

SUR LA RÉSONANCE MULTIPLE

DES

OSCILLATIONS HERTZIENNES

PAR

H. POINCARÉ.

Membre de l'Institut

On connaît le phénomène de la résonance multiple découvert par MM. Sarasin et de la Rive et l'explication que ces savants en ont donnée¹. L'excitateur émettrait, non pas une vibration simple, mais une sorte de spectre continu et chaque résonateur renforcerait ensuite celle des vibrations de ce spectre avec laquelle il serait en harmonie. La théorie semblerait exiger au contraire que le spectre émis par l'excitateur fût composé seulement d'un certain nombre d'harmoniques distinctes, et fût, par conséquent, discontinu. Mais, outre que cette théorie est encore assez mal établie, elle ne tient aucun compte des phénomènes sans doute très complexes dont l'interrupteur à étincelles est le siège et qui nous sont totalement inconnus. On conçoit que le rôle de cette étincelle puisse être de donner un certain flou aux raies du spectre de l'excitateur et on peut se demander si elles ne peuvent de cette façon s'élargir assez pour rendre compte des appa-

¹ Éd. Sarasin et L. de la Rive. Sur la résonance multiple des ondulations électriques de M. Hertz se propageant le long de fils conducteurs, *Archives des sc. phys. et nat.*, 1890, t. XXIII, p. 13.

rences observées par les physiciens genevois. Ce serait donc se méprendre singulièrement sur la portée de cette théorie que de rejeter la façon de voir de MM. Sarasin et de la Rive.

Mais il est permis néanmoins de rechercher si une autre explication n'est pas possible. Dans l'état actuel de la science, il pourrait être dangereux de s'en tenir à une interprétation unique. Il faut au contraire examiner toutes celles qui sont possibles, en attendant que de nouvelles expériences permettent de décider entre elles. C'est ce qui m'a engagé à proposer, dans mon ouvrage : *Electricité et Optique*, une explication nouvelle du phénomène de la résonance multiple. Je n'y ai consacré que peu de lignes, trop peu de lignes peut-être pour être complètement clair; aussi suis-je très reconnaissant à M. le Directeur des *Archives* de l'hospitalité qu'il m'offre et qui me permet de développer ma pensée.

Cette explication repose sur le rapide amortissement des oscillations émises par l'excitateur. Il paraît certain, en effet, qu'elles s'éteignent très promptement et c'est là un fait dont toute théorie doit tenir compte. Je chercherai à montrer qu'il suffit peut-être pour expliquer tous les phénomènes observés et qu'en tout cas il doit contribuer à les produire autant que la cause à laquelle MM. Sarasin et de la Rive les attribuaient uniquement. Une raie spectrale d'une certaine largeur doit, grâce à lui, produire l'effet d'une bande beaucoup plus large encore.

Il est difficile de parler convenablement de ces faits si mal connus encore et si compliqués; le langage ordinaire est insuffisant pour rendre leur prodigieuse complexité et le langage mathématique, auquel je serai forcé de recourir, prêterà à ma pensée une précision factice,

que ne comporte ni l'état actuel de nos connaissances, ni l'imperfection de nos moyens d'observation. Le lecteur m'excusera et il se rendra compte que toutes les formules qui vont suivre ne peuvent être que de grossières approximations.

De l'amortissement des oscillations.

Tout nous porte à croire que l'amortissement des oscillations de l'excitateur doit être très considérable. Le calcul a pu être fait complètement pour l'excitateur sphérique de Lodge; il a montré que si la théorie de Maxwell est supposée exacte, l'amplitude de chaque demi-oscillation doit être à celle de la demi-oscillation précédente dans le rapport de 0,163 à 1.

Mais dans l'excitateur de Hertz les oscillations paraissent décroître avec une rapidité beaucoup moindre, quoique très grande encore.

Ce décrement dépend de plusieurs causes; la principale est le rayonnement, mais il faut tenir compte également de la résistance des conducteurs et de celle de l'interrupteur à étincelles; cette dernière est elle-même de deux sortes : l'interrupteur peut d'abord être assimilé à un conducteur ordinaire de résistance assez grande et il peut également être le siège d'une force contre-électromotrice; cette force existe certainement avant que l'étincelle n'éclate, puisque c'est elle qui en empêche l'explosion immédiate et il est probable qu'elle ne disparaît ensuite que partiellement.

Il est difficile de tenir compte à la fois de toutes ces causes; Hertz a calculé la part du rayonnement; son

calcul semble suffisamment approché, mais il a adopté une valeur de la longueur d'onde qui est probablement inexacte, 4 mètres 80 au lieu de 3 mètres. Il convient donc de corriger son résultat. L'énergie rayonnée pendant une demi-oscillation n'est pas la vingtième partie, mais la sixième partie de l'énergie totale. Si l'on tient compte de toutes les causes de perte, on trouvera, bien entendu, un amortissement plus rapide encore.

Du résonateur rectiligne.

Imaginons un excitateur ou un résonateur formé d'un fil rectiligne de diamètre d et de longueur l , interrompu en son milieu. On peut admettre que la demi-longueur d'onde est précisément l . Pour évaluer le décrement, nous allons appliquer à cet excitateur le calcul de Hertz.

Soit H l'énergie totale au commencement des oscillations, P l'énergie rayonnée pendant une demi-oscillation. Nous nous proposons de calculer le rapport de P à H .

Considérons maintenant une distribution électrique quelconque; multiplions chaque masse électrique par sa distance à un plan et faisons la somme de ces produits. Cette somme pourra s'appeler le moment de cette distribution par rapport à ce plan. Si la somme algébrique de toutes les masses est nulle, le moment sera le même par rapport à deux plans parallèles.

Envisageons la distribution qui existe au début des oscillations et appelons M le moment de cette distribution par rapport à un plan perpendiculaire au fil.

Le calcul de Hertz donne, en appelant λ la demi-longueur d'onde :

$$P = \frac{\pi}{3} \frac{M^2}{\lambda^2}.$$

Quelle est la distribution électrique au début des oscillations? On peut admettre que si nous appelons edx la quantité d'électricité qui se trouve entre deux sections du fil situées respectivement à des distances x et $x + dx$ du milieu de ce fil, on aura approximativement :

$$e = \alpha \sin \frac{\pi x}{l}$$

α étant une constante. Il vient alors :

$$M = \alpha \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \sin \frac{\pi x}{l} x dx = \frac{2\alpha l^2}{\pi^2}$$

d'où, puisque $\lambda = l$,

$$P = \frac{4\alpha^2 l}{3\pi^3}$$

Calculons maintenant H.

Je me bornerai à dire, ce qui est très suffisant pour mon objet, que H est certainement très notablement supérieur à

$$\frac{\alpha^2 l}{4} \left(\log \frac{l}{d} - 1 \right).$$

On a donc :

$$\frac{P}{H} < \frac{16}{3\pi^2 \left(\log \frac{l}{d} - 1 \right)}$$

Si l'on a, par exemple, en centimètres : $l = 300$,
 $d = \frac{1}{2}$; d'où

$$\log \frac{l}{d} = \log 600 = 6,396$$

il vient :

$$\frac{P}{H} < \frac{1}{30}.$$

Si l'on observe que mon approximation dans le calcul de H est grossière et que cette quantité est probablement beaucoup au-dessus de la limite que je lui ai assignée : si, d'autre part, on considère que les fils employés dans les résonateurs sont souvent plus fins que je ne l'ai supposé, on conclura que l'amortissement avec un excitateur rectiligne est incomparablement moins rapide qu'avec l'excitateur de Hertz.

Du résonateur circulaire.

Un résonateur circulaire peut fonctionner de deux manières différentes. Quand l'étincelle a jailli, il se comporte comme un circuit fermé ; au contraire, avant que l'étincelle paraisse, on doit considérer le courant comme nul aux deux extrémités. Dans mon ouvrage : *Electricité et Optique*, je me suis surtout occupé du premier mode de fonctionnement ; j'ai peut-être eu tort, car le second cas paraît, d'après les faits expérimentaux les mieux constatés, jouer un rôle prépondérant.

Il est aisé d'ailleurs d'y appliquer la même analyse dont j'ai fait usage dans le chapitre X de mon ouvrage. Reprenons les notations de ce chapitre et désignons par s l'arc du résonateur, par i l'intensité du courant, par S la longueur totale du fil, par X la force électromotrice ; soient C et K deux constantes ; la dernière est l'inverse

du carré de la vitesse de la lumière; l'équation à laquelle on a à satisfaire devient :

$$(1) \quad \frac{d^2 i}{ds^2} - K \frac{d^2 i}{dt^2} = - \frac{K}{C} \frac{dX}{dt}.$$

De plus, i doit être nul aux deux extrémités du fil, c'est-à-dire pour $s=0$ et pour $s=S$.

Voyons d'abord comment se comportera notre résonateur, si on suppose qu'après y avoir fait naître des courants on l'abandonne à lui-même, c'est-à-dire que X soit nul. Il vient alors :

$$\frac{d^2 i}{ds^2} - K \frac{d^2 i}{dt^2} = 0.$$

C'est l'équation des cordes vibrantes. Il vient donc, en désignant par $A_1, A_2, \dots, A_m, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \dots$, des constantes d'intégration :

$$(2) \quad i = A_1 \sin \frac{\pi s}{S} \cos \left(\frac{\pi t}{S \sqrt{k}} + \alpha_1 \right) + A_2 \sin \frac{2\pi s}{S} \cos \left(\frac{2\pi t}{S \sqrt{k}} + \alpha_2 \right) + \dots + A_m \sin \frac{m\pi s}{S} \cos \left(\frac{m\pi t}{S \sqrt{k}} + \alpha_m \right) + \dots$$

On reconnaît ainsi la possibilité d'une série d'harmoniques qui pourront coexister dans le résonateur, mais la première harmonique (pour laquelle le résonateur présente deux nœuds pour $s=0$ et pour $s=S$, et un seul ventre pour $s=\frac{S}{2}$) paraît seule susceptible de jouer un rôle et nous ne nous occuperons pas des autres.

Pour établir cette équation (1), nous avons négligé le rayonnement qui produit l'amortissement des oscillations; c'est pour cette raison que dans la formule (2) le temps t n'entre que sous des signes cosinus et non pas

sous des signes exponentiels. « Le terme F'' , ai-je dit dans l'ouvrage cité, page 499, est absolument négligeable. » Avant d'aller plus loin, je dois faire voir que cette manière de voir est légitime, c'est-à-dire que l'amortissement des oscillations propres du résonateur est beaucoup plus lent que celui des vibrations de l'excitateur.

Nous avons déjà reconnu qu'il en est ainsi pour le résonateur rectiligne; montrons que les vibrations du résonateur circulaire doivent s'amortir plus lentement encore. En effet, la quantité que nous avons appelée H , c'est-à-dire l'énergie totale, doit être très sensiblement la même dans les deux cas pour deux fils de même longueur totale et de même diamètre. Calculons maintenant P , c'est-à-dire l'énergie rayonnée pendant une demi-oscillation. En un point très éloigné du résonateur, la perturbation électro-magnétique peut être assimilée à une onde plane et la quantité d'énergie rayonnée à travers un élément de surface est sensiblement proportionnelle au carré de la force électrique. La force électrique a pour première composante :

$$-\frac{dF}{dt} - \frac{d\varphi}{dx}$$

φ étant le potentiel électrostatique et F , G , H les composantes du potentiel vecteur.

Le premier terme qui provient de l'action électrodynamique est pour un point très éloigné du résonateur beaucoup plus grand que le second qui provient de l'action électrostatique. Pour évaluer maintenant le potentiel vecteur voici comment il convient d'opérer. Voyons d'abord quel est le champ électromagnétique produit par les oscillations du résonateur. Le calcul de Hertz qui se

trouve au commencement du tome 36 des *Annales de Wiedemann* et que j'ai reproduit dans le chapitre IX de mon ouvrage cité nous apprend quel est le champ produit par un excitateur rectiligne de longueur infiniment petite. Pour avoir le champ produit par un excitateur filiforme quelconque, on décomposera le fil en éléments de longueur très petite, on calculera le champ produit par chacun de ces éléments en tenant compte de l'intensité du courant dans chacun d'eux et on composera ensuite ces divers champs élémentaires, le champ résultant sera le champ total produit par l'excitateur tout entier.

On est ainsi conduit à la règle suivante pour évaluer le potentiel vecteur en un point très éloigné de l'excitateur. Tout se passera comme si les courants de déplacement n'existaient pas et si les courants de conduction existaient seuls et comme si l'induction se conformait à la loi de Neumann, avec cette différence, toutefois, que sa propagation ne serait pas instantanée, mais se ferait avec la vitesse de la lumière.

On comprend ainsi que le potentiel vecteur soit notablement moindre avec un résonateur ou un excitateur circulaire qu'avec un excitateur rectiligne de même longueur. En effet, chacun des éléments du fil donne naissance à un potentiel vecteur élémentaire qui est le même en grandeur dans les deux cas si l'on compare deux éléments également éloignés des extrémités du fil; mais si l'excitateur est rectiligne, tous ces potentiels élémentaires ont même direction et s'ajoutent arithmétiquement, tandis que leur direction n'est pas la même si l'excitateur est circulaire. Il convient également de tenir compte de la différence de phase entre les divers potentiels vecteurs élémentaires, qui est due à ce que l'induction n'a pas mis le

même temps pour venir de deux éléments différents de l'excitateur qui ne se trouvent pas à la même distance. Mais cette différence de phase varie de 0 à $\frac{1}{8}$ de période.

Sans entrer dans les détails d'un calcul qui serait assez long, il nous est donc permis de conclure que l'amortissement du résonateur est négligeable devant celui de l'excitateur.

Continuons maintenant le calcul en ne supposant plus que X soit nul.

Posons :

$$y = \int_0^s i \sin \frac{\pi s}{S} ds$$

y sera une fonction de t . Posons ensuite :

$$z = \int_0^t y dt$$

z sera encore une fonction de t dont y sera la dérivée. C'est de cette quantité z que dépend l'amplitude des oscillations correspondant à la première harmonique, qui est la seule sensible; c'est donc cette quantité qu'il convient de calculer.

L'intégration par parties nous donne :

$$\int \frac{d^2 i}{ds^2} \sin \frac{\pi s}{S} ds = \frac{di}{ds} \sin \frac{\pi s}{S} - i \frac{\pi}{S} \cos \frac{\pi s}{S} - \frac{\pi^2}{S^2} \int i \sin \frac{\pi s}{S} ds$$

ou, puisque $\sin \frac{\pi s}{S}$ et i s'annulent aux deux limites :

$$\int_0^S \frac{d^2 i}{ds^2} \sin \frac{\pi s}{S} ds = - \frac{\pi^2 y}{S^2}.$$

L'équation (1) devient aussi :

$$(3) \quad \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\pi^2}{KS^2} z = \int_0^S \frac{X}{C} \sin \frac{\pi s}{S} ds.$$

Le second membre de l'équation (3) est une fonction de t seulement. Cette fonction dépend de la valeur de la force électrique X en tous les points du résonateur, puisque l'intégration doit être étendue de $s = 0$ à $s = S$, c'est-à-dire d'une extrémité à l'autre du fil. Mais elle dépend principalement de la valeur de X au point $s = \frac{S}{2}$ c'est-à-dire au point opposé à l'interrupteur, parce qu'en ce point le coefficient de $\frac{X}{C}$ sous le signe S , c'est-à-dire $\sin \frac{\pi s}{S}$ est maximum et égal à 1. Ce résultat est con-

forme à ce qu'a annoncé Hertz dans ses premiers écrits.

Voyons maintenant comment X et le second membre de (3) dépendent du temps t . Soit M un point du résonateur correspondant à une certaine valeur de s , la force X en ce point M peut être représentée par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} X &= 0 \text{ pour } t < t_0 \\ X &= e^{-a(t-t_0)} \cos n(t-t_0) \varphi(s) \text{ pour } t > t_0. \end{aligned}$$

$\varphi(s)$ étant une fonction de s seulement, n et a sont des constantes qui définissent la période et l'amortissement de l'excitateur. Enfin, si nous prenons pour origine du temps le moment où l'étincelle de l'excitateur éclate, le temps t_0 est égal à la distance de l'excitateur au point M divisée par la vitesse de la lumière.

Si l'on suppose que le résonateur est placé dans un plan parallèle à l'excitateur, de façon que la droite qui joint le milieu de l'excitateur au centre du résonateur soit

perpendiculaire à la fois à l'excitateur et au plan du résonateur, l'époque t_0 est sensiblement la même pour tous les points du résonateur. Il n'en serait plus de même pour les autres positions du résonateur et il s'ensuivrait de nouvelles complications dans le calcul, qui n'auraient pas d'ailleurs d'influence sensible sur le résultat. Nous nous en tiendrons donc à la première hypothèse, de sorte que l'époque t_0 sera la même pour tous les points du résonateur.

Le second membre de (3) sera alors égal à 0 pour $t < t_0$ et à :

$$Ae^{-\alpha(t-t_0)} \cos n(t-t_0)$$

pour $t > t_0$, A étant une constante.

Si nous posons :

$$m = \frac{\pi}{S \sqrt{K}}$$

l'équation (3) devient :

$$(4) \quad \frac{d^2 z}{dt^2} + m^2 z = Ae^{-\alpha(t-t_0)} \cos n(t-t_0)$$

ou en posant, pour abréger, $t' = t - t_0$:

$$\frac{d^2 z}{dt'^2} + m^2 z = Ae^{-\alpha t'} \cos nt'.$$

De la résonance multiple.

Le problème revient donc à intégrer l'équation (4) avec cette condition que z et $\frac{dz}{dt}$ soient nuls pour $t = t_0$, c'est-à-dire pour $t' = 0$.

L'intégrale générale de l'équation (4) peut s'écrire :
 $z = Be^{-\alpha t'} \cos nt' + Ce^{-\alpha t'} \sin nt' + D \cos mt' + E \sin mt'.$

B et C étant deux constantes convenablement choisies, et D et E deux constantes arbitraires.

On voit ainsi que la valeur de z s'obtient en combinant entre elles deux vibrations simples; la première a pour période $\frac{2\pi}{n}$ et son amplitude

$$e^{-at'} \sqrt{B^2 + C^2}$$

s'amortit rapidement; elle a donc même période et même amortissement que la vibration propre de l'excitateur. La

seconde a pour période $\frac{2\pi}{m}$ et pour amplitude

$$\sqrt{D^2 + E^2}$$

nous pouvons négliger son amortissement; elle a donc même période que la vibration propre du résonateur.

Au bout d'un temps très long, la première vibration peut être regardée comme éteinte et la seconde subsiste seule.

Il nous reste à voir comment on peut calculer les coefficients B, C, D et E. Nous trouvons d'abord :

$$(5) \quad B + C \sqrt{-1} = \frac{A}{[(a + n \sqrt{-1})^2 + m^2]}$$

Pour calculer ensuite D et E il faut écrire que pour $t = t_0$, c'est-à-dire pour $t' = 0$ z et $\frac{dz}{dt}$ s'annulent. On trouve ainsi :

$$B + D = 0, \quad -Ba + Cn + Em = 0.$$

On a d'autre part :

$$C(m^2 + a^2 - n^2) + 2a nB = 0$$

d'où :

$$E = -C \frac{m^2 + n^2 + a^2}{2mn}.$$

On en conclut que

$$E^2 > C^2, \quad B^2 = D^2$$

et par conséquent que :

$$D^2 + E^2 > B^2 + C^2.$$

Donc l'amplitude de la seconde vibration, c'est-à-dire la vibration propre du résonateur est toujours plus grande que l'amplitude initiale de la première vibration, c'est-à-dire de celle qui a même période que l'excitateur.

La différence est très faible si l'amortissement n'est pas très considérable et si les deux périodes ne diffèrent pas beaucoup; elle augmente avec la différence des deux périodes, mais n'est jamais très considérable.

Voyons maintenant comment varie l'amplitude de la première vibration $\sqrt{B^2 + C^2}$ quand on fait varier m , c'est-à-dire la période du résonateur. On trouve :

$$(6) \quad \sqrt{B^2 + C^2} = \frac{A}{\sqrt{(m^2 + a^2 - n^2)^2 + 4a^2n^2}}$$

Quand on varie de 0 à $+\infty$, l'amplitude de $\sqrt{B^2 + C^2}$ croît d'abord jusqu'à un certain maximum et décroît ensuite jusqu'à 0. Le maximum a lieu pour

$$m = \sqrt{n^2 - a^2}$$

et est égal à

$$\frac{A}{2an}.$$

Ce maximum est d'autant plus marqué que $\frac{a}{n}$ est plus faible. Pour des excitateurs dont l'amortissement serait négligeable, la résonance ne pourrait donc se

produire que quand l'excitateur et le résonateur seraient en harmonie complète, parce que le maximum serait incomparablement plus grand que les valeurs voisines. Il n'en est plus de même avec un amortissement sensible et c'est ce qui explique pourquoi la résonance peut encore avoir lieu, quoique avec moins d'intensité quand les deux périodes cessent d'être concordantes.

Posons maintenant pour abrégier :

$$z = Be^{-at'} \cos nt' + Ce^{-at'} \sin nt' + D \cos mt' + E \sin mt' = \psi(t') \\ = \psi(t - t_0)$$

et cherchons à établir de quelle manière varie la fonction ψ quand t' varie de 0 à $+\infty$.

Supposons d'abord les deux périodes fort peu différentes; au temps $t' = 0$, les deux vibrations ont sensiblement même amplitude, mais elles sont de phase opposée et ψ est nul; l'amplitude de la première vibration va ensuite en décroissant; en même temps la différence de phase change mais avec une extrême lenteur, de sorte que quand les deux vibrations ont pris même phase, la première s'est presque complètement éteinte. Il résulte de là que ψ reste quelque temps très petit, mais ses oscillations vont en croissant jusqu'à un certain moment où leur amplitude devient constante et où leur période devient régulière et égale à celle du résonateur.

Si les deux périodes diffèrent davantage, les choses se passent moins simplement parce que la phase des deux vibrations peut devenir la même avant que la première soit tout à fait éteinte. Alors nous aurons successivement des oscillations très faibles de ψ , puis des oscillations fortes mais irrégulières qui dureront fort peu de temps, puis des oscillations un peu moins fortes et régulières

ayant pour période celle du résonateur et qui se prolongeront pendant fort longtemps.

Ces considérations expliquent le fait de la résonance multiple. Hertz, dans un de ses premiers mémoires, a construit une courbe en prenant pour abscisses les longueurs des résonateurs et pour ordonnées les longueurs des étincelles. Les observations de ce genre ne peuvent avoir une très grande précision et il serait puéril de vouloir comparer de trop près cette courbe avec la formule (6). Je puis dire toutefois que ces observations ne contredisent pas la manière de voir que je viens d'exposer, mais qu'elles s'accorderaient mieux avec l'hypothèse d'un amortissement plus fort que celui qu'a calculé Hertz en tenant compte seulement du rayonnement.

Des interférences.

Il me reste à expliquer pourquoi, dans les expériences d'interférence, l'internœud mesuré correspond à la période du résonateur et non à celle de l'excitateur.

Que se passe-t-il lorsque l'excitateur et le résonateur se trouvent en présence d'une paroi réfléchissante? Voyons d'abord ce que devient la force électrique X ; nous pourrions poser :

$$X = X_0 - X_1$$

X_0 représentant la force électrique due à la perturbation émanée directement de l'excitateur et $-X_1$ la force électrique due à l'onde réfléchie sur la paroi; je mets le signe $-$ devant X_1 à cause du changement de signe dû à la réflexion.

Nous aurons encore :

$X_0=0$ pour $t < t_0$ et $X_0 = \varphi(s)e^{-a(t-t_0)} \cos n(t-t_0)$ pour $t > t_0$
et

$X_1=0$ pour $t < t_1$ et $X_1 = \varphi(s)e^{-a(t-t_1)} \cos n(t-t_1)$ pour $t > t_1$.

Ici t_0 représente le temps que met la perturbation à aller directement de l'excitateur au résonateur et t_1 le temps qu'elle met à aller de l'excitateur à la paroi réfléchissante et à revenir de cette paroi au résonateur.

Soit alors une fonction $\theta(t)$ définie de la façon suivante :

$$\theta(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

et

$$\theta(t) = e^{-at} \cos nt \int_0^s \frac{\varphi(s)}{C} \sin \frac{\pi s}{S} ds = Ae^{-at} \cos nt \text{ pour } t > 0.$$

L'équation à laquelle nous avons à satisfaire peut alors s'écrire :

$$(7) \quad \frac{d^2 z}{dt^2} + m^2 z = \theta(t-t_0) - \theta(t-t_1)$$

avec cette condition que $z = \frac{dz}{dt} = 0$ pour $t = t_0$.

Jusqu'à l'époque t_0 , le résonateur est en repos; à l'époque t_0 il subit l'effet de la perturbation directe qui continue ensuite à se faire sentir, mais en s'amortissant progressivement; jusqu'à l'époque t_1 cette perturbation directe agit seule, mais à partir du temps t_1 , l'action de la perturbation réfléchie commence à son tour.

L'intégration de l'équation (7) se fait immédiatement, on trouve :

$$z = \psi(t-t_0) - \psi(t-t_1)$$

la notation ψ ayant même sens que plus haut.

Après un intervalle de temps assez court où les oscil-

lations sont faibles ou irrégulières, le régime s'établit et dure beaucoup plus longtemps. Les termes qui contiennent le facteur, l'exponentielle e^{-at} sont alors évanouis et il reste

$$\psi(t) = D \cos mt + E \sin mt$$

d'où

$$z = D [\cos m(t-t_0) - \cos m(t-t_1)] + E [\sin m(t-t_0) - \sin m(t-t_1)].$$

Ainsi donc, une fois le régime établi, les oscillations deviennent régulières, leur période est $\frac{2\pi}{m}$ et leur amplitude est

$$2 \sqrt{D^2 + E^2} \sin \frac{m}{2} (t_0 - t_1).$$

Les nœuds nous seront donc donnés par les équations :

$$t_1 - t_0 = \frac{2K\pi}{m}$$

et les ventres par les équations :

$$t_1 - t_0 = \frac{(2K+1)\pi}{m}$$

K étant un entier.

On voit que l'internœud correspond à la longueur d'onde du résonateur, ce qui est conforme à l'expérience de MM. Sarasin et de la Rive.

Une circonstance secondaire vient peut-être aider à produire le même effet. Le résonateur, une fois mis en vibration, devient à son tour un centre d'ébranlement. La perturbation qui en émane se réfléchit sur la paroi et revient sur le résonateur dont elle renforce ou affaiblit la

vibration suivant que la phase en est concordante ou discordante.

Toute discussion plus approfondie serait prématurée. Des expériences ultérieures pourront seules montrer si l'explication de MM. Sarasin et de la Rive rend mieux ou moins bien compte des faits que la mienne, ou s'il convient de les combiner entre elles.

Paris, 7 mai 1891.

