PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur le problème de la distribution électrique.* Note de M. **H. Poincaré**, présentée par M. Hermite.

« Le problème de la distribution électrique se ramène, comme on le sait, au problème de Dirichlet qui consiste à déterminer une fonction V qui satisfasse à l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ à l'intérieur d'une certaine région et qui prenne sur la surface qui limite cette région des valeurs données. Riemann a donné de la possibilité de ce problème une démonstration simple et élégante, mais peu rigoureuse. Depuis, MM. Neumann, Schwarz et Harnack ont imaginé plusieurs méthodes qui permettent, non seulement d'établir l'existence de la solution, mais de la déterminer complètement. Ces méthodes ont un double caractère : ce sont à la fois des méthodes de démonstration, destinées à montrer la possibilité du problème, et des méthodes de calcul destinées à le résoudre effectivement. A ce second point de vue, elles sont très imparfaites ; car, si elles sont susceptibles théoriquement de donner une approximation indéfinie ; si même elles conduisent assez facilement à certaines inégalités auxquelles doit satisfaire la fonction cherchée, elles ne permettraient pas, sans un labeur très pénible, de pousser l'approximation un peu loin. Il n'est donc pas inutile d'en imaginer de nouvelles, quand même elles devraient avoir les mêmes inconvénients, ce qu'il paraît, d'ailleurs, impossible d'éviter. En effet, chaque méthode nouvelle conduit facilement à des inégalités nouvelles qu'il peut être intéressant de connaître. C'est ce qui m'engage à exposer ici un procédé qui n'a pas encore été proposé, du moins que je sache.

» Supposons, pour fixer les idées et simplifier l'exposé qui va suivre, qu'il s'agisse de déterminer la distribution électrique sur un conducteur *unique* (mais de forme, d'ailleurs, quelconque), chargé au potentiel intérieur 1. On peut imaginer un réseau formé d'une infinité de sphères S_1, S_2, ..., S_i, ..., qui sont toutes et tout entières extérieures au conducteur. Je suppose, de plus, que tout point extérieur au conducteur soit intérieur, au moins à l'une des sphères S_i. J'envisage, enfin, une sphère Σ dont le rayon R soit assez grand pour que le conducteur y soit contenu tout entier.

» Imaginons maintenant une quantité R d'électricité positive répartie sur Σ avec une densité uniforme $\frac{1}{4\pi R}$. Le potentiel de cette électricité sera égal à 1 à l'intérieur de Σ et plus petit que 1, mais positif, à l'extérieur.

» Rappelons maintenant un résultat bien connu : c'est qu'il est possible de remplacer un point électrisé, situé à l'intérieur d'une sphère, par une couche électrique répandue à la surface de cette même sphère et dont l'action sur un point extérieur soit la même ; nous l'appellerons *couche équivalente*.

» Voici maintenant la série d'opérations que nous allons faire. Considérons l'une des sphères S_i et remplaçons l'électricité contenue à l'intérieur de cette sphère par une couche équivalente répandue à sa surface. Le potentiel ne changera pas à l'extérieur de S_i et diminuera à l'intérieur.

» Si donc nous opérons successivement ainsi sur chacune des sphères S_i, en dirigeant les opérations, de façon à revenir une infinité de fois sur chaque sphère, le potentiel ira toujours en diminuant ; mais, comme il n'y aura en aucun point d'électricité négative, il sera toujours positif. Il tendra donc vers une limite finie et déterminée que j'appelle V.

» Mais, d'après un théorème de Harnack, si, dans une certaine région, tous les termes d'une série sont positifs et satisfont à l'équation de Laplace, la série ne peut converger qu'uniformément. Donc notre potentiel tendra uniformément vers sa limite V. Cela suffit pour démontrer que V est une fonction continue et que

$$\Delta V = 0.$$

Il est clair que V est toujours plus petit que 1 et s'annule à l'infini ; il reste à démontrer que V tend vers l'unité quand on se rapproche de la surface du conducteur. Il suffit, pour cela, de faire une remarque. Soit O un point quelconque intérieur au conducteur ; soit ρ la distance de O au point (x, y, z) ; soit r la plus courte distance de O à la surface du conducteur. Notre potentiel sera toujours plus grand que $\frac{r}{\rho}$; on aura donc encore à la limite

$$1 > V > \frac{r}{\rho}.$$

» Or il est évident que, quand le point (x, y, z) se rapprochera indéfiniment d'un point P de la surface du conducteur, on pourra toujours choisir le point O, ou faire tendre le point O vers le point P, de telle façon que $\frac{r}{\rho}$ tende vers 1.

» Il résulte de là que la fonction V ainsi définie n'est autre chose que le potentiel d'une charge électrique distribuée sur notre conducteur.

» Comme méthode de démonstration, celle que je propose est supérieure à toutes les autres, puisqu'elle ne souffre aucune exception ; comme méthode de calcul, elle est évidemment moins simple que celle de Neumann, dans le cas où cette dernière s'applique, c'est-à-dire pour un conducteur convexe. Elle n'en fournit pas moins diverses inégalités intéressantes, très nombreuses et variées, parce que le choix des sphères S_i reste arbitraire dans une large mesure et qu'on peut, d'ailleurs, introduire dans la méthode diverses modifications de détail, que je n'ai pu exposer ici, mais qui augmentent encore cet arbitraire et qui, de plus, permettent d'étendre la méthode au cas de plusieurs conducteurs. »

THERMODYNAMIQUE. — *Remarques relatives aux observations de M.* Hirn *sur l'écoulement des gaz.* Note de M. **Hugoniot**, présentée par M. Haton de la Goupillière.

« Je suis obligé, bien malgré moi, de revenir encore une fois sur la discussion soulevée par les conclusions que M. Hirn a tirées de ses expériences. Je ferai remarquer d'abord que jamais, dans mes travaux, je ne me suis occupé de la *théorie cinétique*, soit pour l'attaquer, soit pour la défendre. Je n'ai donc point eu à invoquer l'autorité de M. Clausius, dont le point de vue est tout différent du mien.

» Ce que j'ai voulu défendre, ce sont les équations de l'Hydrodynamique, qu'il faudrait regarder comme erronées si l'on admettait les valeurs que M. Hirn assignait aux vitesses d'écoulement pour le cas des grandes différences de pression ([1]). Il déclarait, par exemple, que l'air, à

([1]) M. Hirn, dans sa Note du 20 décembre 1886, se défend d'avoir attaqué les équations de l'Hydrodynamique. Je suis convaincu, en effet, que ce n'était pas son intention. Mais les faits qu'il regarde comme exacts étant en contradiction avec ces équations, on est bien obligé de choisir. Du reste, le désaccord est frappant sur certains points. Par exemple, tout en faisant usage de la loi de Laplace pour calculer ses densités, il n'admet pas que la formule de Weissbach puisse servir à calculer les vitesses. Or, quand on admet la loi de Laplace, la formule de Weissbach n'est autre que la forme correspondante de l'équation des forces vives.

Ce désaccord n'a sans doute pas échappé complètement à M. Hirn, car déjà ses idées paraissent s'être sensiblement modifiées. Au début, il était question de vitesses de 4000^m et même de vitesses pouvant dépasser toute limite, ainsi qu'on peut le voir par l'extrait suivant d'une Note de M. Faye (*Comptes rendus,* 2 novembre 1885) : « Déjà, » pour la pression de $0^m,01$ dans le bief d'écoulement, la vitesse atteignait 4266^m par » seconde.... Tout porte à croire qu'en poussant plus loin la raréfaction dans le ré» cepteur, la vitesse d'écoulement croîtrait indéfiniment. »

Aujourd'hui, M. Hirn ne paraît plus admettre que la vitesse puisse croître sans