MÉCANIQUE. — *Sur un théorème de M.* Liapounoff, *relatif à l'équilibre d'une masse fluide.* Note de M. **H. Poincaré.**

« Lorsqu'une masse fluide homogène, sans mouvement de rotation, est soumise à la loi de Newton, il est évident qu'une des figures d'équilibre est la sphère; mais nous ne savons pas jusqu'à présent s'il en existe d'autres.

» Nous ne savons même pas démontrer que la sphère est la seule figure d'équilibre stable.

» Il faut, pour l'équilibre stable, que l'intégrale

$$W = \int \frac{d\tau\, d\tau'}{r}$$

atteigne un maximum. L'intégration doit être étendue à toutes les combinaisons de deux éléments $d\tau$ et $d\tau'$ du volume de la masse fluide, et r désigne la distance de ces deux éléments.

» Pour démontrer que la sphère est la seule figure d'équilibre stable, il faudrait donc établir qu'elle est la seule qui corresponde à un maximum relatif de W. On ne sait pas le faire, mais M. Liapounoff a dernièrement démontré, dans les *Mémoires de l'Université de Kharkow*, que la sphère correspond au maximum absolu de W.

» Je crois qu'il est possible de simplifier beaucoup la démonstration de M. Liapounoff, par l'introduction de considérations empruntées à l'Électrostatique, et c'est là l'objet de la présente Note.

» 1° Il faut d'abord démontrer que W est susceptible d'un maximum absolu; pour cela, je me bornerai à faire voir que, si l'on se donne le volume T de la figure, on peut trouver une limite supérieure de W. En effet, on a

$$W = \tfrac{1}{2}\int V\, d\tau,$$

V désignant le potentiel de la masse fluide par rapport au centre de gravité de l'élément $d\tau$.

» Or V est manifestement plus petit que le potentiel d'une sphère de volume T par rapport à son centre. On a donc

$$V < 2\pi R^2;$$

en posant $\frac{4}{3}\pi R^3 = T$, on en déduit

$$W < \pi R^2 T.$$

W a donc un maximum absolu. Nous nous contenterons de cet aperçu pour établir ce premier point, que M. Liapounoff avait laissé de côté.

» 2° Nous allons, avant de démontrer le théorème de M. Liapounoff, établir la proposition suivante :

» *De tous les conducteurs de même volume* T, *c'est la sphère qui a la plus petite capacité électrique.*

» Pour cela, je ferai voir d'abord que la capacité électrique C admet un minimum.

» Considérons, en effet, un conducteur quelconque de volume T et imaginons d'abord qu'une quantité d'électricité, égale à T, soit répandue uniformément à l'intérieur du volume du conducteur. L'énergie potentielle sera alors

$$W = \int \frac{d\tau\, d\tau'}{r}.$$

» Si maintenant cette quantité d'électricité T se met en état d'équilibre électrostatique à la surface du conducteur, cette énergie potentielle deviendra

$$\frac{T^2}{2C};$$

comme l'équilibre électrique est toujours stable, on devra avoir

$$W > \frac{T^2}{2C},$$

d'où

$$C > \frac{T^2}{2W} > \frac{T}{2\pi R^2}.$$

» Donc C admet une limite inférieure. C. Q. F. D.

» 3° Je dis maintenant que le minimum absolu de C correspond à la sphère. En effet, pour que C soit minimum, il faut d'abord que sa première variation soit nulle. Or, supposons que le conducteur se déforme infiniment peu, de façon que ζ soit la distance de deux points correspondants du conducteur avant et après la déformation, distance estimée suivant la normale. Si la charge du conducteur est M, et que ρ soit la densité électrique en un point de la surface du conducteur, la variation dC de la capacité sera donnée par la formule

$$\frac{M^2 dC}{C^2} = 4\pi \int \rho^2 \zeta\, d\omega.$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface du conducteur. On a, d'autre part,

$$dT = \int \zeta \, d\omega.$$

» Il faut que, si la variation dT du volume est nulle, la variation dC le soit également. Pour cela, il faut et il suffit que ρ soit une constante, c'est-à-dire que la distribution électrique à la surface du conducteur soit uniforme. On ne sait pas s'il existe d'autre conducteur que la sphère satisfaisant à cette condition.

» Mais il nous suffira, pour notre objet, de comparer les capacités des conducteurs qui y satisfont et de montrer que celle de la sphère est la plus petite.

» Supposons que le conducteur subisse une déformation qui altère son volume. On aura, ρ étant une constante,

$$\frac{M^2 dC}{C^2} = 4\pi\rho^2 \int \zeta \, d\omega = 4\pi\rho^2 \, dT$$

ou bien

$$\frac{S^2 dC}{C^2} = 4\pi \, dT,$$

S désignant la surface totale du conducteur. Si le conducteur se déforme en restant semblable à lui-même, la capacité sera, par raison de similitude, proportionnelle à la racine cubique du volume, de sorte que l'on aura

$$\frac{dC}{C} = \frac{1}{3}\frac{dT}{T}.$$

» On en déduit

$$\frac{S^2}{C} = 12\pi T.$$

» Ainsi, pour tous les conducteurs à distribution uniforme, la capacité est proportionnelle au carré de la surface. Or, Steiner a démontré que, de toutes les figures de même volume, c'est la sphère qui a la plus petite surface; c'est donc elle qui a la plus petite capacité.

» 4° Je dis maintenant que la sphère correspond au maximum absolu de W. En effet, pour que W atteigne ce maximum, il faut d'abord que sa variation soit nulle quand la figure subit une déformation qui n'altère pas le volume. Or, la variation de W a pour expression

$$dW = \int V \zeta \, d\omega.$$

» Pour que cette variation soit nulle en même temps que dT, il faut et il suffit que V soit une constante en tous les points de la surface, ce qui a lieu pour les surfaces d'équilibre. Mais alors on a, pour une déformation qui altère le volume,

$$dW = V\,dT.$$

» Si l'on suppose, en particulier, que la figure se déforme en restant semblable à elle-même, W est proportionnel à la puissance $\frac{5}{3}$ de T. On a donc

$$\frac{dW}{W} = \frac{5}{3}\frac{dT}{T}$$

ou

$$W = \tfrac{3}{5}V.T.$$

» Mais l'attraction d'une figure d'équilibre sur un point extérieur est la même que celle d'une masse d'électricité égale à T, répandue à la surface de cette figure, regardée comme un conducteur; on a donc

$$V = \frac{T}{C}, \qquad W = \frac{3}{5}\frac{T^2}{C}.$$

» On voit ainsi que W est inversement proportionnel à C, et que la sphère, qui correspond au minimum de C, doit correspondre au maximum de W.

» 5° Dans le cas où la masse fluide est animée d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire n, la condition d'équilibre c'est que $V + \frac{n^2\rho^2}{2}$ soit une constante en tous les points de la surface, ou que la première variation de $W + \frac{n^2 I}{2}$ soit nulle. Nous désignons par ρ la distance d'un point à l'axe de rotation, et par I le moment d'inertie. On trouve alors

$$W + \frac{n^2 I}{2} = \frac{3}{5}\left(V + \frac{n^2\rho^2}{2}\right)T. \text{ »}$$

CHIMIE VÉGÉTALE. — *Sur la fixation directe de l'azote gazeux de l'atmosphère par les terres végétales, avec le concours de la végétation;* par M. **Berthelot**.

« J'ai présenté à l'Académie, en novembre 1885 et en janvier 1886, dans la séance du 24 (p. 205), l'exposé de mes expériences, faites à la