3e ANNÉE N° 23 15 DÉCEMBRE 1892

REVUE GÉNÉRALE

DES SCIENCES

PURES ET APPLIQUÉES

DIRECTEUR : LOUIS OLIVIER

LES FORMES D'ÉQUILIBRE

D'UNE MASSE FLUIDE EN ROTATION

D'après les idées généralement admises, tous les astres ont été originairement liquides ou gazeux, et ceux qui n'ont pas conservé leur fluidité primitive, ont gardé, en se solidifiant, la figure qu'ils avaient prise quand ils étaient encore fluides.

Les astronomes ont ainsi été conduits à se poser le problème suivant, afin d'expliquer la figure des corps célestes : Quelles sont les forces auxquelles étaient soumises ces masses fluides qui sont devenues les astres actuels et quelles formes d'équilibre devaient prendre ces masses sous l'influence de ces forces?

La première de ces forces était l'attraction newtonienne. Chaque molécule fluide était attirée par les autres parties de la masse en raison directe des masses et en raison inverse du carré des distances. La seconde était la force centrifuge produite par la rotation de la masse. On admet que cette rotation devait être uniforme, c'est-à-dire que toutes les parties de la masse devaient effectuer un tour complet dans le même temps. Et en effet, si cette uniformité n'existait pas, le frottement mutuel des diverses parties du fluide l'aurait promptement rétablie.

Déterminer la figure d'équilibre d'un fluide soumis à ces forces est un problème d'hydrostatique. Ce problème est très difficile, et sa solution, quelque incomplète qu'elle soit encore, a exigé de grands efforts, que l'importance de la question justifiait d'ailleurs pleinement.

Plusieurs géomètres du siècle dernier, parmi lesquels Clairaut doit être cité en première ligne, ont résolu le problème, en supposant que la rotation est lente et que la figure d'équilibre diffère peu d'une sphère. C'est bien le cas, en effet, pour toutes les planètes dans leur état actuel; et cependant cela ne saurait suffire, car on peut se demander s'il en est encore de même pour certaines étoiles, comme les étoiles variables, par exemple. On peut aussi supposer, comme le faisait Laplace, que la matière, qui a servi à former les planètes, a d'abord, en se détachant du Soleil, affecté une forme annulaire et par conséquent très différente d'une sphère.

Dès qu'on ne se restreint plus aux figures sphéroïdales, le problème devient beaucoup plus difficile, et il est encore bien loin d'être résolu, même en supposant, comme nous allons le faire, que la masse fluide considérée est homogène, c'est-à-dire que sa densité est constante.

Mac-Lorin a montré qu'une des figures d'équilibre que peut affecter un fluide homogène en rotation est *un ellipsoïde de révolution aplati*. Pendant longtemps on a pu croire que cette solution était unique.

Mais Jacobi, au commencement de ce siècle, a découvert une solution vraiment inattendue : certains ellipsoïdes à trois axes inégaux, appelés aujourd'hui ellipsoïdes de Jacobi, sont également des figures d'équilibre. La rotation s'effectue autour du petit axe.

Ce résultat causa un grand étonnement. On s'était habitué à regarder comme évident que toutes les formes d'équilibre devaient être des surfaces de révolution. Il n'y a aucune raison pour cela, et cette évidence apparente était vaine. L'exemple n'est d'ailleurs pas rare dans les annales de la science et ce n'est pas là le premier fantôme de ce genre qu'on ait vu se dissiper ainsi.

Certaines personnes ont voulu expliquer de la sorte la variabilité de certaines étoiles à courte période. Si ces astres ont la forme d'ellipsoïdes de Jacobi, ils se présentent à nous tantôt par le grand axe, tantôt par l'axe moyen et leur surface apparente doit varier périodiquement. Il est impossible pour le moment de se prononcer sur la valeur de cette explication.

On a fait une autre hypothèse qui se trouve reproduite dans quelques ouvrages, bien qu'elle ne soutienne pas un instant d'examen. A une certaine époque, les géodésiens avaient cru observer que l'aplatissement du globe n'est pas le même pour les différents méridiens et que la Terre affecte la forme d'un ellipsoïde à trois axes inégaux. On a dit que cette figure devait être un ellipsoïde de Jacobi. C'était oublier que les ellipsoïdes de Jacobi diffèrent tous beaucoup de la sphère et que le seul qui soit compatible avec la vitesse de rotation de la Terre est une sorte d'aiguille très allongée.

Après la découverte de Jacobi, on a été naturellement conduit à se demander s'il n'existait pas d'autres formes d'équilibre non ellipsoïdales.

Le problème a été nettement posé dans l'admirable traité de philosophie naturelle de Thomson et Tait où se trouvent quelques pages éminemment suggestives. Ce sont ces pages qui ont inspiré les recherches ultérieures, parmi lesquelles les plus importantes sont, sans contredit, celles de M. Liapounoff. Les travaux de ce savant russe, ceux de M. Mathiessen, de Mme Kowalevski et les miens ont mis en évidence l'existence de nombreuses formes d'équilibre sur lesquelles je voudrais donner quelques détails.

I. — Formes nouvelles d'équilibre

Équilibre. — Si l'on fait varier d'une manière continue le moment de rotation (c'est-à-dire le produit du moment d'inertie par la vitesse de rotation), les ellipsoïdes de Mac-Lorin, comme ceux de Jacobi se déforment d'une manière continue.

Considérons d'abord les ellipsoïdes de révolution de Mac-Lorin. Quand le moment de rotation croîtra, l'aplatissement, d'abord très faible, croîtra constamment et finira par devenir très considérable ; la vitesse de rotation croîtra jusqu'à un certain maximum, pour décroître ensuite jusqu'à s'annuler.

Elle peut en effet décroître, bien que le moment de rotation croisse, parce que l'autre facteur, qui est le moment d'inertie, croît très rapidement.

On arrive à des résultats analogues, ainsi que l'a montré Liouville, en ce qui concerne les ellipsoïdes de Jacobi. Ces ellipsoïdes n'existent que si le moment de rotation est supérieur à une certaine valeur. Quand ce moment va en croissant à partir de cette valeur, la vitesse de rotation décroît et finit par s'annuler; le grand axe va en croissant et le petit axe en décroissant sans cesse; l'axe moyen décroît plus rapidement encore. D'abord il est égal au grand axe, de telle façon que l'ellipsoïde est de révolution autour du petit axe, c'est-à-dire de l'axe de rotation; au contraire quand le moment de rotation est très grand et la vitesse de rotation très petite, l'axe moyen est presque égal au petit axe, de telle sorte que la figure ressemble à un ellipsoïde de révolution très allongé.

On voit que les deux catégories d'ellipsoïdes forment deux séries continues de figures d'équilibre. Mais il y a une figure qui est commune aux deux séries et qui est, si l'on veut me permettre cette comparaison, un point de *bifurcation*. Je veux parler de l'ellipsoïde de Jacobi qui correspond à la valeur minimum du moment de rotation; il est en effet en même temps, ainsi que je viens de le dire, un ellipsoïde de révolution aplati.

Je l'appellerai l'ellipsoïde E_1.

Les figures nouvelles d'équilibre dont il me reste à parler forment de même des séries continues; et quelques-unes d'entre elles, qui appartiennent en même temps à la série des ellipsoïdes de Mac-Lorin ou à celle des ellipsoïdes de Jacobi, sont de véritables figures de bifurcation analogues à E_1.

Je vais chercher à faire comprendre la forme de ces figures nouvelles. Prenons d'abord pour point de départ un ellipsoïde de révolution. Partageons-en la surface en $n+1$ zones, en y traçant n parallèles. Partageons-la de même en $2p$ fuseaux égaux par p méridiens équidistants.

Ces parallèles et ces méridiens, se coupant à angle droit, déterminent une sorte de damier; imaginons maintenant que la surface de l'ellipsoïde se creuse ou se soulève, de telle façon que les cases noires de notre damier soient remplacées par des montagnes très peu élevées et les cases blanches par des vallées très peu profondes; nous obtiendrons ainsi une figure d'équilibre très peu différente de l'ellipsoïde.

Pour nous rendre compte de la forme des autres solides d'équilibre de la même série, nous n'avons qu'à supposer que ces relifs vont en s'accentuant et que les lignes qui séparent les dépressions des montagnes se déforment peu à peu.

Il est inutile d'ajouter que l'aplatissement de l'ellipsoïde qui sert de point de départ et les latitudes de nos n parallèles ne peuvent pas être choisis arbitrairement et qu'ils ne sont pas les mêmes pour toutes les séries.

Le nombre n peut être nul de telle sorte que l'ellipsoïde soit seulement divisé en fuseaux; le nombre p peut aussi être nul, de sorte qu'il soit seulement divisé en zones.

A chaque combinaison des deux nombres n et p correspond une série de figures nouvelles d'équilibre. Observons toutefois que les combinaisons

$$(n=0,\ p=1),\quad (n=1,\ p=0),\quad (n=1,\ p=1)$$

ne donnent que l'ellipsoïde de Mac-Lorin déplacé, mais non déformé, et que la série qui correspond à la combinaison $(n=0,\ p=2)$ n'est autre chose que la série des ellipsoïdes de Jacobi.

Ces figures nouvelles d'équilibre admettent p plans de symétrie passant par l'axe de rotation. Si p est nul, elles sont de révolution autour de cet axe. Enfin, si n est pair, elles ont un $p+1$e, plan de symétrie perpendiculaire à l'axe de rotation.

Il existe d'autres séries de formes d'équilibre que l'on obtient en prenant comme point de départ un ellipsoïde de Jacobi.

Voici comment on les obtient :

Traçons à la surface d'un ellipsoïde de Jacobi n lignes convenablement choisies de façon à la diviser en $n+1$ zones, entourant les pôles du grand axe. (Ces lignes doivent être choisies parmi celles que les géomètres appellent lignes de courbure.)

Imaginons maintenant que la surface de l'ellipsoïde se creuse ou se soulève de telle façon que la première de ces zones soit remplacée par une montagne, la zone suivante par une vallée, la suivante par une montagne et ainsi de suite. Nous obtiendrons ainsi une figure d'équilibre très peu différente de l'ellipsoïde.

Pour nous rendre compte de la forme des autres solides d'équilibre de la même série, nous n'avons qu'à supposer que ces reliefs vont en s'accentuant. Notre ellipsoïde déformé va présenter alors une suite de renflements et d'étranglements alternatifs, formant comme une série de plis transversaux.

A chaque valeur du nombre n, à partir de $n=3$ inclusivement, correspond une de ces séries de figures d'équilibre.

Toutes admettent deux plans de symétrie rectangulaires, l'un perpendiculaire à l'axe de rotation, l'autre passant par cet axe. Les figures d'équilibre qui correspondent à une valeur paire de n admettent un troisième plan de symétrie perpendiculaire aux deux premiers.

J'appellerai particulièrement l'attention sur la série qui correspond à $n=3$. Je représente sur la figure 1 l'un des solides d'équilibre de cette série. Le trait pointillé est le contour de l'ellipsoïde de Jacobi qui a servi de point de départ, et le trai

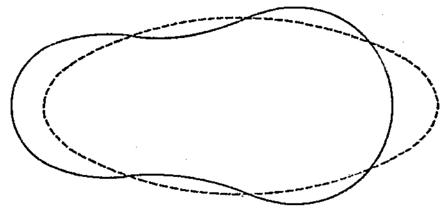

Fig. 1.

plein est le contour de la nouvelle figure d'équilibre.

Parmi les figures de cette série, il y en a une qui est en même temps un ellipsoïde de Jacobi. Je l'appellerai l'ellipsoïde E.

Stabilité. — Tous ces solides sont des figures d'équilibre, mais cet équilibre est-il stable ? C'est ce que nous avons encore à examiner.

Lord Kelirn (Sir W. Thomson) et M. Tait, dans l'ouvrage que j'ai cité plus haut, ont les premiers remarqué qu'il y a deux sortes de stabilité.

Observons d'abord qu'il y a deux espèces d'équilibre. Il y a, en premier lieu, l'équilibre absolu qui est atteint quand tous les corps envisagés sont en repos; mais ce n'est pas celui-là que nous avons à considérer dans le problème qui nous occupe, puisque notre masse fluide n'est pas en repos mais en rotation. Seulement, elle paraîtrait en repos, à un observateur qui serait entraîné comme elle dans un mouvement de rotation uniforme : elle serait en *équilibre relatif* par rapport à cet observateur.

Les lois de l'équilibre absolu et celles de l'équilibre relatif ne sont pas tout à fait les mêmes. L'un et l'autre sont stables quand ils correspondent au minimum de l'énergie totale du système envisagé. Il est clair en effet que, pour faire sortir le système de sa situation d'équilibre, il faut lui fournir une certaine quantité d'énergie, et qu'il ne pourra s'en écarter beaucoup que si cette dépense d'énergie est très grande.

Cette condition, qui est toujours suffisante, est nécessaire dans le cas de l'équilibre absolu; elle ne l'est pas dans le cas de l'équilibre relatif; un système animé d'un mouvement de rotation très rapide peut être en équilibre stable sans que l'énergie soit minimum.

C'est là l'explication d'une foule de paradoxes dynamiques; je n'en citerai qu'un qui est d'observation vulgaire et qui, pour cette raison, a presque cessé de nous sembler surprenant : la toupie, quand elle tourne assez vite, peut se maintenir debout sur la pointe.

Ainsi, quand même l'énergie n'est pas minimum, un système peut conserver son état d'équilibre relatif pendant un temps indéfini. Il le pourrait du moins si les frottements étaient nuls.

Mais Lord Kelvin a démontré que, si les frottements existent, *quelque faibles qu'ils soient*, ils n'en est plus de même et que l'équilibre finira par être détruit, à moins que l'énergie ne soit minimum. C'est ainsi, pour reprendre notre exemple, que la toupie finit par se ralentir et par tomber.

Il y a donc deux sortes de stabilité : la stabilité ordinaire, dont les frottements finissent par avoir raison, et la stabilité séculaire que les frottements ne peuvent détruire.

C'est la seconde qui doit nous intéresser le plus.

En se plaçant au point de vue de la stabilité séculaire, les ellipsoïdes de Mac Lorin, moins aplatis que E_1, sont stables ; les autres sont instables. Les ellipsoïdes de Jacobi, moins différents de l'ellipsoïde de révolution que E_2, sont stables ; les autres sont instables.

Enfin toutes les figures nouvelles dont nous avons parlé plus haut sont instables, à l'exception de la série sur laquelle nous avons insisté à la fin du paragraphe précédent.

C'est celle qui dérive de l'ellipsoïde de Jacobi et qui correspond au cas de $n = 3$. C'est elle dont fait partie la forme d'équilibre que nous avons représentée plus haut sur la figure 1.

II. — Conséquences cosmogoniques

On peut tirer de ce qui précède quelques conséquences intéressantes. Supposons une masse fluide homogène animée d'une rotation uniforme. Imaginons que cette masse se refroidisse et se condense ; supposons qu'en se condensant elle demeure homogène et que son refroidissement soit assez lent pour que les frottements aient le temps de maintenir l'uniformité de la rotation.

Le moment de rotation de la masse devra demeurer constant et, comme son moment d'inertie va en diminuant, sa vitesse de rotation ira au contraire en augmentant. Si, au début de la condensation, la vitesse de rotation est faible et la figure de notre masse fluide peu différente d'un sphère, son aplatissement ira en croissant avec la vitesse de rotation.

La masse fluide conservera pendant quelque temps la forme d'un ellipsoïde de révolution d'abord peu aplati (fig. 2), puis plus aplati (fig. 3.)

(Dans les figures 2 à 9 qui représentent les formes successives de la masse qui se condense, chacune de ces formes est représentée par deux projections l'une verticale dans la partie supérieure de la figure, l'autre horizontale dans la partie inférieure ; l'axe de rotation est supposé vertical.)

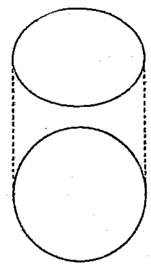

Fig. 2.

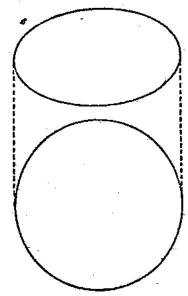

Fig. 3.

L'ellipsoïde, s'aplatissant de plus en plus, cessera bientôt d'être stable, ou du moins de conserver la stabilité séculaire. Il est vrai qu'il conservera encore quelque temps la stabilité ordinaire ; mais, les figures d'équilibre qui ne possèdent que cette sorte de stabilité finissent, comme nous l'avons vu, par être détruites par les frottements. Si donc le refroidissement est assez lent, ces ellipsoïdes ne pourront subsister, et la masse fluide devra prendre la forme d'un ellipsoïde de Jacobi, d'abord peu différent d'un ellipsoïde de révolution (fig. 4) puis plus allongé (fig. 5).

Mais l'ellipsoïde de Jacobi cessera, à son tour,

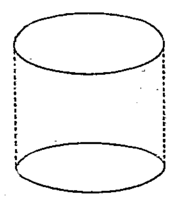

Fig. 4.

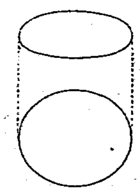

Fig. 5.

d'être stable et la masse fluide prendra des formes d'équilibre appartenant à la série de figures nouvelles représentées plus haut (fig. 1).

D'abord peu différente de l'ellipsoïde E_2, notre masse fluide prendra pour ainsi dire la forme d'un œuf avec un gros et un petit bout.

Puis elle se creusera dans le voisinage du petit bout (fig. 6) ; ce relief s'accentuant peu à peu, il se produira à cette place un étranglement (fig. 7) qui fera présager la division du fluide en deux masses distinctes.

Ces deux masses, s'étant séparées, restent d'abord voisines l'une de l'autre. Chacune d'elles, sous l'influence de l'attraction de l'autre masse, prend une figure pyriforme (fig. 8).

Le refroidissement continuant, chacune des masses se condense, sa rotation devient de plus en plus rapide et cesse d'être égale à la vitesse de révolution des deux masses autour de leur centre de gravité commun. Enfin, quand les dimensions des deux masses sont devenues suffisamment petites

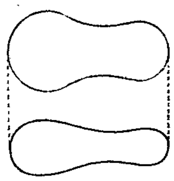

Fig. 6.

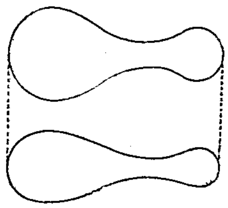

Fig. 7.

par rapport à la distance qui les sépare, leur figure se rapproche de l'ellipsoïde (fig. 9).

On pourrait être tenté de tirer de là des conséquences cosmogoniques et d'expliquer de cette manière l'origine des planètes. Le Soleil, en se condensant peu à peu, n'aurait pas alors, comme le croyait Laplace, abandonné successivement des

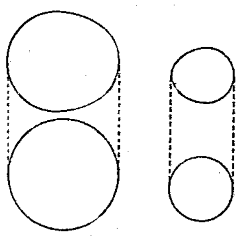

Fig. 8.

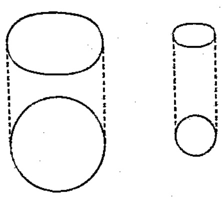

Fig. 9.

anneaux d'où les planètes seraient sorties ensuite; il se serait au contraire déformé jusqu'à ce qu'une petite masse, destinée à devenir une planète, se détache d'un point quelconque de son équateur. Mais, avant d'adopter cette conclusion, il faut tenir compte de certaines remarques qui lui enlèvent beaucoup de probabilité.

En premier lieu, nous avons supposé notre masse homogène; au contraire, la nébuleuse, qui a servi à former le système solaire, était sans doute très hétérogène et une grande partie de sa masse devait être condensée au centre. Il est impossible, pour le moment, de se rendre compte des changements que cette hétérogénéité apporterait dans nos résultats.

En second lieu, les deux masses représentées dans la figure 9 sont comparables; la plus petite serait sans doute la moitié ou le tiers de l'autre; au contraire la masse de Jupiter n'est que la millième partie de celle du Soleil.

Peut-être le processus que je viens de décrire (fig. 2 à 9) se rapproche-t-il plus de celui qui a produit certaines étoiles doubles que de celui d'où est sorti le système solaire. Tout dans tous les cas reste très hypothétique.

Anneau de Saturne. — Les figures dont nous venons de parler ne sont pas les seules qui soient connues. Il y a longtemps déjà, M. Mathiessen avait entrevu la possibilité des figures annulaires d'équilibre, et le même résultat avait été retrouvé ensuite par Lord Kelvin, qui s'est borné à l'énoncer. Grâce aux travaux de Mme Kowalevski et aux miens, nous en possédons une démonstration rigoureuse, peu différente probablement de celle que Lord Kelvin avait découverte, mais n'a pas publiée.

On peut établir qu'une masse fluide en rotation, soustraite à toute action extérieure, peut prendre la forme d'un anneau analogue à celui de Saturne, mais sans masse centrale. Si la vitesse de rotation est faible, cet anneau sera une sorte de tore très délié dont la section méridienne différera très peu d'une ellipse peu aplatie; mais l'équilibre de ces figures est instable.

Pour bien le faire comprendre, le mieux est de dire quelques mots des travaux de Maxwell sur la stabilité de l'anneau de Saturne. On peut faire, au sujet de la nature de cet astre, trois hypothèses différentes :

1° L'anneau est solide;

2° Il est formé d'un très grand nombre de satellites très petits, que le télescope ne peut séparer les uns des autres;

3° Il est fluide.

Laplace avait fait voir depuis longtemps que, si l'anneau est solide, son équilibre ne peut être stable si sa figure est symétrique et si son centre de gravité coïncide avec son centre de figure. Mais il croyait qu'il suffisait, pour rétablir la stabilité, de supposer des irrégularités peu importantes que les observations ne pouvaient déceler.

Un savant anglais, dont des travaux d'une tout autre nature ont illustré le nom, le célèbre électricien Clerk Maxwell, a repris la question par une analyse très simple. Il a montré qu'un anneau solide est instable à moins de présenter des irrégularités énormes. Si elles existaient, le télescope nous les aurait fait connaître depuis longtemps. Si j'ajoute que, d'après les calculs de Hirn, un anneau solide, plusieurs milliers de fois plus résistant que l'acier, se romprait sous l'effort des attractions subies par l'anneau de Saturne, on conclura que la première hypothèse doit être rejetée.

Passons à la seconde, qui a été proposée autrefois par Cassini. Il serait trop difficile de traiter le problème dans toute sa généralité; aussi Maxwell s'est-il borné à quelques cas simples; je ne parlerai que du plus simple de tous. Imaginons une couronne de satellites égaux, également espacés sur une circonférence ayant pour centre Saturne et décrivant cette circonférence d'un mouvement uniforme.

Il est clair que ce mouvement peut se continuer indéfiniment si aucune cause extérieure ne vient le troubler. Mais, si une semblable cause vient y apporter une perturbation très petite, la couronne va-t-elle finir par se disloquer, ou bien sa déformation restera-t-elle très petite? En d'autres termes, l'équilibre de notre couronne sera-t-il stable?

Je ne puis, bien entendu, reproduire ici l'analyse du savant anglais, et je dois me contenter d'un aperçu grossier. On peut voir d'abord que, si l'astre central n'existait pas, l'équibre serait instable. Si, en effet, l'un des satellites prend l'avance pour une cause quelconque, il se rapproche du satellite qui est devant lui et s'éloigne de celui qui est derrière. Il est plus attiré par le premier et moins par le second : sa marche est encore accélérée; son avance tend à s'accroître et la couronne à se disloquer.

Si nous supposons au contraire que les masses des satellites soient infiniment petites par rapport à celle de Saturne, chaque satellite se comportera comme s'il était seul; or, nous savons que le mouvement d'un satellite isolé est stable.

On peut donc prévoir, sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours à un calcul complet, que la condition de la stabilité de notre couronne sera que sa masse soit suffisamment petite par rapport à celle de l'astre central.

Le même résultat subsiste pour un système plus compliqué de satellites; c'est encore le même qu'obtient Maxwell dans la troisième hypothèse, c'est-à-dire en supposant la masse fluide. Par un calcul qui n'est peut-être pas parfaitement rigoureux, il démontre qu'un anneau fluide ne peut être stable que si sa densité moyenne est *au plus égale* à la 300[e] partie de celle de la planète.

Mais, on peut compléter le résultat de Maxwell par un raisonnement qui est assez court pour être reproduit ici. On sait que les électriciens se représentent un champ électrostatique comme sillonné par un très grand nombre de lignes de force. Ce qui définit une de ces lignes, c'est qu'en chacun de ses points la tangente est la direction de la force électrique.

Cette image leur est très précieuse, car elle peut remplacer dans la pratique une foule de formules mathématiques qui sont abstraites et compliquées. Mais ils usent aussi d'une autre image; ils supposent chacune de ces lignes de force remplacée par un petit canal qui est parcouru par un liquide fictif avec un débit constant et dans le sens de la force électrique. La quantité de ce liquide imaginaire qui passe à travers une surface quelconque, s'appelle le flux de force qui traverse cette surface. Tout se passe alors comme si chaque molécule d'électricité positive émettait continuellement une quantité constante de ce liquide, et si chaque molécule d'électricité négative en absorbait au contraire continuellement une quantité constante. On peut, en d'autres termes, résumer toutes les lois de l'électrostatique, en disant que le flux de force qui traverse une surface fermée est proportionnel à la somme algébrique des masses électriques contenues à l'intérieur de cette surface.

La même règle peut s'appliquer à l'attraction newtonienne: cette force suit, en effet, la même loi que l'attraction électrique, qui est la raison inverse du carré des distances. Elle s'applique encore quand, au lieu de considérer la gravitation seule, on considère la résultante de la gravitation et de la force centrifuge.

Imaginons en effet une matière fictive dont l'action sur les corps voisins soit conforme à la loi de Newton, mais soit répulsive, au lieu d'être attractive. C'est ce que l'on peut exprimer, si l'on préfère, en disant que la densité de cette matière est négative.

Supposons que cette matière fictive affecte la forme d'un cylindre de révolution indéfini, à l'intérieur duquel se trouvent tous les corps que l'on veut envisager, et que sa densité soit proportionnelle au carré de la vitesse de rotation. La répulsion exercée par cette masse fictive aura même grandeur et même direction que la force centrifuge. Pour obtenir la résultante de la gravitation et de la force centrifuge, il suffira donc de considérer à la fois l'action de toutes ces masses, tant réelles que fictives.

Cela posé, considérons notre masse fluide en rotation et une molécule superficielle faisant partie de cette masse, et soumise par conséquent à la gravitation et à la force centrifuge. La force totale, qui agit sur cette molécule, doit, pour qu'il y ait équilibre, être normale à la surface de la masse; mais, pour que cet équilibre soit stable, il faut de plus que cette force soit dirigée vers l'intérieur de la masse fluide, sans quoi elle tendrait à en détacher notre molécule. Toutes les lignes de force coupent donc normalement la surface de la masse, et le liquide imaginaire, qui est supposé les parcourir, et dont la vitesse a même direction que la force totale, doit toujours traverser cette surface en allant du dehors au dedans. Il en résulte que le flux de force total qui traverse cette surface est positif, et comme, d'après la règle énoncée plus haut, il est proportionnel à la somme algébrique de toutes les masses, tant réelles que fictives, situées à l'intérieur de cette surface, cette somme algébrique doit aussi être positive.

En d'autres termes, la densité moyenne du fluide réel doit être supérieure en valeur absolue à la densité de la matière fictive, laquelle, comme nous l'avons vu, est elle-même proportionnelle au carré de la vitesse de rotation.

Cette règle, appliquée à l'anneau de Saturne, nous apprend qu'un anneau fluide ne peut être stable que si sa densité est *au moins égale* à la seizième partie de celle de la planète. Ce résultat, rapproché de celui de Maxwell, nous amène à cette conclusion que l'anneau ne peut être fluide, et nous force à adopter l'hypothèse de Cassini, que les observations de M. Trouvelot semblent d'ailleurs confirmer.

Pour la même raison, les figures annulaires d'équilibre, étudiées par Mme Kowalevski, ne peuvent être stables.

Figure de la Terre. — Je ne dirai que quelques mots du cas beaucoup plus difficile où la masse en rotation est supposée hétérogène. C'est certainement ce qui se passe pour la Terre, et ce qui complique encore la question, c'est que la loi suivant laquelle la densité varie dans l'intérieur du globe nous est absolument inconnue. Loin de pouvoir nous en servir pour calculer l'aplatissement, nous devons, au contraire, profiter des mesures des géodésiens pour tâcher de deviner cette loi.

Nous disposons pour résoudre ce problème d'une autre donnée, qui est la constante de la précession des équinoxes. On sait en effet que ce phénomène est dû à l'action du Soleil sur le renflement équatorial du globe terrestre, et comme cette action dépend de la façon dont varie la densité intérieure, les observations de la précession peuvent nous renseigner sur cette variation.

Au premier abord, on serait tenté de croire que le problème est non seulement toujours possible, mais qu'il reste indéterminé et qu'on pourra trouver une infinité de lois satisfaisant à ces deux données d'observation. Loin de là : une série de recherches récentes, parmi lesquelles celles de M. Radau sont les premières en date et en importance, ont montré qu'on ne peut trouver aucune loi des densités qui satisfasse à la fois à l'aplatissement mesuré et à la précession observée.

Les géodésiens concluent à un aplatissement de $\frac{1}{292}$, tandis que l'aplatissement le plus grand qui soit compatible avec la précession observée est de $\frac{1}{297}$.

Il est impossible pour le moment de se prononcer sur la valeur des nombreuses hypothèses que l'on peut faire pour expliquer cette divergence.

Les mesures géodésiques doivent-elles être revisées? doit-on supposer que la Terre n'est pas un ellipsoïde de révolution et que l'aplatissement n'est pas le même suivant les divers méridiens ou dans les deux hémisphères?

Je ne crois pas que les mesures les plus récentes autorisent cette conclusion.

Admettra-t-on que la Terre, solidifiée depuis longtemps dans presque toute sa masse, a conservé l'aplatissement dû à la vitesse de rotation qu'elle possédait au moment de sa solidification et que sa rotation a depuis cette époque été considérablement ralentie par l'action des marées?

Croira-t-on au contraire que la croûte solide est très mince et que l'intérieur, resté liquide, est le siège de mouvements compliqués très différents de ceux que peut prendre un corps solide? Les calculs de Laplace ayant été faits en regardant la Terre comme un solide invariable, on conçoit que la précession d'un pareil système puisse être très différente de la précession théorique.

Enfin, on peut supposer encore que l'aplatissement primitif a été altéré parce que les diverses couches, en se contractant par suite du refroidissement du globe, ont exercé les unes sur les autres des pressions et se sont mutuellement déformées.

Mais je m'arrête, il est inutile de multiplier les hypothèses puisque toutes ces questions doivent rester provisoirement indécises.

H. Poincaré,
de l'Académie des Sciences.

MORVE ET MALLÉINE

La morve est une maladie contagieuse, microbienne, inoculable, qui s'observe surtout chez les animaux solipèdes (cheval, âne, mulet); cependant elle se transmet aussi aux autres mammifères domestiques et à l'homme. Elle affecte deux formes: la *forme morveuse* proprement dite, caractérisée par des ulcères sur la muqueuse nasale et par du jetage; la *forme farcineuse*, se traduisant par des tumeurs et des ulcères cutanés. Il est démontré aujourd'hui que la morve et le farcin ne sont que deux formes cliniques d'une seule et même affection, qu'on désigne communément sous le nom *d'affection farcino-morveuse* ou simplement de *morve.*

Quelle que soit la forme où elle se présente, l'affection farcino-morveuse peut être aiguë ou chronique suivant la rapidité de son évolution. Lorsqu'elle est chronique, et c'est ce qui se présente le plus souvent chez le cheval, les symptômes peuvent rester plus ou moins cachés ou manquer de