COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 26 OCTOBRE 1891.

PRÉSIDENCE DE M. DUCHARTRE.

MEMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur la théorie des oscillations hertziennes.* Note de M. H. Poincaré.

« Les équations auxquelles doivent satisfaire, dans la théorie de Maxwell, les oscillations hertziennes, jouissent de quelques propriétés sur lesquelles je crois utile d'attirer l'attention, non seulement parce qu'elles peuvent, dans certains cas, faciliter le calcul de la période, mais surtout parce qu'elles permettent d'étendre à un excitateur quelconque les résultats de Hertz (*Wiedemann*, t. XXXVI) relatifs à l'état du champ électromagnétique et à la radiation de l'énergie. C'est ce que j'ai déjà essayé de faire, mais sans y insister comme il convenait, dans les *Annales de Genève*, en cherchant à déterminer par l'analyse l'amortissement des oscillations propres d'un résonateur circulaire.

» J'adopte les notations de Maxwell et je désigne par f, g, h, α, β, γ, F, G, H, u, v, w, p, q, r, φ, ρ les composantes du déplacement électrique, de la force magnétique, du potentiel vecteur, du courant total, du courant de conduction, le potentiel électrostatique et la densité électrique.

» Je suppose que le champ ne soit occupé que par des conducteurs et par un diélectrique *unique* de pouvoir inducteur K. Je suppose que ces milieux ne sont pas magnétiques et que $\mu = 1$. On sait d'ailleurs qu'avec des oscillations aussi rapides l'induction magnétique n'a pas le temps de se produire.

» Je pose

$$(\alpha) \qquad \frac{dp_0}{dt} = p, \qquad \frac{dq_0}{dt} = q, \qquad \frac{dr_0}{dt} = r, \qquad \frac{dp_0}{dx} + \frac{dq_0}{dy} + \frac{dr_0}{dz} = -\rho.$$

» Je rappelle que, pour des oscillations très rapides, tous les conducteurs se comportent comme s'ils étaient parfaits, et que les courants ne pénètrent qu'à une profondeur excessivement faible, de sorte qu'on peut partager le conducteur en deux régions, l'une superficielle où les courants de conduction sont très intenses, l'autre intérieure où ils sont nuls

» On a d'abord dans tout l'espace

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0, \qquad \Delta F = -4\pi u, \\ &\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0, \qquad u = \frac{df}{dt} + p = \frac{d(f+p_0)}{dt}, \\ &\frac{dp_0}{dx} + \frac{dq_0}{dy} + \frac{dr_0}{dz} + \rho = 0, \qquad K\Delta\varphi = -4\pi\rho. \end{aligned} \right.$$

» On a dans le diélectrique

$$(2) \qquad \frac{4\pi f}{K} = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\varphi}{dx}.$$

» Dans la couche superficielle du conducteur, p, q et r sont très grands de sorte que nous pouvons négliger les courants de déplacement devant les courants de conduction. Nous pouvons donc, sans changer le résultat, attribuer à f telle valeur que nous voulons et, par conséquent, supposer que l'équation (2) est encore satisfaite.

» Dans la région intérieure, il n'y a pas de courant et l'on a

$$p = f = u = \frac{dF}{dt} + \frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

de sorte que l'équation (2) est encore satisfaite.

» Ainsi on doit satisfaire, dans tout l'espace, aux équations (1) et (2) ainsi qu'à celles qu'on en peut déduire par symétrie.

» Les courants de conduction p, q, r sont inconnus; néanmoins, avec les excitateurs de forme simple ordinairement employés, il est plus facile de s'en faire une idée approximative que des autres quantités à calculer. Il peut donc être intéressant d'exprimer toutes ces quantités en fonctions de p, q et r. Voici comment on y parvient :

» Soit $d\tau'$ un élément de la couche superficielle du conducteur, x', y', z' ses coordonnées; soit x, y, z un point quelconque de l'espace. Soit R la distance des deux points x, y, z et x', y', z'. Soient p', q', r' les valeurs de p_0, q_0, r_0 au point x', y', z'; ce seront évidemment des fonctions de x', y', z' et de t. Soient p'', q'', r'' ce que deviennent ces fonctions quand on y remplace t par $t - \mathrm{R}\sqrt{\mathrm{K}}$. Posons

$$\xi = \frac{p''}{\mathrm{R}}, \quad \eta = \frac{q''}{\mathrm{R}}, \quad \zeta = \frac{r''}{\mathrm{R}}, \quad \xi_2 = \frac{p'}{\mathrm{R}}, \quad \eta_2 = \frac{q'}{\mathrm{R}}, \quad \zeta_2 = \frac{r'}{\mathrm{R}},$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2, \quad \eta = \eta_1 + \eta_2, \quad \zeta = \zeta_1 + \zeta_2.$$

» Posons ensuite

$$\mathrm{X} = \int \xi\, d\tau', \quad \mathrm{Y} = \int \eta\, d\tau', \quad \mathrm{Z} = \int \zeta\, d\tau', \quad \mathrm{X}_1 = \int \xi_1\, d\tau', \quad \ldots$$

» On peut observer que les quantités sous le signe $\int$, ξ, η et ζ, deviennent infinies quand la distance R s'annule, et par conséquent quand le point x, y, z vient à l'intérieur de la couche superficielle, mais qu'il n'en est plus de même des quantités ξ_1, η_1 et ζ_1.

» Posons encore

$$\Theta = \frac{d\mathrm{X}}{dx} + \frac{d\mathrm{Y}}{dy} + \frac{d\mathrm{Z}}{dz}, \qquad \Theta_1 = \frac{d\mathrm{X}_1}{dx} + \frac{d\mathrm{Y}_1}{dy} + \frac{d\mathrm{Z}_1}{dz}.$$

» On vérifiera aisément les équations

$$\Delta\mathrm{X} = \mathrm{K}\frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2} - 4\pi p_0, \qquad \Delta\mathrm{X}_1 = \mathrm{K}\frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2},$$

$$\Delta\Theta = \mathrm{K}\frac{d^2\Theta}{dt^2} + 4\pi\rho, \qquad \Delta\Theta_1 = \mathrm{K}\frac{d^2\Theta}{dt^2}, \qquad \Theta = \Theta_1 - \mathrm{K}\varphi.$$

» On démontre ensuite qu'on satisfera aux équations (1) et (2), en posant

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{K}\frac{d\mathrm{F}}{dt} &= \mathrm{K}\frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2} - \frac{d\Theta_1}{dx} = \Delta\mathrm{X} + 4\pi p_0 - \frac{d\Theta_1}{dx}, \\ -4\pi f = \mathrm{K}\frac{d\mathrm{F}}{dt} + \mathrm{K}\frac{d\varphi}{dx} &= \mathrm{K}\frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2} - \frac{d\Theta}{dx} = \Delta\mathrm{X} + 4\pi p_0 - \frac{d\Theta_1}{dx}. \end{aligned} \right.$$

et les équations qu'on en peut déduire par symétrie, ce qui donne la solution du problème.

» Dans le diélectrique, p_0 est nul et ces formules se simplifient.

» Dans le diélectrique, les composantes de la force magnétique ont pour valeurs

$$\alpha = \frac{d^2 Z}{dy\,dt} - \frac{d^2 Y}{dz\,dt}.$$

» Examinons, en particulier, le cas où nos oscillations sont périodiques avec un amortissement.

» Dans ce cas, toutes nos fonctions peuvent être mises avantageusement sous la forme suivante

$$f = \text{partie réelle}\, f' e^{kt},$$

f' étant une fonction généralement imaginaire de x, y, z, indépendante du temps, et k une constante imaginaire. Il en sera de même de toutes nos autres fonctions; chacune d'elles sera la partie réelle d'un produit dont un facteur est l'exponentielle e^{kt} et l'autre une quantité indépendante du temps et que je désignerai par la même lettre que la fonction correspondante, mais accentuée. Ainsi

$$\xi = \text{partie réelle de } \xi' e^{kt}, \qquad p_0 = \text{partie réelle de } p'_0 e^{kt}.$$

» Je désignerai par $p^\star$ la valeur de p'_0 au point x', y', z', de telle façon que

$$p' = \text{partie réelle de } p^\star e^{kt}.$$

Il vient alors

$$p'' = \text{partie réelle de } p^\star e^{k(t - R\sqrt{K})},$$

d'où l'on déduit

$$\xi' = \frac{p^\star e^{-kR\sqrt{K}}}{R}.$$

» Il en résulte que X, Y, Z sont les parties réelles de $X' e^{kt}$, $Y' e^{kt}$, $Z' e^{kt}$; X' étant un potentiel dû à l'attraction d'une matière fictive répandue dans la couche superficielle du conducteur; la densité de cette matière est $p^\star$, et la loi d'attraction est une fonction de la distance égale à la dérivée de $R^{-1} e^{-kR\sqrt{K}}$.

» A l'intérieur du conducteur, f doit être nul; on en conclut que

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

est une différentielle exacte. Réciproquement, si cette condition est remplie, le déplacement et la force électrique sont nuls à l'intérieur du conducteur, et à l'extérieur les lignes de force électrique aboutissent normalement à la surface du conducteur. C'est là la condition à la limite à laquelle on doit satisfaire dans le calcul de la période.

» On voit ainsi que le problème peut se présenter sous une double forme :

» On peut se proposer de satisfaire aux équations (1) et (2) *dans le diélectrique* de telle sorte que les lignes de force aboutissent normalement aux conducteurs.

» Ou bien on peut se proposer de déterminer les courants superficiels de conduction p, q, r de telle sorte que, *à l'intérieur du conducteur,*

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

soit une différentielle exacte.

» On remarquera l'analogie avec la double forme que peut prendre le problème de la distribution électrique.

» Dans ce problème, on peut, en effet, ou bien se proposer de satisfaire dans le diélectrique à l'équation de Laplace, de telle sorte que le potentiel ait une valeur constante à la surface du conducteur.

» Ou bien on peut se proposer de déterminer la densité superficielle de l'électricité de telle sorte que, à l'intérieur du conducteur, l'attraction soit nulle.

» Je remarque que les conditions (α) ne suffisent pas pour déterminer complètement p_0, q_0 et r_0; mais, quelle que soit la manière dont on détermine ces quantités, pourvu qu'on s'astreigne aux conditions (α), les valeurs du déplacement électrique et de la force magnétique dans le diélectrique ne seront pas changées. »

MINÉRALOGIE. — *Sur une nouvelle espèce minérale, la Boléite.* Note de MM. **Mallard** et **E. Cumenge**.

« Le grand gisement de cuivre du Boleo, situé près du port de Santa Rosalia, dans la basse Californie (Mexique), est constitué par une série de couches cuivreuses intercalées dans des tufs et conglomérats formés par la destruction des roches trachytiques et volcaniques de la contrée. Le cuivre s'y présente disséminé à l'état de carbonates vert et bleu, d'oxyde noir, d'oxydule rouge, d'Atacamite, de silicates complexes et même, quoique plus rarement, de sulfure de cuivre.

» Dans certaines parties de ce vaste gisement, l'un de nous vient de dé-