\theta}{A - 1} = \frac{1}{A - 1} + h \quad (h > 0);$$

A satisfera bien aux conditions

$$1 < A < 2.$$

» L'inégalité (2) donne alors

$$F(t) > \frac{1}{A - 1} + h \quad (t_0 < t < 2t_0);$$

puis l'inégalité (1) donnera

$$F(t) > \frac{1}{A - 1} + Ah \quad (2t_0 < t < 4t_0),$$

$$F(t) > \frac{1}{A - 1} + A^2 h \quad (4t_0 < t < 8t_0),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$F(t) > \frac{1}{A - 1} + A^n h \quad (2^n t_0 < t < 2^{n+1} t_0).$$

On voit ainsi que la fonction $F(t)$ reste toujours positive et « tend vers l'infini ».

» Prenons maintenant

$$F(t) = \sin t - A \sin\frac{t}{2} + A^2 \sin\frac{t}{4} - \ldots + (-A)^n \sin\frac{t}{2^n} \pm \ldots,$$

de sorte que

$$F(2t) = -A\,F(t) + \sin 2t,$$

d'où

$$-A\,F(t) - 1 < F(2t) < -A\,F(t) + 1.$$

» Si A est compris entre 1 et 2, la série sera convergente sans l'être uniformément. On pourra donc trouver une valeur de t, telle que $F(t)$ soit aussi grand que l'on veut, en valeur absolue. On est donc certain que $F(t)$ peut devenir ou bien positif et très grand, ou bien négatif et très grand.

» Dans le premier cas, on pourra écrire

$$F(t) > \frac{1}{A - 1} + h,$$

h étant positif et aussi grand qu'on le veut. On aura alors

$$F(2t) < -\frac{1}{A-1} - Ah,$$

et $F(2t)$ sera négatif et très grand.

» Dans le second cas, on pourra écrire

$$F(t) < -\frac{1}{A-1} - h,$$

h étant positif et très grand, et il viendra

$$F(2t) > \frac{1}{A-1} + Ah,$$

de sorte que $F(2t)$ sera positif et très grand.

» On est donc certain que $F(t)$ peut devenir successivement positif et très grand, et négatif et très grand; par conséquent, la valeur de cette fonction ira constamment en oscillant, et l'amplitude des oscillations croîtra au delà de toute limite. En d'autres termes, $F(t)$ prend une infinité de fois toutes les valeurs possibles. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les solutions communes à plusieurs équations linéaires aux dérivées partielles.* Note de M. R. LIOUVILLE.

« 1. Quand deux équations linéaires du second ordre possèdent trois solutions communes distinctes, il est toujours facile d'en déduire une troisième équation semblable, qui admet aussi ces mêmes solutions; le groupe ainsi formé peut alors s'écrire

$$(1)\quad \begin{cases} t + P\,p + Q\,q + Z\,z = 0 = A(z), \\ s + P'p + Q'q + Z'z = 0 = A'(z), \\ r + P''p + Q''q + Z''z = 0 = A''(z), \end{cases}$$

et, pour qu'il ait trois intégrales indépendantes, les conditions nécessaires et suffisantes s'expriment avec une grande simplicité. Il existe, en effet, deux équations nouvelles :

$$(2)\quad \begin{cases} t + Pp + \left(Q - \dfrac{\partial \log P}{\partial y}\right) q \\ \quad + \left[\dfrac{\partial P}{\partial x} + Z + (P' - Q)\dfrac{\partial \log P}{\partial y} + \dfrac{\partial(Q - 2P')}{\partial y}\right] z = 0 = A_1(z), \end{cases}$$