donneront ensuite

$$v = l + 2e_0 \sin(l - \sigma nt - \varpi_0),$$
$$\frac{r}{a} = 1 - \sigma - e_0 \cos(l - \sigma nt - \varpi_0),$$
$$l = nt + \varepsilon \qquad \sigma = \frac{1}{300}.$$

» Il convient de dire un mot des perturbations de ε. On peut prendre ici

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{2}{na}\frac{fMJ}{a^4} = 2\sigma n;$$

d'où

$$\varepsilon = 2\sigma nt + \varepsilon_0,$$
$$l = nt(1 + 2\sigma) + \varepsilon_0.$$

Le moyen mouvement fourni par les observations sera donc $n(1 + 2\sigma)$, de même que le demi grand axe sera $a(1 - \sigma)$. Il faudrait poser

$$n(1 + 2\sigma) = n', \qquad a(1 - \sigma) = a'.$$

En omettant les accents, il vient finalement

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} & v = l + 2e_0 \sin(l - \sigma nt - \varpi_0), \\ & \frac{r}{a} = 1 - e_0 \cos(l - \sigma nt - \varpi_0), \\ & l = nt + \varepsilon_0, \qquad n^2 a^3 = fM(1 + \sigma); \end{aligned} \right.$$

n, e_0, ϖ_0 et ε_0 sont quatre constantes qui devront être empruntées à l'observation. »

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur la propagation de l'électricité.* Note de M. **H. Poincaré**.

« On a représenté les variations du potentiel électrique dans un fil qui transmet une perturbation électrique par l'équation

$$A \frac{d^2 V}{dt^2} + 2B \frac{dV}{dt} = C \frac{d^2 V}{dx^2},$$

qui est connue sous le nom d'*équation des télégraphistes*. V est le potentiel, A, B, C sont des constantes; le premier terme provient de la self-induction, le second de la résistance ohmique, le second membre de la capacité du fil.

» On peut, en choisissant convenablement les unités, réduire l'équation à la forme

$$\frac{d^2V}{dt^2} + 2\frac{dV}{dt} = \frac{d^2V}{dx^2};$$

l'unité de vitesse est alors la vitesse de la lumière. Si l'on pose

$$V = U e^{-t},$$

l'équation devient

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{d^2U}{dx^2} + U. \tag{1}$$

» Pour que le problème soit déterminé, il faut que l'on se donne les conditions initiales; je suppose donc que, pour $t = 0$, U se réduit à une fonction donnée $f(x)$, que je mettrai sous la forme d'une intégrale de Fourier

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(q) e^{iqx} dq,$$

et que $\frac{dU}{dt}$, pour $t = 0$, se réduit à une fonction donnée

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_1(q) e^{iqx} dq.$$

Je puis alors mettre l'intégrale de (1) sous la forme

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqx}\left[\theta \cos t\sqrt{q^2-1} + \theta_1 \frac{\sin t\sqrt{q^2-1}}{\sqrt{q^2-1}}\right] dq, \tag{2}$$

ou bien

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha e^{i[qx+t\sqrt{q^2-1}]} dq + \int_{-\infty}^{+\infty} \beta e^{i[qx-t\sqrt{q^2-1}]} dq, \tag{3}$$

où

$$\alpha = \frac{\theta}{2} + \frac{\theta_1}{2i\sqrt{q^2-1}}, \qquad \beta = \frac{\theta}{2} - \frac{\theta_1}{2i\sqrt{q^2-1}}.$$

» Discutons ces résultats et, pour fixer les idées, supposons que $f(x)$ et $f_1(x)$ soient nuls pour

$$x > a \quad \text{ou} \quad x < b$$

et soient égaux à des polynômes entiers en x pour

$$a > x > b.$$

Alors α et β peuvent se mettre sous la forme

$$\alpha = \alpha' e^{-iqa} + \alpha'' e^{-iqb}, \qquad \beta = \beta' e^{-iqa} + \beta'' e^{-iqb},$$

α', α'', β' et β'' étant développables suivant les puissances de $\frac{1}{q}$ quand q est assez grand.

» Si alors nous mettons U sous la forme (3), la première intégrale du second membre de (3) s'écrira

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha' e^{-iqa} + \alpha'' e^{-iqb})\, e^{iq(x+t)} \psi(q, t)\, dq,$$

où

$$\psi(q, t) = e^{it[\sqrt{q^2-1}-q]}$$

est développable pour q suffisamment grand, suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{q}$ et de t. Alors, en vertu d'un théorème facile à démontrer, cette intégrale est une fonction holomorphe de x et de t, pour $t = 0$, et pour toutes les valeurs réelles de x, sauf pour

$$x = a - t, \qquad x = b - t.$$

De même, la seconde intégrale du second membre de (3) sera holomorphe, sauf pour

$$x = a + t, \qquad x = b + t.$$

» Ainsi, pour $t = 0$, U sera une fonction holomorphe de x et de t, sauf pour

$$x = a \pm t, \qquad x = b \pm t.$$

» Les valeurs initiales de U et de $\frac{dU}{dt}$ étant nulles pour $x > a$ et $x < b$, il en résulte que U sera nul pour

$$x > a + t \quad \text{et} \quad x < b - t.$$

» On voit également que la fonction U possède quatre discontinuités

$$x = a \pm t, \qquad x = b \pm t,$$

qui se propagent avec une vitesse constante égale à celle de la lumière.

» Pour pousser cette étude plus loin, commençons par faire une hypothèse particulière.

» Soient $f = 0$ pour toutes les valeurs réelles de x et $f_1 = 0$ pour toutes les valeurs de x non comprises entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, $f_1 = \frac{\pi}{2}$ pour $-\varepsilon < x < \varepsilon$. On en conclut, si ε est très petit,

$$\theta = 0, \qquad \theta_1 = 1$$

et

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqx} \frac{\sin t\sqrt{q^2-1}}{\sqrt{q^2-1}} dq = \int \frac{e^{i[qx+t\sqrt{q^2-1}]}}{2i\sqrt{q^2-1}} dq - \int \frac{e^{i[qx-t\sqrt{q^2-1}]}}{2i\sqrt{q^2-1}} dq.$$

» Les deux intégrales du troisième membre doivent être prises le long d'un chemin allant de $-\infty$ à $+\infty$, mais passant au-dessus de l'axe des quantités réelles, de façon à éviter les points singuliers $q = \pm 1$.

» La théorie des intégrales imaginaires de Cauchy montre que la première intégrale du troisième membre est égale à 0 pour $x + t > 0$ et à

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{ix\cos\varphi} e^{t\sin\varphi} d\varphi = \Lambda(x, t)$$

pour $x + t < 0$.

» De même la seconde intégrale est égale à 0 pour $x - t > 0$ et à $\Lambda(n, t)$ pour $x - t < 0$.

» On a donc

$$\begin{aligned} U &= 0 \quad \text{pour} \quad x > t, \\ U &= \Lambda \quad \text{pour} \quad t > x > -t, \\ U &= 0 \quad \text{pour} \quad x < -t. \end{aligned}$$

» On trouve d'ailleurs aisément

$$\Lambda(x, t) = \pi \sum \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \frac{(x^2 - t^2)^n}{(n!)^2} = \pi J_0\left(\sqrt{x^2 - t^2}\right),$$

J_0 étant la fonction de Bessel.

» Soit maintenant $\theta = 0$, mais θ_1 quelconque; ou, ce qui revient au même, f nul et f_1 quelconque; nous supposerons toutefois que f_1 est nul pour $x > a$ et $x < b$ et différent de 0 quand x est compris entre b et a.

» On a alors

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_1 e^{iqx} \frac{\sin t\sqrt{q^2-1}}{\sqrt{q^2-1}} dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz\, f_1(z)}{2\pi} K,$$

où l'on a posé

$$K = \int_{-}^{+\infty} \frac{e^{iq(x-z)} \sin t\sqrt{q^2-1}}{\sqrt{q^2-1}} dq.$$

» On voit que

$$K = 0 \quad \text{pour} \quad z > x + t, \quad \text{ou} \quad z < x - t$$

et

$$K = \Lambda(x - z, t) \quad \text{pour} \quad x + t > z > x - t.$$

» Comme, d'autre part, f_1 est nul sauf entre b et a, nous aurons $\left(\text{si } t > \frac{a-b}{2}\right)$ cinq hypothèses à distinguer :

$$(4)\quad \begin{cases} 1^\circ & x > a + t, & U = 0, \\ 2^\circ & a + t > x > b + t, & U = \int_{x-t}^{a} \frac{f_1(z)}{2\pi} \Lambda(x - z, t)\, dz, \\ 3^\circ & b + t > x > a - t, & U = \int_{b}^{a} \frac{f_1(z)}{2\pi} \Lambda\, dz, \\ 4^\circ & a - t > x > b - t, & U = \int_{b}^{x+t} \frac{f_1(z)}{2\pi} \Lambda\, dz, \\ 5^\circ & b - t > x, & U = 0. \end{cases}$$

» Soit maintenant f_1 nul, et f différent de 0 entre b et a, mais nul encore pour $x > a$ ou $x < b$. Il vient

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta \cos t\sqrt{q^2 - 1}\, dq,$$

de sorte que, pour passer du cas précédent à celui-ci, il suffit de changer θ_1 en θ (et f_1 en f), et de différentier par rapport à t. On trouve ainsi dans nos cinq hypothèses :

$$(5)\quad \begin{cases} 1^\circ & x > a + t, & U = 0, \\ 2^\circ & a + t > x > b + t, & U = \int_{x-t}^{a} \frac{f}{2\pi} \frac{d\Lambda}{dt} dz + \frac{f(x - t)}{2\pi} \Lambda(t, t), \\ 3^\circ & b + t > x > a - t, & U = \int_{b}^{a} \frac{f}{2\pi} \frac{d\Lambda}{dt} dz, \\ 4^\circ & a - t > x > b - t, & U = \int_{b}^{x+t} \frac{f}{2\pi} \frac{d\Lambda}{dt} dz + \frac{f(x + t)}{2\pi} \Lambda(-t, t). \\ 5^\circ & b - t > x, & U = 0. \end{cases}$$

» Observons d'ailleurs que

$$\Lambda(t, t) = \Lambda(-t, t) = \pi.$$

» Nous avons ainsi la solution complète de deux cas particuliers, celui où f est nul et celui où f_1 est nul. Il est clair que l'on résoudrait le cas général, en ajoutant ces deux solutions particulières.

» Les résultats précédents peuvent donner lieu à diverses observations; on voit d'abord que la *tête* de la perturbation se propage avec une certaine vitesse, de telle sorte que, en avant de cette tête, la perturbation est nulle, contrairement à ce qui se passe dans la théorie de la chaleur de Fourier et conformément aux lois de la propagation de la lumière ou du son par ondes planes, déduites de l'équation des cordes vibrantes. Mais il y a, avec ce dernier cas, une différence importante, car la perturbation, en se propageant, laisse derrière elle un résidu qui n'est pas nul; car U ne s'annule pas pour $b + t > x > a - t$.

» Si $a - b$ est très petit, c'est-à-dire si la perturbation est de très courte durée, les termes qui, dans les équations (4) et (5), sont exprimés par des intégrales sont très petits, tandis que les termes débarrassés du signe $\int$ restent finis. On a donc sensiblement

$$\begin{aligned}
&U = \tfrac{1}{2}f(x - t) \quad \text{pour } a + t > x > b + t,\\
&U = \tfrac{1}{2}f(x + t) \quad \text{pour } a - t > x > b - t,\\
&U = o \text{ dans tous les autres cas.}
\end{aligned}$$

» Le résidu est donc négligeable devant la perturbation principale; mais il n'en est plus de même si la perturbation est de longue durée et si $a - b$ est fini. Le résidu peut alors troubler les observations.

» Je crois qu'il ne sera pas inutile de se rappeler ces résultats quand on voudra discuter les expériences relatives à la vitesse de propagation de l'électricité.

» Des questions du même genre avaient été abordées par des méthodes toutes différentes, par le regretté Hugoniot, dans ses Mémoires des LVII[e] et LVIII[e] Cahiers du *Journal de l'École Polytechnique;* les méthodes que je propose conduisent à une solution plus complète et à des démonstrations plus rigoureuses. »

OPTIQUE. — *Vérifications numériques relatives aux propriétés focales des réseaux diffringents plans*. Note de M. **A. Cornu.**

« L'observation précise des propriétés focales des réseaux n'est pas sans offrir quelques difficultés : les unes sont d'ordre général et se rapportent