1036 54

Alexander Ziwet

Mathematische Theorie des Lichtes.

Vorlesungen

gehalten von

enri

H. Poincaré, 1854 -1912

Professor und Mitglied der Akademie.

Redigirt von J. Blondin, Privatdocent an der Universität zu Paris.

Autorisirte deutsche Ausgabe

von

Dr. E. Gumlich und **Dr. W. Jaeger.**

Mit 35 in den Text gedruckten Figuren.

Berlin.

Verlag von Julius Springer.

1894.

Buchdruckerei von Gustav Schade (Otto Francke) Berlin N.

Vorrede.

Die Optik ist der am weitesten entwickelte Zweig der Physik, und die sogenannte Undulationstheorie bildet dementsprechend ein abgeschlossenes Ganze, das den Geist wahrhaft befriedigen muss; indessen darf man nicht mehr von dieser Theorie verlangen, als sie uns geben kann.

Die mathematischen Theorien sollen uns ja nicht die wahre Natur der Dinge enthüllen; dies würde ein unvernünftiges Verlangen sein; ihr einziger Zweck ist vielmehr der, einen gewissen Zusammenhang zwischen den physikalischen Gesetzen herzustellen, welche uns die Erfahrung kennen lehrt und die wir ohne Hülfe der Mathematik nicht einmal aussprechen könnten.

Die Frage, ob der Aether wirklich existirt, hat für uns wenig Bedeutung; dies zu untersuchen, ist die Sache der Metaphysiker! Für uns bleibt die Hauptsache, dass alles so vor sich geht, als wenn der Aether thatsächlich vorhanden wäre, und ferner, dass diese Hypothese eine einfache Erklärung der verschiedenen Erscheinungen gestattet. Haben wir denn einen anderen Grund, an die Existenz materieller Gegenstände zu glauben? Dies ist doch auch nur eine bequeme Hypothese; freilich wird dieselbe wohl niemals aufgegeben werden, während zweifellos eines Tages die Annahme von dem Vorhandensein des Aethers als unnütz verworfen werden wird.

Aber selbst dann werden die optischen Gesetze und die Gleichungen, welche diese Gesetze analytisch darstellen, wenigstens als erste Annäherung bestehen bleiben. Es ist also immer sehr förderlich, sich in eine Theorie zu vertiefen, die uns den inneren Zusammenhang aller dieser Gleichungen kennen lehrt.

Zahlreich und überzeugend sind die Theorien, die zur Erklärung der optischen Erscheinungen durch die Schwingungen eines elastischen Mediums aufgestellt wurden; aber es würde nicht rathsam sein, sich auf eine derselben zu beschränken; man könnte ihr sonst leicht ein blindes und deshalb irreführendes Zutrauen schenken. Aus diesem Grunde sollte man alle Hypothesen kennen lernen, denn gerade eine Vergleichung derselben kann sehr lehrreich sein.

Leider aber muss man zu diesem Zwecke immer auf die Originalabhandlungen zurückgreifen, die oft schwer aufzufinden und schwer zu verstehen sind; denn beim Uebergange von der einen zur anderen ändert sich Alles, Bezeichnung, Gedankenfolge, Ausdrucksweise u. s. w., und eine Vergleichung derselben wird in Folge dessen fast zur Unmöglichkeit.

Aus diesem Grunde hielt ich es nicht für überflüssig, in einem kleinen Bande diese verschiedenen Hypothesen übersichtlich zu vereinigen, indem ich meine an der Sorbonne im Jahr 1887—1888 gehaltenen Vorlesungen veröffentlichte. Herrn Blondin bin ich zu besonderem Dank verpflichtet, dass er diesen Versuch durch Sammeln und Redigiren der Vorträge ermöglichte.

Zum erfolgreichen Studium dieses Werkes ist es freilich nothwendig, dass der Leser die Experimentalgesetze der physikalischen Optik wenigstens in den Hauptzügen kennt; ich hätte sonst unmöglich in einem einzigen Semester eine so ausgedehnte Materie behandeln können, wenn ich nicht überzeugt gewesen wäre, dass diese Gesetze meinen Zuhörern schon vertraut sind.

Der Undulationstheorie liegt eine Molekulartheorie zu Grunde; für die einen, die da glauben, hinter dem Gesetz die Ursache zu entdecken, ist dies ein Vortheil, für die anderen dagegen ein Grund zum Misstrauen. Aber dieses Misstrauen erscheint mir ebenso wenig gerechtfertigt, als die Illusion der ersteren.

Diese Hypothesen spielen nämlich nur eine untergeordnete Rolle; ich hätte dieselben ebensogut unberücksichtigt lassen können, habe es aber nicht gethan, weil die Ausführung dadurch an Klarheit verloren hätte. Dies ist aber auch der einzige Grund, der mich davon abgehalten hat.

Thatsächlich entlehne ich den Molekularhypothesen nur zweierlei, nämlich das Princip von der Erhaltung der Energie und die Darstellung der allgemeinen Gesetze der kleinen Bewegungen durch lineare Gleichungen.

Darin findet auch die Thatsache ihre Erklärung, dass die meisten Folgerungen Fresnel's unverändert bestehen bleiben, wenn man die elektro-magnetische Lichttheorie annimmt. In diesem Band werde ich von jener Theorie nicht reden, sondern behalte mir vor, dies eingehend in einem anderen Werke zu thun, in dem ich meine Vorlesungen des zweiten Semesters veröffentlichen werde[1]). Ich glaubte mich zunächst in die Ideen von Fresnel vertiefen zu müssen; dies schien mir die beste Vorbereitung zum Studium des Gedankengangs von Clerk Maxwell.

Noch eines möchte ich am Schlusse bemerken: In dem Kapitel über die Diffraktion habe ich Hypothesen entwickelt, die ich für neu hielt. Hierbei unterliess ich es leider, Kirchhoff zu erwähnen, dessen Name fortwährend hätte genannt werden müssen. Noch ist es Zeit, dieses unbeabsichtigte Versehen wieder gut zu machen; ich beeile mich, dies zu thun, indem ich gleichzeitig auf die Sitzungsberichte der Berliner Akademie (1882, 2. Semester, S. 611) verweise.

Paris, den 2. December 1888.

H. Poincaré.

---

[1]) Anm. d. Herausg.: Dies Werk ist bereits in der Uebersetzung erschienen unter dem Titel „Elektricität und Optik“ 2 Bände. 1891/92. Verlag von Julius Springer in Berlin.

Inhaltsverzeichniss.

Kapitel III.

Das Princip von Huyghens.

Seite

Kapitel IV.

Beugung.

Kapitel V.

Drehung der Polarisationsebene. — Dispersion.

Kapitel VI.

Doppelbrechung.

Geradlinige Fortpflanzung des Lichtes.

Doppelbrechung in den hemiëdrischen Krystallen.

Kapitel VII.

Reflexion.

Reflexion an Glas.

Theorie von Fresnel.

Theorie von Neumann und Mac-Cullagh.

Theorie von Cauchy.

Krystall-Reflexion.

Theorie von Neumann und von Mac-Cullagh.

Theorie von Sarrau.

Metall-Reflexion.

Kapitel VIII.

Astronomische Aberration.

Einleitung.

Von allen physikalischen Theorien ist die Lichttheorie, wie sie sich aus den Arbeiten Fresnel's und seiner Nachfolger weiter entwickelt hat, am vollkommensten ausgebildet. Bekanntlich beruht dieselbe auf der Hypothese der Aetherschwingungen; sie vermag fast alle gegenwärtig bekannten optischen Erscheinungen zu erklären, und wenn auch einige derselben keine unmittelbare Erklärung zulassen, so braucht man nur geringe Modifikationen in den Einzelheiten der Fresnel'schen Hypothesen vorzunehmen, um auch diesen Erscheinungen Rechnung tragen zu können.

Den Skeptikern, welche glauben, dass die Undulationstheorie eines Tages dasselbe Schicksal erleiden wird, wie die Emissionstheorie, kann man entgegenhalten, dass Biot's Versuche, sämmtliche bis zum Jahre 1813 bekannt gewordenen optischen Erscheinungen mittels der Emissionstheorie zu erklären, viel zu gekünstelt waren, als dass sie vollständig hätten befriedigen können. In der Emissionstheorie gab es nämlich fast ebenso viel Hypothesen, als Erscheinungen zu erklären waren; allerdings bedarf man auch in der Undulationstheorie einer gewissen Anzahl von Hypothesen, aber dieselbe ist doch viel geringer als die Anzahl der zu erklärenden Erscheinungen.

Es ist also wahrscheinlich, dass ungeachtet des einstigen Schicksals der Fresnel'schen Theorie die meisten Resultate bestehen bleiben, und dass das Studium derselben immer hohen Nutzen bringen wird. In der letzten Zeit hat man allerdings versucht, an Stelle der Undulationstheorie eine elektromagnetische Theorie zu setzen, welche die optischen Erscheinungen aus den periodischen und ausserordentlich raschen Veränderungen eines magnetischen Feldes zu erklären sucht. Aber diese Theorie führt zu denselben analytischen Resultaten, wie die Fresnel'sche Undulationstheorie; nur die physikalische Deutung der Formeln ist verschieden. Es scheint sogar nicht unmöglich, dass beide Theorien zuletzt zu einer einzigen verschmelzen.

Inhalt des Buches. — Wir wollen nur die Undulationstheorie in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen, da die elektromagnetische Theorie von einer Vorlesung über Elektricität unzertrennbar ist. Hierbei werden die Arbeiten von Fresnel, Cauchy, Lamé, Briot und Sarrau in Frankreich, von Neumann in Deutschland und von Mac Cullagh in England Berücksichtigung finden. Die Thatsachen der experimentellen Optik muss ich als bekannt voraussetzen und werde nur die Entwicklung der mathematischen Theorien geben.

Wir beginnen mit der Theorie der kleinen Bewegungen in einem elastischen Medium, um sodann die allgemeinen Gesetze der Schwingungen und der Fortpflanzung ebener Wellen aufzustellen; danach treten wir in das Studium der Beugung ein, betrachten die verschiedenen Theorien der Dispersion, diejenigen der Doppelbrechung, ferner die Reflexion und die Brechung an der Oberfläche der durchsichtigen, isotropen Medien, der krystallinischen Körper und der metallischen Oberflächen. Hieran schliesst sich endlich die Untersuchung der Aberration und der Fortpflanzung des Lichtes in bewegten Medien.

Kapitel I.

Untersuchung der kleinen Bewegungen in einem elastischen Medium.

1. Erste Hypothese. — Wir nehmen an, ein elastisches Medium bestehe aus getrennten Molekülen, d. h. wir betrachten die Materie als diskontinuirlich. Hierbei wollen wir noch speciell betonen, dass die Uebereinstimmung der experimentellen Thatsachen mit den mathematischen Folgerungen aus dieser Hypothese keineswegs als ein Beweis für die Diskontinuität der Materie aufzufassen ist. Unsere Hypothese dient vielmehr lediglich zur Vereinfachung der Rechnungen, denn auch wenn wir die Materie als kontinuirlich auffassen wollten, würde die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Experiment bestehen bleiben.

2. Zweite Hypothese. — Weiter wollen wir voraussetzen, dass die Moleküle gewissen Kräften unterworfen seien, dass sie sich in einer bestimmten Lage im stabilen Gleichgewichte befinden und dass sie sehr kleine Schwingungen um diese Gleichgewichtslage ausführen, wenn man sie aus derselben entfernt und sodann sich selbst überlässt.

3. Bewegungsgleichungen. — Wir fassen nun n Moleküle M_1, $M_2 \ldots\ldots M_n$ mit den Massen m_1, $m_2 \ldots\ldots m_n$ in's Auge. Die Koordinaten eines dieser Moleküle seien in der Gleichgewichtslage x_i, y_i, z_i und nach der Verschiebung $x_i + \xi_i$, $y_i + \eta_i$, $z_i + \zeta_i$. Ferner nehmen wir an, dass eine Kräftefunktion U existirt, d. h. dass Erhaltung der Energie stattfindet; dann erhalten wir als Bewegungsgleichungen:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} m_i \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} &= \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \\ m_i \frac{\partial^2 \eta_i}{\partial t^2} &= \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \\ m_i \frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial t^2} &= \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}. \end{aligned} \right.$$

4. Eigenschaften der Kräftefunktion. — Entwickelt man U nach wachsenden Potenzen von ξ (wobei man unter ξ die Gesammtheit der Grössen $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2 \ldots\ldots$ zu verstehen hat), so erhält man:

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots\cdot$$

Das konstante Glied U_0 kann man gleich Null setzen, denn von der Funktion U treten in den Bewegungsgleichungen nur die Differentialquotienten auf.

Das Glied U_1, welches die Gesammtheit der Glieder ersten Grades in Bezug auf ξ enthält, d. h.

$$\Sigma \xi_i \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_i}\right)_0,$$

ist ebenfalls Null, denn $\frac{\partial U}{\partial \xi_i}$ stellt die X-Komponente der auf das Molekül M_i wirkenden Kraft dar, und die letztere ist Null für die Gleichgewichtslage, d. h. für $\xi_i = 0$. Somit ist $\left(\frac{\partial U}{\partial \xi_i}\right) = 0$ und in Folge dessen auch U_1.

Da wir weiter vorausgesetzt hatten, dass die ξ sehr klein sein sollten, so darf man die Glieder, welche in Bezug auf ξ von einer höheren als der zweiten Potenz sind, vernachlässigen, und wir erhalten

$$U = U_2. \tag{2}$$

Die Grösse U_2 ist quadratisch in Bezug auf die $3\,n$ Grössen ξ, sie lässt sich also als eine Summe von Quadraten darstellen. Diese Summe muss negativ sein, denn, da das Gleichgewicht stabil ist, wenn die ξ Null sind, so muss die Funktion U für $\xi = 0$ ein Maximum besitzen, und eine der Bedingungen dafür, dass eine Funktion ein Maximum aufweist, besteht darin, dass die Gesammtheit der Glieder zweiten Grades in der Entwickelung negativ ist. Theilt man nun die auf das System wirkenden Kräfte in zwei Gruppen, in die inneren und in die äusseren Kräfte, und bezeichnet die der ersten Gruppe entsprechende Kräftefunktion mit U', die der zweiten Gruppe entsprechende mit U'', so erhält man:

$$U = U' + U''. \tag{3}$$

5. Eigenschaften der Funktionen U' und U''. — Wenn die verschiedenen Moleküle eine solche Verschiebung erleiden, dass ihre Entfernungen von einander ungeändert bleiben, dann ist die Arbeit der inneren Kräfte, folglich auch U', gleich Null. U' lässt sich somit auffassen als Funktion der Abstände der Moleküle; bezeichnen wir die Quadrate dieser Abstände mit R, R′, R″ ...., so können wir setzen:

$$U' = F\,(R, R', R'' \ldots .). \tag{4}$$

6. Wenn wir ferner voraussetzen, dass je zwei Moleküle μ und μ' sich so anziehen oder abstossen, dass die dabei auftretenden Kräfte immer einander gleich sind, in der Richtung der Verbindungslinie dieser Moleküle wirken und nur von der Entfernung $\mu\mu'$ derselben abhängen, mit anderen Worten, wenn wir die Hypothese von den Centralkräften annehmen, dann wird U′ aus der Summe der zu je zwei Molekülen μ und μ' gehörigen Kräftefunktionen bestehen; wir erhalten in diesem Falle:

$$U' = f(R) + f'(R') + f''(R'') + \cdots \tag{5}$$

7. Die auf das System wirkenden äusseren Kräfte können von zweierlei Art sein:

1. Kräfte, welche gleichzeitig an den im Inneren und an der Oberfläche befindlichen Moleküle angreifen, wie dies beispielsweise bei der Schwerkraft der Fall ist.

2. Kräfte, welche nur auf die Oberflächenmoleküle wirken, z. B. auf die innere Oberfläche der Wände eines Raumes, welcher ein Gas einschliesst.

Die Kräfte der ersten Art treten in der Optik nicht auf, denn wir müssen annehmen, dass der Aether imponderabel sei. Das Vorhandensein von Kräften der zweiten Art lässt sich nicht ohne Weiteres in Abrede stellen. Setzen wir aber voraus, dass auch sie nicht vorhanden sind, dann ist die Kräftefunktion, welche sich auf die äusseren Kräfte bezieht, Null, also $U'' = 0$.

8. Wir können nun auch die Funktionen U′ und U″ nach wachsenden Potenzen der ξ entwickeln, und erhalten, wenn wir dabei die Glieder von einer höheren als der zweiten Potenz vernachlässigen:

$$U' = U_0' + U_1' + U_2'$$

$$U'' = U_0'' + U_1'' + U_2''.$$

Durch Vergleichung dieser Entwickelungen mit der Entwickelung der Funktion U (§ 4) gelangen wir zu folgenden Gleichungen:

$$U_0' + U_0'' = U_0 = 0$$

$$U_1' + U_1'' = U_1 = 0 \tag{6}$$

$$U_2' + U_2'' = U_2 = U. \tag{7}$$

Ausserdem können wir noch annehmen, dass jede der Konstanten U_0' und U_0'' für sich Null ist.

9. Untersuchung der Funktion U'. — Die Koordinaten zweier Moleküle μ und μ' mögen für die Gleichgewichtslage sein:

$$x, y, z; \quad x + Dx, \quad y + Dy, \quad z + Dz;$$

hierbei sind die Zuwachse Dx, Dy, Dz der Koordinaten nicht unendlich klein, da der Abstand der Moleküle von einander nicht unendlich klein ist. Das Quadrat dieser Entfernung ist gegeben durch:

$$R = Dx^2 + Dy^2 + Dz^2.$$

Werden die Moleküle aus ihren Gleichgewichtslagen entfernt, so gehen deren Koordinaten über in:

$$x + \xi, \quad y + \eta, \quad z + \zeta;$$

$$x + Dx + \xi + D\xi; \quad y + Dy + \eta + D\eta; \quad z + Dz + \zeta + D\zeta,$$

und das Quadrat ihres Abstandes wird alsdann

$$R + \varrho = \Sigma (Dx + D\xi)^2 = \Sigma Dx^2 + 2 \Sigma Dx D\xi + \Sigma D\xi^2.$$

Der Zuwachs ϱ, den das Quadrat des Abstandes erfahren hat, ist also

$$\varrho = 2 \Sigma Dx D\xi + \Sigma D\xi^2;$$

setzen wir darin

$$\varrho_1 = 2 (Dx D\xi + Dy D\eta + Dz D\zeta) = 2 \Sigma Dx D\xi \tag{8}$$

$$\varrho_2 = D\xi^2 + D\eta^2 + D\zeta^2 = \Sigma D\xi^2, \tag{9}$$

so haben wir für ϱ die Gleichung

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2. \tag{10}$$

Die auf die inneren Kräfte bezügliche Kräftefunktion wird, wenn die Moleküle aus ihren Gleichgewichtslagen entfernt sind,

$$U' = F(R + \varrho, \; R' + \varrho', \quad R'' + \varrho'', \; + \cdots),$$

und, wenn man sie nach wachsenden Potenzen von ϱ entwickelt,

$$U' = F(R, R', R'' \ldots) + \sum \frac{\partial F}{\partial R} \varrho + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 F}{\partial R^2} \varrho^2 + \sum \frac{\partial^2 F}{\partial R \, \partial R'} \varrho \varrho' + \cdots$$

In diesem Ausdrucke hängt das Glied $F(R, R', R'' \ldots)$ nicht von der Verschiebung ab, es ist also identisch mit dem konstanten Gliede U_0', das wir bei der Entwickelung der Funktion U' nach ξ erhielten; somit hat dasselbe den Werth Null.

Da die Grössen ϱ von derselben Grössenordnung sind, wie die ξ, so kann man in der Entwickelung von U' die Glieder vernachlässigen, welche ϱ in einer höheren als der zweiten Potenz enthalten, und findet somit

$$U' = \sum \frac{\partial F}{\partial R} \varrho + \sum \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial R^2} \varrho^2 + \sum \frac{\partial^2 F}{\partial R\, \partial R'} \varrho \varrho'.$$

Ersetzt man darin ϱ durch seinen Werth $\varrho_1 + \varrho_2$, so folgt

$$U' = \sum \frac{\partial F}{\partial R} \varrho_1 + \sum \frac{\partial F}{\partial R} \varrho_2 + \sum \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial R^2} \varrho^2 + \sum \frac{\partial^2 F}{\partial R\, \partial R'} \varrho \varrho'. \tag{11}$$

Durch Vergleichung dieser Entwickelung mit derjenigen derselben Funktion nach ξ (§ 8) ergibt sich für das zweite Glied U_1':

$$U_1' = \sum \frac{\partial F}{\partial R} \varrho_1 = 2 \sum \frac{\partial F}{\partial R} (Dx\, D\xi + Dy\, D\eta + Dz\, D\zeta). \tag{12}$$

10. In dem speciellen Falle, wo der äussere Druck in der Gleichgewichtslage Null ist, kann man aus dem letzten Ausdrucke sechs wichtige Gleichungen ableiten. Das zweite Glied U_1'' in der Entwickelung der auf die äusseren Kräfte bezüglichen Kräftefunktion U'' ist nämlich Null, da die partiellen Differentialquotienten von U'' nach den Grössen ξ die Komponenten des äusseren Druckes darstellen.

Nun haben wir nach Gleichung (6)

$$U_1' = 0.$$

Substituiren wir also in U_1' an Stelle von ξ, η, ζ irgend welche anderen Grössen, so müssen wir wieder auf der rechten Seite Null erhalten; so können wir beispielsweise $\xi = x$, $\eta = \zeta = 0$ setzen; dann finden wir

$$\sum \frac{\partial F}{\partial R} Dx^2 = 0,$$

und entsprechend

$$\sum \frac{\partial F}{\partial R} Dy^2 = 0 \quad \text{und} \quad \sum \frac{\partial F}{\partial R} Dz^2 = 0.$$

Die Substitution $\xi = y$, $\zeta = \eta = 0$ liefert

$$\sum \frac{\partial F}{\partial R} Dx\, Dy = 0,$$

und entsprechende Substitutionen:

$$\sum \frac{\partial F}{\partial R} Dy\, Dz = 0 \quad \text{und} \quad \sum \frac{\partial F}{\partial R} Dz\, Dx = 0.$$

Ist also der äussere Druck in der Gleichgewichtslage Null, so sind folgende sechs Gleichungen erfüllt:

$$(13)\quad \begin{cases} \sum \frac{\partial F}{\partial R} Dx^2 = 0 \\ \sum \frac{\partial F}{\partial R} Dy^2 = 0 \\ \sum \frac{\partial F}{\partial R} Dz^2 = 0 \end{cases} \qquad (14)\quad \begin{cases} \sum \frac{\partial F}{\partial R} Dz\, Dy = 0 \\ \sum \frac{\partial F}{\partial R} Dx\, Dz = 0 \\ \sum \frac{\partial F}{\partial R} Dy\, Dx = 0. \end{cases}$$

Umgekehrt hat Cauchy auch nachgewiesen, dass der äussere Druck Null sein muss, wenn diese sechs Gleichungen erfüllt sind. Wir werden später den Beweis für diese Reciprocität ebenfalls führen.

11. Der Ausdruck für das dritte Glied U_2' in der Entwickelung von U' nach den Grössen ξ wird, wenn man die Terme dritten und vierten Grades von $D\xi$ vernachlässigt:

$$(15)\qquad U_2' = \sum \frac{\partial F}{\partial R} \varrho_2 + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 F}{\partial R^2} \varrho_1^2 + \sum \frac{\partial^2 F}{\partial R\, \partial R'} \varrho_1 \varrho_1'.$$

Setzt man diesen Werth von U_2' in die Gleichung (7) ein, so erhält man:

$$U = U_2 = U_2'' + \sum \frac{\partial F}{\partial R} \varrho_2 + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 F}{\partial R^2} \varrho_1^2 + \sum \frac{\partial^2 F}{\partial R\, \partial R'} \varrho_1 \varrho_1'.$$

Das erste Glied dieses Ausdrucks, U_2'', spielt in der Elasticität im Allgemeinen keine Rolle; es hängt nämlich von den äusseren Drucken ab und kann nur von den Verschiebungen der Oberflächenmoleküle herrühren. Untersucht man nun die Bewegung in einem unendlich grossen Medium, so nimmt man an, dass die Grössen ξ im Unendlichen Null sind. Hat man es aber mit einem begrenzten Medium zu thun, so werden die Schlüsse, welche man aus den Rechnungen unter der Voraussetzung zieht, dass U_2'' Null sei, und die für alle in einer gewissen Entfernung von der Grenzschicht liegenden Theile streng richtig sind, auch für die der Grenzschicht benachbarten Theile nicht wesentlich geändert.

Das zweite Glied

$$\sum \frac{\partial F}{\partial R} \varrho_2 = \sum \frac{\partial F}{\partial R} (D\xi^2 + D\eta^2 + D\zeta^2)$$

ist in einem Falle Null, und zwar dann, wenn man annimmt, dass der äussere Druck im Gleichgewichtszustande Null sei; dies soll später nachgewiesen werden.

Das dritte Glied bleibt in allen Fällen bestehen.

Das vierte Glied endlich,

$$\sum \frac{\partial^2 F}{\partial R\, \partial R'} \varrho_1 \varrho_1',$$

verschwindet bei der Annahme von Centralkräften. Wir sahen nämlich in § 6, dass sich unter dieser Annahme die Funktion U′ auf eine Summe von Gliedern reducirte, von denen jedes nur von einer einzigen Grösse abhängt.

Differentiirt man nun die Gleichung (5) nach R, so erhält man

$$\frac{\partial U'}{\partial R} = \frac{\partial f(R)}{\partial R},$$

und, da $f(R)$ nicht von R′ abhängt, so liefert eine neue Differentiation nach R′

$$\frac{\partial^2 U'}{\partial R\, \partial R'} = \frac{\partial^2 f}{\partial R\, \partial R'} = \frac{\partial}{\partial R'} \left(\frac{\partial f(R)}{\partial R} \right) = 0.$$

Das vierte Glied der Funktion U ist also in diesem Falle wirklich Null.

12. Dritte Hypothese. — Wir wollen nun bei unserer Untersuchung noch eine neue Hypothese einführen, und annehmen, dass die ungemein zahlreichen und durch sehr kleine Zwischenräume getrennten Körpermoleküle nur in sehr geringen Entfernungen auf einander wirken können. Die Maximalentfernung, in welcher eine derartige Einwirkung noch möglich ist, bezeichnen wir als Radius der molekularen Wirkungssphäre.

Die Einführung dieser Hypothese gestattet uns, den Ausdruck für die Funktion U′ zu vereinfachen. Wir fassen zu diesem Zwecke ein bestimmtes Volumen des elastischen Medium in's Auge und theilen dasselbe in die beiden Theile R und R′ (Fig. 1). Die Potentialfunktion U′ der Kräfte, welche bei der gegenseitigen Wirkung der Moleküle des Gesammtvolumens auftreten, kann nun als die Summe folgender drei Grössen aufgefasst werden: 1. des Potentials V, das sich auf die gegenseitige Wirkung der Moleküle des Volumens R bezieht. 2. Des Potentials V′, welches auf die gegenseitigen Wirkungen der Moleküle des Volumens R′ zurückzuführen ist. 3. Des Potentials, welches aus

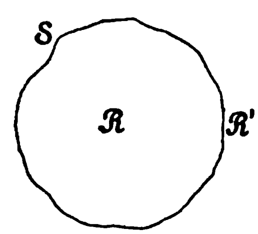

Fig. 1.

der Wirkung der Moleküle des Volumens R auf die Moleküle des Volumens R′ resultirt; dies letztere Potential ist sehr klein. Die Moleküle nämlich, welche auf einander wirken sollen, müssen sich in einer Entfernung von einander befinden, welche geringer ist als der Radius der molekularen Wirkungssphäre. Demnach werden die Moleküle von R, welche auf diejenigen von R′ wirken, und umgekehrt, innerhalb eines Volumens liegen, das von zwei zur Trennungsfläche von R und R′ parallelen Oberflächen begrenzt ist, und zwar darf die Entfernung dieser beiden Oberflächen die Grösse des Radius der molekularen Wirkungssphäre nicht überschreiten.

Dies Volumen kann aber gegenüber dem Volumen von R und R′ vernachlässigt werden, und, wenn wir annehmen, dass die Zahl der Moleküle in einem Medium dem Volumen desselben proportional ist, so werden die Moleküle eines jeden der Volumina R und R′, welche auf die Moleküle des anderen Volumens wirken können, ihrer Zahl nach gegen die Moleküle zu vernachlässigen sein, welche sich in R und R′ befinden. Somit kann auch das Potential, das von der Wirkung der Moleküle im Volumen R auf diejenigen im Volumen R′ herrührt, gegenüber V und V′ vernachlässigt werden, und wir erhalten

$$U' = V + V'.$$

Diese Ueberlegung behält auch dann noch ihre Gültigkeit, wenn man das elastische Medium in eine unendlich grosse Anzahl unendlich kleiner Theile zerlegt, vorausgesetzt, dass die Dimensionen dieser Theile unendlich gross bleiben im Verhältniss zur molekularen Wirkungssphäre; dies wird aber immer möglich sein, da der Radius dieser Wirkungssphäre, absolut genommen, unendlich klein ist. Bezeichnen wir mit $d\tau$ eines dieser Elementarvolumina, mit $W d\tau$ das Potential, das von der gegenseitigen Wirkung der Moleküle im Innern dieses Elements herrührt, dann wird das Potential der inneren Kräfte des gesammten Volumens

$$U' = \int W\, d\tau. \tag{16}$$

13. Wir können nun W nach wachsenden Potenzen der ξ entwickeln und erhalten, wenn wir die Glieder der dritten und der höheren Potenzen vernachlässigen:

$$W = W_0 + W_1 + W_2.$$

Das konstante Glied W_0 dürfen wir Null setzen; dann liefert uns die Gleichung (16)

(17) $$U_1' = \int W_1 \, d\tau$$

(18) $$U_2' = \int W_2 \, d\tau.$$

Die Kräftefunktion U, welche in die Bewegungsgleichungen eingeht, wird nun unter Berücksichtigung der Gleichung (7)

(19) $$U = U_2'' + \int W_2 \, d\tau.$$

Nun können wir die Funktion W auch nach wachsenden Potenzen von ϱ entwickeln, wie wir es mit der Funktion U′ gethan hatten, und setzen, der Formel (15) entsprechend:

(20) $$W_2 = \sum \frac{\partial F}{\partial R} \varrho_2 + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 F}{\partial R^2} \varrho_1^2 + \sum \frac{\partial^2 F}{\partial R \, \partial R'} \varrho_1 \varrho_1';$$

hierbei erstrecken sich die Summationen nur auf die Moleküle des Elements $d\tau$.

Da die Grösse ϱ_1 linear und homogen in Bezug auf die Grössen $D\xi$, $D\eta$, $D\zeta$ ist, und ϱ_2 homogen und von der zweiten Potenz in Bezug auf dieselben Grössen, so folgt daraus, dass W_2 eine homogene Funktion zweiten Grades von $D\xi$, $D\eta$, $D\zeta$ ist.

14. Neue Hypothesen. — Weiter nehmen wir an, dass die Verschiebungen ξ, η, ζ kontinuirliche Funktionen der Koordinaten x, y, z sind, welche die Gleichgewichtslage der Moleküle bestimmen, und dass das Gleiche auch für ihre Differentialquotienten gilt. Diese Annahme ist berechtigt, denn wenn die relative Verschiebung zweier benachbarten Moleküle nicht sehr klein wäre, so würden dabei sehr beträchtliche elastische Reaktionen auftreten, in Folge deren ein solcher Zustand nicht dauernd bestehen könnte.

Unter der oben gemachten Annahme können wir nun die Funktionen ξ, η, ζ nach wachsenden Potenzen der Grössen x, y, z entwickeln, und erhalten

$$D\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} Dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} Dy + \frac{\partial \xi}{\partial z} Dz + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} Dx^2 + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} Dy^2 + \cdots \right].$$

Die Grössen Dx, Dy, Dz bezeichnen die Zuwachse der Koordinaten, wenn man von einem Moleküle zu einem benachbarten Molekül übergeht, sie sind also von der Grössenordnung des Radius der molekularen Wirkungssphäre; die Quadrate dieser Grössen werden daher unendlich klein sein, so dass man sie im Allgemeinen vernachlässigen kann. Allerdings werden wir sehen, dass dies nicht in jedem Falle berechtigt ist, und dass namentlich eine der Theorien, welche die Dispersion des Lichtes erklären wollen, verlangt, dass man diese Grössen zweiter Ordnung beibehält. Vernachlässigt man sie aber, dann sind die Grössen $D\xi$, $D\eta$, $D\zeta$ als homogene lineare Funktionen von neun partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\xi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\xi}{\partial z}; \quad \frac{\partial\eta}{\partial x} \dots$$

gegeben, und wir erhalten

$$(21) \quad \begin{cases} D\xi = \dfrac{\partial\xi}{\partial x} Dx + \dfrac{\partial\xi}{\partial y} Dy + \dfrac{\partial\xi}{\partial z} Dz \\[2ex] D\eta = \dfrac{\partial\eta}{\partial x} Dx + \dfrac{\partial\eta}{\partial y} Dy + \dfrac{\partial\eta}{\partial z} Dz \\[2ex] D\zeta = \dfrac{\partial\zeta}{\partial x} Dx + \dfrac{\partial\zeta}{\partial y} Dy + \dfrac{\partial\zeta}{\partial z} Dz. \end{cases}$$

15. Untersuchung der Funktion W_2. — Wir sahen (§ 13), dass W_2 eine homogene Funktion zweiten Grades der Grössen $D\xi$, $D\eta$, $D\zeta$ ist, es ist also auch eine homogene Funktion zweiten Grades der neun partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial\xi}{\partial x}$, $\frac{\partial\xi}{\partial y} \dots$, die wir in der Folge häufig in der von Lagrange gewählten Form ξ_x', ξ_y', $\xi_z' \dots$ schreiben werden. Das Quadrat eines Ausdrucks mit neun unabhängigen Variabeln besteht aber aus neun quadratischen Gliedern und soviel Produkten, als die Kombination zweiter Klasse von neun Elementen liefert, also $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$, und kann also 45 willkürliche Koefficienten enthalten. Wir wollen nun die Anzahl der Koefficienten bestimmen, welche in der Funktion W_2 wirklich auftreten.

Zu diesem Zwecke fassen wir das erste Glied $\sum \frac{\partial F}{\partial R} \varrho_2$ der in (20) entwickelten Funktion in's Auge. Die Glieder mit $\xi_x'^2$, welche in $\sum \frac{\partial F}{\partial R} \varrho_2$ vorkommen, können nur von $D\xi^2$ herrühren, denn weder $D\eta$ noch $D\zeta$ enthalten ξ_x'. Wir finden also durch Quadrirung der ersten Gleichung von (21)

$$D\xi^2 = \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 Dx^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 Dy^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2 Dz^2 + 2\,\frac{\partial\xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial\xi}{\partial y}\, Dx\, Dy + \dots,$$

und der Koefficient von $\xi_x'^2$ in $\sum \frac{\partial F}{\partial R} \varrho_2$ ist somit

$$\sum \frac{\partial F}{\partial R} Dx^2.$$

Dieselbe Grösse tritt auch noch als Koefficient von $\eta_x'^2$ und $\zeta_x'^2$ auf. Die Koefficienten der Quadrate der neun partiellen Differentialquotienten reduciren sich also auf drei:

$$\sum \frac{\partial F}{\partial R} Dx^2; \qquad \sum \frac{\partial F}{\partial R} Dy^2; \qquad \sum \frac{\partial F}{\partial R} Dz^2.$$

Der Koefficient des doppelten Produktes $2\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y}$ ist

$$\sum \frac{\partial F}{\partial R} Dx\,Dy.$$

Entwickelt man die Quadrate von $D\eta$ und $D\zeta$, so erkennt man leicht, dass bei den Produkten $2\frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}$; $2\frac{\partial \zeta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y}$ dieselbe Grösse als Koefficient auftritt. Die Koefficienten der neun doppelten Produkte, welche in $\sum \frac{\partial F}{\partial R} \varrho_2$ vorkommen, reduciren sich demnach auf die drei folgenden:

$$\sum \frac{\partial F}{\partial R} Dx\,Dy; \qquad \sum \frac{\partial F}{\partial R} Dy\,Dz; \qquad \sum \frac{\partial F}{\partial R} Dz\,Dx.$$

Somit enthält das erste Glied von W_2 nur sechs willkürliche Koefficienten; diese sind Null, wenn man annimmt, dass der äussere Druck im Gleichgewichtszustande Null ist, wie wir bereits in § 10 nachgewiesen haben.

16. Die beiden letzten Glieder von W_2 sind homogen in Bezug auf ϱ_1 und ϱ_1'. Ersetzt man in dem Ausdrucke für ϱ_1

$$\varrho_1 = 2\,(Dx\,D\xi + Dy\,D\eta + Dz\,D\zeta)$$

$D\xi$, $D\eta$, $D\zeta$ durch ihre Werthe aus (21), so findet man:

$$(22) \qquad \frac{1}{2}\varrho_1 = \frac{\partial \xi}{\partial x} Dx^2 + \frac{\partial \eta}{\partial y} Dy^2 + \frac{\partial \zeta}{\partial z} Dz^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) Dx\,Dy +$$
$$+ \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) Dy\,Dz + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) Dz\,Dx\,,$$

d. h. ϱ_1 ist eine lineare und homogene Funktion der sechs Grössen

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y}; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z}; \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}.$$

Die Summe der beiden letzten Glieder von W_2 ist also eine homogene Funktion zweiten Grades dieser sechs Grössen; sie wird somit nur 21 willkürliche Koefficienten enthalten, und zwar 6 für die Quadrate und 15 für die doppelten Produkte.

17. Wir sehen also, dass in der Funktion W_2 im allgemeinsten Falle nur $21 + 6 = 27$ willkürliche Koefficienten auftreten würden, eine Zahl, die sich auf 21 reducirt, wenn der äussere Druck im Gleichgewichtszustande Null ist.

Unter der Annahme von Centralkräften sahen wir (§ 11), dass

$$\frac{\partial^2 F}{\partial R \, \partial R'} = 0.$$

In diesem Falle verschwindet das dritte Glied der Entwickelung (20) von W_2, und, wenn man im zweiten Gliede ϱ_1^2 durch seinen der Gleichung (22) entnommenen Werth ersetzt, so findet man, dass unter den 21 Koefficienten 6 einander gleich sind. So ist beispielsweise der

$$\text{Koeff. von } \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 = \text{Koeff. von } 2\,\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

$$\text{Koeff. von } 2\,\frac{\partial \zeta}{\partial z}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = \text{Koeff. von } 2\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right).$$

Die Zahl der willkürlichen Koefficienten reducirt sich in diesem Falle auf 15.

Fassen wir alles nochmals zusammen, so erhalten wir in dem Ausdrucke für W_2:

1. 27 Koefficienten im allgemeinsten Falle.
2. 21 Koefficienten, wenn der äussere Druck im Gleichgewichtszustande Null ist und die Kräfte nicht Centralkräfte sind.
3. 21 Koefficienten, wenn die Kräfte Centralkräfte sind und der äussere Druck im Gleichgewichtszustande von Null verschieden ist (Hypothese von Cauchy).
4. 15 Koefficienten, wenn die Kräfte Centralkräfte sind und der äussere Druck im Gleichgewichtszustande Null ist.

Der Werth dieser Koefficienten wird in einem beliebigen Medium im Allgemeinen von den Schwerpunktskoordinaten des Volumenelements $d\tau$ abhängen. Um die Untersuchung zu vereinfachen, behandeln wir den gewöhnlichsten Fall, und setzen voraus, dass das Medium homogen sei; dann werden die Koefficienten zu Konstanten.

18. Isotrope Funktionen. — Ein homogenes Medium heisst isotrop, wenn dasselbe nach allen Richtungen hin identisch ist. Dies ist z. B. der Fall beim Aether im leeren Raume, bei den gasförmigen und flüssigen Körpern, bei den amorphen festen Körpern, nicht aber bei den Krystallen. Aus dieser Definition folgt, dass bei einem isotropen Körper jede beliebige Ebene eine Symmetrieebene ist; speciell sind die Koordinatenebenen solche Symmetrieebenen. Die Bewegungsgleichungen und somit auch die Funktion W_2 dürfen sich also nicht ändern, wenn man an Stelle von x und ξ bzw. $-x$ und $-\xi$ setzt, an Stelle von y und η bzw. $-y$ und $-\eta$, endlich an Stelle von z und ζ bzw. $-z$ und $-\zeta$. Hierbei müssen wir noch darauf hinweisen, dass die isotropen Körper nicht die einzigen sind, welche diese Eigenschaft besitzen, sondern auch alle krystallisirten Körper mit drei senkrecht auf einander stehenden Symmetrieebenen, d. h. die Krystalle, welche zu den vier ersten Krystallsystemen gehören. Bei diesen und bei den isotropen Körpern darf die Funktion W_2 keine Glieder enthalten, welche bei einer der drei oben genannten Substitutionen ihr Vorzeichen wechseln. Es ist nun leicht einzusehen, dass die Glieder, welche bei einer derartigen Substitution ungeändert bleiben, in vier Gruppen zerfallen.

1. Die quadratischen Glieder von der Form $\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2$.
2. Die quadratischen Glieder von der Form $\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2$.
3. Die Produkte von der Form $\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}$.
4. Die Produkte von der Form $\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}$.

Bei den isotropen Körpern und den Krystallen des hexagonalen Systems haben alle Glieder ein und derselben Gruppe denselben Koefficient, denn hier spielen die drei Richtungen der Koordinatenaxe dieselbe Rolle. Wir können also zwei der Axen oder auch alle drei Axen vertauschen, ohne am Werthe von W_2 etwas zu ändern, mit anderen Worten, W_2 muss seinen Werth beibehalten, wenn man darin beispielsweise x mit y und ξ mit η vertauscht. Soll das der Fall sein, dann müssen die Grössen

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2, \quad \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2, \quad \left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2$$

die gleichen Koefficienten besitzen, und daher treten die Glieder der ersten Gruppe in der Funktion W_2 in Gestalt der Summe

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2$$

auf. Das Gleiche gilt für die Glieder der drei anderen Gruppen, somit ist die Funktion W_2 die Summe aus vier homogenen Polynomen zweiten Grades in Bezug auf die neun partiellen Differentialquotienten, welche noch mit numerischen Koefficienten multiplicirt sind. Diese vier Polynome sind:

$$\xi_x'^2 + \eta_y'^2 + \zeta_z'^2,$$

$$\xi_y'^2 + \xi_z'^2 + \eta_x'^2 + \eta_z'^2 + \zeta_x'^2 + \zeta_y'^2,$$

$$\xi_x' \eta_y' + \xi_x' \zeta_z' + \eta_y' \zeta_z',$$

$$\xi_y' \eta_x' + \xi_z' \zeta_x' + \eta_z' \zeta_y'.$$

19. Wir haben nun zu untersuchen, ob diese vier unabhängigen Polynome auch in dem Falle auftreten werden, dass wir es mit einem vollständig isotropen Körper zu thun haben; wir werden zeigen, dass sie sich dann auf drei reduciren, die wir isotrope Polynome nennen wollen.

Da bei einem isotropen Körper alle Richtungen identisch sind, so darf sich der Ausdruck eines isotropen Polynoms nicht ändern, wenn man eine beliebige Koordinatenänderung vornimmt, bei welcher der Koordinatenursprung ungeändert bleibt; die Form eines isotropen Polynoms muss also von der Wahl der Koordinatenaxen unabhängig sein.

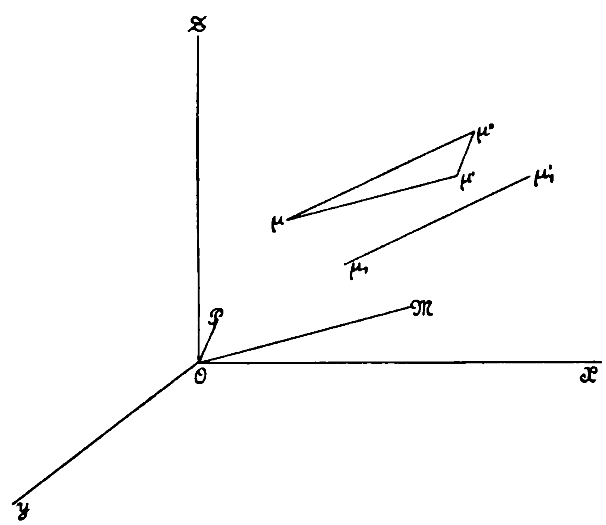

Fig. 2.

Das Molekül μ (Fig. 2) eines isotropen Medium habe die Koordinaten x, y, z, ein benachbartes Molekül μ' die Koordinaten $x + Dx$, $y + Dy$, $z + Dz$. Wenn das Molekül μ aus seiner Gleichgewichtslage verschoben worden ist, möge es sich im Punkte μ_1 mit den Koordinaten $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ befinden, während das Molekül μ' dann zum Punkte μ_1' mit den Koordinaten $x+\xi+\mathrm{D}x+\mathrm{D}\xi$; $y+\eta+\mathrm{D}y+\mathrm{D}\eta$; $z+\zeta+\mathrm{D}z+\mathrm{D}\zeta$ gelangt ist. Wir ziehen nun durch den Punkt μ die Gerade $\mu\mu''$ gleich und parallel $\mu_1\mu_1'$ und verbinden μ' mit μ''. Ferner legen wir durch den Koordinatenanfangspunkt O eine Gerade OM gleich und parallel $\mu\mu'$ und eine Gerade OP gleich und parallel $\mu'\mu''$, dann hat der Punkt M die Koordinaten $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y$, $\mathrm{D}z$, der Punkt P die Koordinaten $\mathrm{D}\xi$, $\mathrm{D}\eta$, $\mathrm{D}\zeta$. Bezeichnen wir die Länge der Geraden OP mit l, so haben wir

$$l^2 = \mathrm{D}\xi^2 + \mathrm{D}\eta^2 + \mathrm{D}\zeta^2, \tag{23}$$

und da nach Gleichung (21) $\mathrm{D}\xi$, $\mathrm{D}\eta$, $\mathrm{D}\zeta$ homogene Funktionen ersten Grades von $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y$, $\mathrm{D}z$ sind, so ist l^2 eine homogene Funktion zweiten Grades von den Koordinaten des Punktes M. In Folge dessen ist der geometrische Ort der sämmtlichen Punkte M, für welche die Länge OP konstant bleibt, ein Ellipsoid, dessen Centrum in O liegt. Da das Medium isotrop sein sollte, so müssen wir immer dasselbe Ellipsoid finden, welches auch die Richtung der Koordinatenaxen sein möge. Die Gleichung des Ellipsoids wird naturgemäss von der Wahl der Axen abhängen, aber das Ellipsoid selbst wird sich nicht ändern, wenn man die drei Koordinatenebenen ändert. Nun gibt es bekanntlich bei einem im Raume festen Ellipsoid gewisse Funktionen der Koefficienten der Ellipsoidgleichung, die unter dem Namen der Invarianten bekannt sind und welche von der Wahl der Axen nicht abhängen; diese müssen also isotrope Funktionen sein. Eine dieser Invarianten ist die Summe aus den Quadraten der Koefficienten der quadratischen Glieder; um sie zu finden, ersetzen wir in Gleichung (23) die Grössen $\mathrm{D}\xi$, $\mathrm{D}\eta$, $\mathrm{D}\zeta$ durch ihre Werthe (21). Wir erhalten dann zwischen den Koordinaten $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y$, $\mathrm{D}z$ des Punktes M eine Gleichung, welche gerade die Gleichung unseres Ellipsoids darstellt, und finden für den Koefficient von $\mathrm{D}x^2$ die Summe

$$\xi_x'^2 + \eta_x'^2 + \zeta_x'^2;$$

der Koefficient von $\mathrm{D}y^2$ wird

$$\xi_y'^2 + \eta_y'^2 + \zeta_y'^2,$$

derjenige von $\mathrm{D}z^2$

$$\xi_z'^2 + \eta_z'^2 + \zeta_z'^2.$$

Die Summe dieser drei Koefficienten wird also eine isotrope

Funktion sein; wir bezeichnen dieselbe, d. h. die Summe aus den Quadraten der neun partiellen Differentialquotienten, mit

$$H = \Sigma \xi_x'^2. \tag{24}$$

20. Um noch andere isotrope Funktionen zu finden, betrachten wir den Fall, wo die Moleküle μ und μ' sich derart verschieben, dass die Gerade $\mu\mu'$ immer parallel zu sich selbst bleibt; dann sind auch die Geraden OP und OM parallel, und wir haben, wenn wir das Verhältniss ihrer Längen mit α bezeichnen:

$$D\xi = \alpha\, Dx; \quad D\eta = \alpha\, Dy; \quad D\zeta = \alpha\, Dz.$$

Durch Einsetzen dieser Werthe in die Gleichungen (21) des § 14 erhalten wir

$$\alpha\, Dx = \xi_x'\, Dx + \xi_y'\, Dy + \xi_z'\, Dz$$

$$\alpha\, Dy = \eta_x'\, Dx + \eta_y'\, Dy + \eta_z'\, Dz$$

$$\alpha\, Dz = \zeta_x'\, Dx + \zeta_y'\, Dy + \zeta_z'\, Dz.$$

Die Elimination von Dx, Dy, Dz aus diesen Gleichungen führt zur Determinante

$$\begin{vmatrix} \xi_x' - \alpha & \xi_y' & \xi_z' \\ \eta_x' & \eta_y' - \alpha & \eta_z' \\ \zeta_x' & \zeta_y' & \zeta_z' - \alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich α bestimmen. Da diese Grösse offenbar nicht von der Wahl der Koordinatenaxen abhängt, so sind die Koefficienten der Gleichung für α Invarianten. Der Koefficient des Gliedes α^2 ist

$$\xi_x' + \eta_y' + \zeta_z'.$$

Diese neue isotrope Funktion bezeichnen wir mit Θ und betrachten, da sie in der zweiten Potenz in die Funktion von W_2 eingeht, ihr Quadrat

$$\Theta^2 = (\xi_x' + \eta_y' + \zeta_z')^2. \tag{25}$$

21. Die Funktion Θ hat eine interessante geometrische Bedeutung.

Der Ausdruck für das Volumen eines im Gleichgewichte befindlichen Theils des elastischen Medium ist

$$\iiint dx\, dy\, dz.$$

In Folge der Deformation des Medium werden die Schwerpunktskoordinaten eines Volumenelements $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$, und das Volumen des betreffenden Theiles erhält den Werth

$$\int\int\int (dx + d\xi)\,(dy + d\eta)\,(dz + d\zeta).$$

Sind nun in einem Integrale

$$\int\int\int \mathrm{F}\,(x, y, z)\; dx\; dy\; dz$$

die x, y, z Funktionen dreier neuen Variabeln α, β, γ, so wird dies Integral, wenn man die α, β, γ als neue Variabeln wählt,

$$\int\int\int \Phi\,(\alpha, \beta, \gamma)\,\frac{\mathrm{D}\,(x, y, z)}{\mathrm{D}\,(\alpha, \beta, \gamma)}\; d\alpha\; d\beta\; d\gamma\,;$$

hierbei bezeichnet $\frac{\mathrm{D}\,(x, y, z)}{\mathrm{D}\,(\alpha, \beta, \gamma)}$ die Funktionaldeterminante von x, y, z nach α, β, γ. Sonach erhalten wir für das Volumen nach der Deformation den Ausdruck:

$$\int\int\int \frac{\mathrm{D}\,[(x+\xi),\,(y+\eta),\,(z+\zeta)]}{\mathrm{D}\,(x, y, z)}\; dx\; dy\; dz.$$

Der Werth der Funktionaldeterminante, welcher in diesem Integral auftritt, ist

$$\begin{vmatrix} 1+\xi'_x & \xi'_y & \xi'_z \\ \eta'_x & 1+\eta'_y & \eta'_z \\ \zeta'_x & \zeta'_y & 1+\zeta'_z \end{vmatrix};$$

behält man bei der Entwickelung derselben nur die ersten Potenzen der Differentialquotienten bei, so findet man

$$1 + \xi'_x + \eta'_y + \zeta'_z,$$

d. h.

$$1 + \Theta.$$

Durch Einsetzen dieses Werthes in das Integral für das Volumen nach der Deformation folgt

$$\int\int\int (1 + \Theta)\; dx\; dy\; dz.$$

Ein Volumenelement $dx\,dy\,dz$ wird also nach der Deformation $(1 + \Theta)\; dx\; dy\; dz$; demnach ist Θ der Koefficient der kubischen Dilatation des Medium.

22. Wir kehren nun zu unserer Gleichung für α zurück. Der Koefficient des Gliedes $-\alpha$ ist

$$K = \xi'_x \eta'_y - \xi'_y \eta'_x + \eta'_y \zeta'_z - \eta'_z \zeta'_y + \zeta'_z \xi'_x - \zeta'_x \xi'_z. \tag{26}$$

Dies ist ein drittes isotropes Polynom, welches sich schreiben lässt

$$K = \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} + \frac{D(\eta, \zeta)}{D(y, z)} + \frac{D(\zeta, \xi)}{D(z, x)}.$$

23. Die drei isotropen Polynome zweiten Grades H, Θ^2, K sind auch drei unabhängige Polynome; andere können nicht vorkommen, denn wenn es deren vier gäbe, so würden alle Körper mit kubischer Symmetrie, für welche die Funktion W_2 eine Summe von vier unabhängigen Polynomen zweiten Grades ist, gleichzeitig auch isotrop sein. Uebrigens ist bei Körpern mit kubischer Symmetrie das erste der in W_2 auftretenden Polynome (§ 18)

$$\xi'^2_x + \eta'^2_y + \zeta'^2_z$$

kein isotropes Polynom, denn es bleibt bei einer Drehung der Axen nicht ungeändert, wie man leicht erkennen kann, wenn man die Axen der x und y in der XY-Ebene um 45° dreht.

24. Ausdruck von W_2 bei isotropen Körpern. — Die Funktion W_2 kann nur die drei isotropen Polynome enthalten, die wir soeben gefunden haben, und da sie eine homogene Funktion zweiten Grades von den 9 partiellen Differentialquotienten ξ'_x, ξ'_y ..... ist, so muss sie linear und homogen in Bezug auf die drei isotropen Polynome sein, denn diese sind ihrerseits homogen und vom zweiten Grade in Bezug auf die 9 partiellen Differentialquotienten. W_2 wird sich also in der Form

$$W_2 = \lambda K + \mu H + \nu \Theta^2 \tag{27}$$

darstellen lassen.

Wir wollen diesen Ausdruck mit der Entwickelung (20) derselben Funktion vergleichen. Das erste Glied dieser Entwickelung und die Gesammtheit der beiden letzten müssen für sich isotrop sein, denn in einem isotropen Medium muss jede symmetrische Funktion der gegenseitigen Abstände der Punkte, an welchen sich die Moleküle vor und nach der Verschiebung befinden, eine isotrope Funktion sein.

Wir fassen zunächst das erste Glied $\sum \frac{\partial F}{\partial R} \varrho_2$ dieses Ausdruckes in's Auge, und wollen zeigen, dass es gleich dem mit einem konstanten Faktor multiplicirten Polynom H ist.

Wie wir bei der Untersuchung der Funktion W_2 (§ 15) sahen, würde man, wenn im ersten Gliede der Entwickelung dieser Funktion die Grössen $D\xi$, $D\eta$, $D\zeta$ durch ihre in Gleichung (21) gegebenen Werthe ersetzt werden, für dies Glied ein homogenes Polynom zweiten Grades der 9 partiellen Differentialquotienten erhalten, welches die Quadrate dieser Differentialquotienten sowie die 9 doppelten Produkte von der Form $\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y}$ enthielte. Da dies Glied aber eine isotrope Funktion ist, so können diese doppelten Produkte darin nicht vorkommen, denn sie finden sich nicht in den vier Gruppen von Gliedern, welche bei Körpern mit kubischer Symmetrie auftreten (§ 18); das erste Glied von W_2 reducirt sich also auf ein Polynom, das nur die Quadrate der partiellen Differentialquotienten enthält. Es kann auch nicht Θ und K enthalten, denn in der Funktion K kommen die doppelten Produkte von der Form $\xi_y' \eta_x'$ vor, die sich nicht mit den in Θ^2 vorhandenen doppelten Produkten wegheben können. denn die letzteren haben eine andere Form. Es muss also sein

$$(28) \qquad \sum \frac{\partial F}{\partial R} \varrho_2 = \mu_1 H.$$

25. Die Gesammtheit der beiden letzten Glieder

$$\frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 F}{\partial R^2} \varrho_1^2 + \sum \frac{\partial^2 F}{\partial R \, \partial R'} \varrho_1 \varrho_1'$$

in dem Ausdrucke (20) der Funktion W_2 ist bei isotropen Körpern ebenfalls eine isotrope Funktion, und es ergibt sich aus den Gleichungen (20), (27) und (28) die Beziehung

$$(29) \qquad \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 F}{\partial R^2} \varrho_1^2 + \sum \frac{\partial^2 F}{\partial R \, \partial R'} \varrho_1 \varrho_1' = \lambda K + (\mu - \mu_1) H + \nu \Theta^2.$$

Bei der Untersuchung der Funktion W_2 (§ 16) wiesen wir nach, dass im allgemeinen Falle die linke Seite dieser Gleichung eine homogene Funktion zweiten Grades von folgenden sechs Grössen ist:

$$\xi_x', \quad \eta_y', \quad \zeta_z';$$

$$\xi_y' + \eta_x'; \quad \eta_z' + \zeta_y'; \quad \zeta_x' + \xi_z'.$$

Die Glieder $\xi_y'^2$ und $2 \xi_y' \eta_x'$ können nur vom Quadrat der Grösse $(\xi_y' + \eta_x')$ herrühren, sie müssen also denselben Koefficient haben. Nun findet sich aber das Glied $\xi_y'^2$ nur in der Funktion H, wo es mit dem Koefficient 1 behaftet ist, es wird also in die rechte Seite der Gleichung (29) mit dem Koefficient $(\mu - \mu_1)$ eingehen. Das

Glied $2\xi_y'\eta_x'$ kann nur aus der Funktion K kommen, wo es den Koefficient $-\frac{1}{2}$ besitzt; der Koefficient, mit welchem es in die rechte Seite der Gleichung (29) eingeht, wird also $-\frac{\lambda}{2}$ sein. Da nun die beiden betrachteten Terme auf der linken Seite der Gleichung (29) denselben Koefficienten besitzen, so muss dies auch auf der rechten Seite der Fall sein, und wir erhalten daher:

$$\mu - \mu_1 = -\frac{\lambda}{2}. \tag{30}$$

26. Setzt man voraus, dass der äussere Druck im Gleichgewichtszustande Null sei, so verschwindet das Glied $\sum \frac{\partial F}{\partial R} \varrho_2$ der Entwickelung von W_2 (§ 15); demnach ist $\mu_1 =$ Null, und die obige Beziehung wird

$$\mu = -\frac{\lambda}{2}. \tag{31}$$

Es bleiben dann also nur zwei willkürliche Koefficienten in der Funktion W_2.

Unter der Annahme von Centralkräften ist das Glied

$$\sum \frac{\partial^2 F}{\partial R\, \partial R'} \varrho_1 \varrho_1'$$

Null (vgl. § 17), und die linke Seite der Gleichung (29) reducirt sich auf

$$\frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 F}{\partial R^2} \varrho_1^2.$$

Nun sahen wir, dass, wenn man ϱ_1^2 durch seinen aus Gleichung (22) folgenden Werth ersetzt, der Koefficient von $\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2$ gleich dem Koefficient von $2\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}$ ist. Demnach muss auf der linken Seite der Gleichung (29) der Koefficient von $\xi_y'^2$ gleich demjenigen von $2\xi_x'\eta_y'$ sein, und dasselbe muss für die rechte Seite dieser Gleichung gelten. Nun hat hier das Glied $\xi_y'^2$ den Koefficient $(\mu - \mu_1)$; da nun das Glied $2\xi_x'\eta_y'$ in Θ^2 mit dem Koefficient 1 und in K mit dem Koefficient $\frac{1}{2}$ behaftet ist, so tritt es auf der rechten Seite von (29) mit dem Koefficient $\left(\nu + \frac{\lambda}{2}\right)$ auf; wir haben somit die Gleichung

$$\mu - \mu_1 = \nu + \frac{\lambda}{2}.$$

Ersetzen wir darin $\mu - \mu_1$ durch seinen aus Gleichung (30) folgenden Werth, so erhalten wir

$$\lambda + \nu = 0; \tag{32}$$

somit ist die Zahl der willkürlichen Koefficienten auf zwei reducirt.

27. Fassen wir nochmals alles zusammen, so finden wir: Die Funktion W_2 der inneren Kräfte, welche bei der Deformation eines isotropen Medium auftreten, ist eine homogene Funktion zweiten Grades der 9 Differentialquotienten der Grössen ξ, und enthält höchstens drei willkürliche Koefficienten λ, μ, ν. Die Zahl dieser Koefficienten kann sich aber in gewissen speciellen Fällen noch verringern, und zwar erhalten wir:

1. Drei willkürliche Koefficienten im allgemeinsten Falle.

2. Zwei Koefficienten, wenn der äussere Druck im Gleichgewichtszustande Null ist und die Kräfte nicht centrale sind.

3. Zwei Koefficienten, wenn die Kräfte centrale sind und der äussere Druck im Gleichgewichtszustande von Null verschieden ist (Annahme von Cauchy).

4. Einen einzigen Koefficienten, wenn die Kräfte centrale sind und der äussere Druck im Gleichgewichtszustand Null ist, denn in diesem Falle gelten die Gleichungen (31) und (32) gleichzeitig.

28. Ausdruck von W_1 als Funktion der partiellen Differentialquotienten. — Die Funktion W_1 ist das Glied ersten Grades in der Entwickelung der Funktion W nach wachsenden Potenzen der ξ (§ 13). Wie die Funktion U', so lässt sich auch diese Funktion nach wachsenden Potenzen von ϱ entwickeln, und wir erhalten unter Berücksichtigung der Gleichungen (12) und (17):

$$W_1 = \sum \frac{\partial F}{\partial R} \varrho_1,$$

wobei sich die Summation lediglich auf die Moleküle des Volumenelements $d\tau$ erstreckt. Ersetzt man ϱ_1 durch seinen aus Gleichung (22) folgenden Werth, so findet man

$$\frac{1}{2} W_1 = \xi'_x \sum \frac{\partial F}{\partial R} Dx^2 + \eta'_y \sum \frac{\partial F}{\partial R} Dy^2 + \xi'_z \sum \frac{\partial F}{\partial R} Dz^2$$
$$+ (\xi'_y + \eta'_x) \sum \frac{\partial F}{\partial R} Dx\, Dy + \ldots\ldots$$

Dies ist also eine homogene Funktion ersten Grades der 9 partiellen Differentialquotienten.

29. Aeussere Drucke. — Bewegungsgleichungen. — Wir fassen eine geschlossene Oberfläche S in's Auge (Fig. 1), welche das elastische Medium in zwei Theile zerlegt, den einen, R, innerhalb der Oberfläche, den anderen, R', ausserhalb derselben. Die verschiedenen Moleküle von R' wirken auf die Moleküle von R, aber, da der Radius der molekularen Wirkungssphäre nur sehr klein ist, so unterliegen nur die der Oberfläche von R benachbarten Moleküle den Wirkungen der Moleküle in R'.

Diese Wirkungen lassen sich durch ein System von Kräften ersetzen, welche an den Elementen $d\omega$ der Oberfläche S angreifen, und die im Allgemeinen schräg gegen das betreffende Element gerichtet sind. Wir bezeichnen die Komponenten des äusseren Druckes auf das Element $d\omega$ nach den drei Koordinatenaxen mit

$$P_x d\omega; \quad P_y d\omega; \quad P_z d\omega;$$

dies sind äussere Kräfte für das System, wenn man nur das von der Oberfläche begrenzte Volumen R betrachtet. Die Anwendung des Princips von d'Alembert und des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten wird uns gestatten, die Werthe der Druckkomponenten zu bestimmen, und wird uns gleichzeitig auch eine neue Form der Bewegungsgleichungen liefern.

Bezeichnet ϱ die Dichte eines Volumenelements $d\tau$ (in Zukunft soll der Buchstabe ϱ ausschliesslich diese Bedeutung besitzen), so ist die Masse des Elements $\varrho d\tau$, und die drei Komponenten der Trägheitskräfte, welche auf dies Element wirken müssen, damit es sich nach dem d'Alembert'schen Princip im Gleichgewichte befindet, sind

$$-\varrho d\tau \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}; \quad -\varrho d\tau \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}; \quad -\varrho d\tau \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}.$$

Wenn alle Volumenelemente von R unter der Einwirkung der bewegenden Kräfte und der Trägheitskräfte in Ruhe sind, so kann man auf dies Volumen das Princip von den virtuellen Geschwindigkeiten anwenden: *In einem im Gleichgewichte befindlichen System ist die Summe der virtuellen Arbeiten Null.* Bezeichnet man mit U die Kräftefunktion der sämmtlichen auf R wirkenden inneren und äusseren Kräfte, dann ist die Summe der virtuellen Arbeiten dieser Kräfte δU; nennt man ferner $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ die Projektionen der virtuellen Verrückung eines Elements $d\tau$, so wird die virtuelle Arbeit der Trägheitskraft

$$- \varrho d\tau \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \delta \xi + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \delta \eta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \delta \zeta \right).$$

Die Summe der Arbeiten sämmtlicher Trägheitskräfte wird also sein

$$- \int \varrho d\tau \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \delta \xi + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \delta \eta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \delta \zeta \right),$$

und nach dem Princip von den virtuellen Geschwindigkeiten erhält man:

$$\delta U - \int \varrho d\tau \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \delta \xi + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \delta \eta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \delta \zeta \right) = 0, \tag{33}$$

welches auch die $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ sein mögen.

Nach Gleichung (19) ist

$$\delta U = \delta U'' + \int \delta W \, d\tau,$$

und zwar bedeutet $\delta U''$ die Summe der virtuellen Arbeiten der äusseren Kräfte, mit anderen Worten, der oben definirten Drucke; wir haben also:

$$\delta U'' = \int d\omega \, (P_x \delta \xi + P_y \delta \eta + P_z \delta \zeta),$$

wobei sich das Integral über die ganze Oberfläche erstreckt. Nimmt man an, dass die Komponenten $\delta\eta$ und $\delta\zeta$ der Verschiebung Null sind, dann reducirt sich die virtuelle Arbeit der äusseren Kräfte auf

$$\delta U'' = \int d\omega \, P_x \delta \xi.$$

Die auf die inneren Kräfte bezügliche Funktion W ist eine Funktion der 9 partiellen Differentialquotienten der ξ. In Folge der virtuellen Verrückung des Systems ändert sich im Allgemeinen jeder dieser Differentialquotienten, aber in dem speciellen Falle, wo $\delta\eta = \delta\zeta = 0$, sind die einzigen Derivirten, deren Werth sich ändert, ξ_x', ξ_y' ξ_z'. Demnach ist

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial \xi_x'} \delta \xi_x' + \frac{\partial W}{\partial \xi_y'} \delta \xi_y' + \frac{\partial W}{\partial \xi_z'} \delta \xi_z = \sum \frac{\partial W}{\partial \xi_x'} \delta \xi_x'.$$

Nun ist $\delta \xi_x'$, d. h. $\delta \frac{\partial \xi}{\partial x}$, gleich $\frac{\partial}{\partial x} \delta \xi$, somit wird der Ausdruck für δW

$$\delta W = \sum \frac{\partial W}{\partial \xi_x'} \frac{\partial}{\partial x} \delta \xi.$$

Wir haben demnach

$$\delta U = \int d\omega\, P_x \delta\xi + \int d\tau \sum \frac{\partial W}{\partial \xi_x'} \frac{\partial}{\partial x} \delta\xi .$$

Führt man diesen Werth in Gleichung (33) ein und setzt dabei in dem Gliede, das sich auf die Arbeit der Trägheitskräfte bezieht, $\delta\eta = \delta\zeta = 0$, so erhält man:

$$\int d\omega\, P_x \delta\xi + \int d\tau \sum \frac{\partial W}{\partial \xi_x'} \frac{\partial}{\partial x} \delta\xi - \int \varrho\, d\tau \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \delta\xi = 0 . \tag{34}$$

30. Diesen Ausdruck, der neben $\delta\xi$ auch noch dessen Differentialquotient nach x enthält, müssen wir nun umformen. Zu diesem Zwecke wenden wir den folgenden Satz an, der gewöhnlich zum Beweise des Green'schen Theorems in der Potentialtheorie dient.

Bedeutet F eine Funktion der Koordinaten x, y, z eines Punktes, und α den cos. des Winkels zwischen der Normalen eines Elements $d\omega$ einer geschlossenen Oberfläche S und der X-Axe, so ist das Integral von $F\alpha\, d\omega$, ausgedehnt über alle Elemente der Oberfläche S, gleich dem Integral von $\frac{\partial F}{\partial x} dx$, ausgedehnt über alle Volumenelemente $d\tau$ des von der Oberfläche S begrenzten Volumens R.

Setzen wir nun $F = \frac{\partial W}{\partial \xi_x'} \delta\xi$, so erhalten wir

$$\int \frac{\partial W}{\partial \xi_x'} \delta\xi\, \alpha\, d\omega = \int \frac{\partial \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_x'} \delta\xi\right)}{\partial x} d\tau = \int \frac{\partial \frac{\partial W}{\partial \xi_x'}}{\partial x} \delta\xi\, d\tau + \int \frac{\partial W}{\partial \xi_x'} \frac{\partial\, \delta\xi}{\partial x} d\tau$$

und entsprechend

$$\int \frac{\partial W}{\partial \xi_y'} \delta\xi\, \beta\, d\omega = \int \frac{\partial \frac{\partial W}{\partial \xi_y'}}{\partial y} \delta\xi\, d\tau + \int \frac{\partial W}{\partial \xi_y'} \frac{\partial\, \delta\xi}{\partial y} d\tau$$

$$\int \frac{\partial W}{\partial \xi_z'} \delta\xi\, \gamma\, d\omega = \int \frac{\partial \frac{\partial W}{\partial \xi_z'}}{\partial z} \delta\xi\, d\tau + \int \frac{\partial W}{\partial \xi_z'} \frac{\partial\, \delta\xi}{\partial z} d\tau .$$

Durch gliedweise Addition dieser drei Gleichungen folgt:

$$\int \delta\xi\, d\omega \sum \alpha \frac{\partial W}{\partial \xi_x'} = \int \delta\xi\, d\tau \sum \frac{\partial \frac{\partial W}{\partial \xi_x'}}{\partial x} + \int d\tau \sum \frac{\partial W}{\partial \xi_x'} \frac{\partial\, \delta\xi}{\partial x}$$

oder:

$$\int d\tau \sum \frac{\partial W}{\partial \xi_x'} \frac{\partial \delta\xi}{\partial x} = \int \delta\xi\, d\omega \sum \alpha \frac{\partial W}{\partial \xi_x'} - \int \delta\xi\, d\tau \sum \frac{\partial \frac{\partial W}{\partial \xi_x'}}{\partial x}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber gerade das Glied der Gleichung (34), welches den Differentialquotient von $\delta\xi$ enthält; ersetzen wir dasselbe durch den gefundenen Werth, so erhalten wir:

$$\int d\omega\, P_x\, \delta\xi + \int \delta\xi\, d\omega \sum \alpha \frac{\partial W}{\partial \xi_x'} - \int \delta\xi\, d\tau \sum \frac{\partial \frac{\partial W}{\partial \xi_x'}}{\partial x} - \int \varrho\, d\tau \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \delta\xi = 0,$$

oder, wenn man die Oberflächen- und die Volumenintegrale zusammenfasst:

$$\int \delta\xi\, d\omega \left(P_x + \sum \alpha \frac{\partial W}{\partial \xi_x'}\right) - \int \delta\xi\, d\tau \left(\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \sum \frac{\partial \frac{\partial W}{\partial \xi_x'}}{\partial x}\right) = 0.$$

Diese Gleichung gilt für jeden beliebigen Werth von $\delta\xi$, daher müssen die Koefficienten von $\delta\xi\, d\omega$ und $\delta\xi\, d\tau$ Null sein; wir erhalten somit

$$P_x = -\sum \alpha \frac{\partial W}{\partial \xi_x'} \tag{35}$$

und

$$-\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \sum \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial \xi_x'}. \tag{36}$$

31. Die erste dieser Gleichungen liefert den Werth der X-Komponente des Druckes; setzen wir

$$-\frac{\partial W}{\partial \xi_x'} = P_{xx}; \qquad -\frac{\partial W}{\partial \xi_y'} = P_{xy}; \qquad -\frac{\partial W}{\partial \xi_z'} = P_{xz},$$

so wird der Ausdruck für diese Komponente

$$P_x = \alpha P_{xx} + \beta P_{xy} + \gamma P_{xz}.$$

Die Grösse P_{xx} in diesem Ausdrucke lässt sich aber schreiben

$$P_{xx} = -\frac{\partial W}{\partial \xi_x'} = -\frac{\partial W_1}{\partial \xi_x'} - \frac{\partial W_2}{\partial \xi_x'}.$$

Nun ist W_1 eine homogene lineare Funktion der partiellen Differentialquotienten, W_2 eine Funktion zweiten Grades derselben Grössen, somit ist das erste Glied von P_{xx} eine Konstante und das zweite Glied eine Funktion ersten Grades der partiellen Derivirten:

Befindet sich das Medium in seiner Gleichgewichtslage, so sind die Grössen ξ Null, und, da Null den Minimalwerth für diese Grössen darstellt, so sind auch ihre Differentialquotienten ξ_x', ξ_y' .... Null; demnach verschwindet das zweite Glied von P_{xx}, und der Werth von P_{xx} für die Gleichgewichtslage wird:

$$P_{xx} = -\frac{\partial W_1}{\partial \xi_x'}.$$

Nach dem Werthe, den wir in § 28 für W_1 fanden, ist

$$P_{xx} = -2\sum \frac{\partial F}{\partial R} Dx^2.$$

Entsprechend würde man für die Gleichgewichtslage des Systems finden

$$P_{xy} = -2\sum \frac{\partial F}{\partial R} Dx\,Dy; \qquad P_{xz} = -2\sum \frac{\partial F}{\partial R} Dx\,Dz \dots ;$$

diese Ausdrücke zeigen, dass, wenn die sechs Grössen

$$\sum \frac{\partial F}{\partial R} Dx^2, \qquad \sum \frac{\partial F}{\partial R} Dy^2, \qquad \sum \frac{\partial F}{\partial R} Dz^2$$

$$\sum \frac{\partial F}{\partial R} Dy\,Dz, \qquad \sum \frac{\partial F}{\partial R} Dz\,Dx, \qquad \sum \frac{\partial F}{\partial R} Dx\,Dy$$

Null sind, auch der äussere Druck im Gleichgewichtszustande Null sein muss. Dies ist gerade das Reciproke der Eigenschaft, welche wir in § 10 nachwiesen.

32. Wir wollen nun die Gleichung (36) in's Auge fassen, welche eine der Bewegungsgleichungen darstellt. Ersetzt man darin W durch $W_1 + W_2$, so wird dieselbe:

$$-\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \sum \frac{\partial \frac{\partial W_1}{\partial \xi_x'}}{\partial x} + \sum \frac{\partial \frac{\partial W_2}{\partial \xi_x'}}{\partial x};$$

hierin ist W_1 linear und homogen in Bezug auf die partiellen Differentialquotienten, somit ist $\frac{\partial W_1}{\partial \xi_x}$ eine Konstante; der Differentialquotient dieser Grösse nach x ist also Null, und das erste Glied auf der rechten Seite der Gleichung verschwindet. Die Bewegungsgleichungen reduciren sich somit auf:

$$-\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \sum \frac{\partial \dfrac{\partial W_2}{\partial \xi_x'}}{\partial x}$$

$$-\varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \sum \frac{\partial \dfrac{\partial W_2}{\partial \eta_x'}}{\partial x}$$

$$-\varrho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \sum \frac{\partial \dfrac{\partial W_2}{\partial \zeta_x'}}{\partial x}.$$

33. Bewegungsgleichungen für isotrope Körper. — Bei isotropen Körpern ist die Funktion W_2 gegeben durch die Gleichung (27) des § 24

$$W_2 = \lambda K + \mu H + \nu \Theta^2.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Bewegungsgleichungen ein, so wird die erste derselben:

$$-\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \lambda \sum \frac{\partial \dfrac{\partial K}{\partial \xi_x'}}{\partial x} + \mu \sum \frac{\partial \dfrac{\partial H}{\partial \xi_x}}{\partial x} + \nu \sum \frac{\partial \dfrac{\partial \Theta^2}{\partial \xi_x'}}{\partial x}.$$

Wir wollen nun den Werth eines jeden Gliedes auf der rechten Seite bestimmen.

Aus dem durch die Gleichung (26) des § 22 gegebenen Werthe von K erhalten wir:

$$\frac{\partial K}{\partial \xi_x} = \eta_y' + \zeta_z'\,; \qquad \frac{\partial K}{\partial \xi_y'} = -\eta_x'\,; \qquad \frac{\partial K}{\partial \xi_z'} = -\zeta_x'$$

und somit wird:

$$\frac{\partial \dfrac{\partial K}{\partial \xi_x'}}{\partial x} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\, \partial z}\,; \quad \frac{\partial \dfrac{\partial K}{\partial \xi_y'}}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y}\,; \quad \frac{\partial \dfrac{\partial K}{\partial \xi_z'}}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\, \partial z}.$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen ergibt sich

$$\sum \frac{\partial \dfrac{\partial K}{\partial \xi_x'}}{\partial x} = 0\,;$$

der Koefficient von λ verschwindet also aus den Bewegungsgleichungen, aber er würde in dem Ausdruck für den Werth der Drucke bei isotropen Körpern wieder auftreten.

Nach Gleichung (24) ist der Werth von H gegeben durch

$$H = \Sigma \xi_x'^2;$$

hieraus erhalten wir:

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_x'} = 2\xi_x'; \quad \frac{\partial H}{\partial \xi_y'} = 2\xi_y'; \quad \frac{\partial H}{\partial \xi_z'} = 2\xi_z';$$

$$\frac{\partial \frac{\partial H}{\partial \xi_x'}}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial \frac{\partial H}{\partial \xi_y'}}{\partial y} = 2\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial \frac{\partial H}{\partial \xi_z}}{\partial z} = 2\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$$

und

$$\mu \sum \frac{\partial \frac{\partial H}{\partial \xi_x'}}{\partial x} = 2\mu\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right) = 2\mu\Delta\xi.$$

Schliesslich bestimmen wir noch den Werth des Gliedes, welches θ enthält; wir finden nach (25)

$$\frac{\partial \Theta^2}{\partial \xi_x'} = 2\Theta; \quad \frac{\partial \Theta^2}{\partial \xi_y'} = 0; \quad \frac{\partial \Theta^2}{\partial \xi_z'} = 0,$$

$$\frac{\partial \frac{\partial \Theta^2}{\partial \xi_x'}}{\partial x} = 2\frac{\partial \Theta}{\partial x}; \quad \frac{\partial \frac{\partial \Theta^2}{\partial \xi_y'}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \frac{\partial \Theta^2}{\partial \xi_z'}}{\partial z} = 0,$$

und somit

$$\nu \sum \frac{\partial \frac{\partial \Theta^2}{\partial \xi_x'}}{\partial x} = 2\nu\frac{\partial \Theta}{\partial x}.$$

Demnach werden die Bewegungsgleichungen

$$(38) \qquad \begin{cases} -\varrho\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 2\mu\Delta\xi + 2\nu\dfrac{\partial \Theta}{\partial x} \\ -\varrho\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 2\mu\Delta\eta + 2\nu\dfrac{\partial \Theta}{\partial y} \\ -\varrho\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 2\mu\Delta\zeta + 2\nu\dfrac{\partial \Theta}{\partial z}. \end{cases}$$

Dieselben enthalten zwei willkürliche Koefficienten, welche sich in dem Falle auf eine einzige reduciren, wo die Kräfte centrale sind und der äussere Druck im Gleichgewichtszustande Null ist. Wir sahen nämlich in § 27, dass dann gilt:

$$\mu = -\frac{\lambda}{2} \qquad \lambda + \nu = 0,$$

und somit

$$\mu = \frac{\nu}{2}.$$

34. Longitudinal- und Transversalbewegungen. — Wir wollen nun nachweisen, dass man die Bewegung eines Moleküls in einem isotropen Medium so auffassen darf, als entstehe dieselbe durch das Zusammenwirken zweier Bewegungen, die wir transversale und longitudinale nennen wollen; diese Bezeichnungsweise werden wir später rechtfertigen.

Wir differentiiren die erste der Gleichungen (38) nach x, die zweite nach y, die dritte nach z und addiren dieselben; dann erhalten wir

$$-\varrho\left(\frac{\partial^2 \xi'_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \eta'_y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \zeta'_z}{\partial t^2}\right) = 2\mu\left(\Delta\frac{\partial \xi}{\partial x} + \Delta\frac{\partial \eta}{\partial y} + \Delta\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) +$$
$$+ 2\nu\left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2}\right).$$

Nun ist nach Gleichung (25)

$$\Theta = \xi'_x + \eta'_y + \zeta'_z,$$

demnach

$$\Delta\Theta = \Delta\xi'_x + \Delta\eta'_y + \Delta\zeta'_z = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2}.$$

und

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi'_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \eta'_y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \zeta'_z}{\partial t^2}.$$

Somit lässt sich die obige Gleichung schreiben:

$$-\varrho\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = 2(\mu + \nu)\Delta\Theta;$$

dieser Differentialgleichung muss also die Funktion Θ genügen. Nehmen wir an, dass zur Zeit $t = 0$ sowohl die Funktion Θ selbst wie ihr Differentialquotient nach der Zeit Null sind, so zeigt die obige Gleichung, dass dies auch für den zweiten Differentialquotient der Fall sein muss. Durch Differentiation dieser Gleichung würden wir eine neue Gleichung erhalten, aus der wir wiederum den Schluss ziehen könnten, dass auch der dritte Differentialquotient von Θ nach der Zeit Null sein muss; ebenso würden wir auch für die übrigen Differentialquotienten den Werth Null finden, und somit muss die

Funktion θ selbst identisch gleich Null sein. Die kleinen Bewegungen, für welche die Funktion θ Null ist, sind es nun, die wir als transversale bezeichnet haben.

35. Wir betrachten ferner die Grössen

$$u = \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\,; \quad v = \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\,; \quad w = \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\,,$$

und suchen die Differentialgleichung auf, welche sie verbindet. Zu diesem Zwecke differentiiren wir die zweite der Gleichungen (38) nach z, die dritte nach y und subtrahiren dieselben von einander, dann erhalten wir

$$-\varrho\left(\frac{\partial^2 \eta_z'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \zeta_y'}{\partial t^2}\right) = 2\,\mu\left(\varDelta\,\frac{\partial \eta}{\partial z} - \varDelta\,\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) + 2\,\nu\left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y\,\partial z}\right)$$

oder

$$-\varrho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2\,\mu\,\varDelta u.$$

Auf analoge Weise gelangen wir zu den beiden entsprechenden Gleichungen

$$-\varrho\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 2\,\mu\,\varDelta v$$

$$-\varrho\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 2\,\mu\,\varDelta w.$$

Sind auch hier für $t = 0$ sowohl die Grössen u, v, w als auch deren Differentialquotienten erster Ordnung Null, so gilt dasselbe, wie die vorhergehenden Gleichungen zeigen, auch für die zweiten Differentialquotienten. Durch Differentiation dieser Gleichungen würde man wieder neue Gleichungen erhalten, vermittels deren sich nachweisen liesse, dass für $t = 0$ auch die dritten Differentialquotienten Null sein müssen u. s. f. Somit sind die Funktionen u, v, w identisch gleich Null. Die Bewegungen, für welche dies der Fall ist, heissen longitudinale.

36. In den drei identischen Gleichungen

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0\,; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0\,; \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

haben wir die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Grösse

$$\xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz$$

ein vollständiges Differential darstellt. Wir können also im Falle der Longitudinalbewegungen setzen

$$\xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz = d\varphi\,,$$

und haben somit

$$\xi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \eta = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \zeta = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

37. Nunmehr fassen wir eine Verschiebung ξ, η, ζ in's Auge. Zum Beweise dafür, dass sich die Bewegung der Moleküle als Resultante einer Transversal- und einer Longitudinalbewegung auffassen lässt, haben wir zu zeigen, dass

$$\xi = \xi_1 + \xi_2; \quad \eta = \eta_1 + \eta_2; \quad \zeta = \zeta_1 + \zeta_2\,,$$

worin ξ_1, η_1, ζ_1 sich auf eine transversale, ξ_2, η_2, ζ_2 auf eine longitudinale Bewegung beziehen. Nach dem Vorangehenden ist nun

$$\xi_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \eta_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \zeta_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,,$$

und somit

$$\xi = \xi_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \eta = \eta_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \zeta = \zeta_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,,$$

wobei ξ_1, η_1, ζ_1 der Differentialgleichung der Transversalbewegungen

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} = 0$$

genügen.

Differentiiren wir die Gleichungen für ξ, η, ζ bezw. nach x, y, z und addiren dieselben, so folgt

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2};$$

diese Gleichung reducirt sich nach unseren Annahmen auf

$$\Theta = \Delta \varphi.$$

Nun ist nach der Poisson'schen Gleichung die Summe der zweiten Differentialquotienten des Potentials in einem Punkte gleich $-4\pi\varrho$, wobei ϱ die Dichte der anziehenden Materie in dem betreffenden Punkte bezeichnet; man wird also eine Funktion φ erhalten, welche der Gleichung $\theta = \Delta\varphi$ genügt, wenn man das Potential einer anziehenden Materie bestimmt, deren Dichte $-\frac{\Theta}{4\pi}$ ist. Eine solche Funktion gibt es stets, und somit lässt sich in der That die Bewegung eines Moleküls als Superposition einer longitudinalen und einer transversalen Bewegung auffassen.

38. Gleichungen für die Transversalbewegungen in den isotropen Körpern. — Die Gleichungen für die Transversalbewegungen in den isotropen Körpern erhält man, wenn man in den Gleichungen (38) $\theta = 0$ setzt; dieselben werden somit

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} -\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= 2\,\mu\,\Delta\xi \\ -\varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= 2\,\mu\,\Delta\eta \\ -\varrho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= 2\,\mu\,\Delta\zeta. \end{aligned}\right.$$

39. Gleichungen für die Longitudinalbewegungen. — Auch die Gleichungen für die Longitudinalbewegungen nehmen eine einfache Gestalt an. Da

$$\Theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

war, so ist

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right).$$

Nun sind u, v, w Null, somit ist

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}.$$

Setzt man dies in die Gleichung für $\frac{\partial \Theta}{\partial x}$ ein, so erhält man:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \Delta\xi,$$

und durch Einführung dieses Werthes von $\frac{\partial \Theta}{\partial x}$ in die Gleichungen (38) ergibt sich für die Longitudinalbewegungen

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} -\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= 2\,(\mu + \nu)\,\Delta\xi \\ -\varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= 2\,(\mu + \nu)\,\Delta\eta \\ -\varrho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= 2\,(\mu + \nu)\,\Delta\zeta. \end{aligned}\right.$$

Kapitel II.

Fortpflanzung einer ebenen Welle. — Interferenz.

40. Specieller Fall: Fortpflanzung in ebenen Wellen. — Wir wollen nun annehmen, dass die Verschiebungskomponenten ξ, η, ζ, welche im Allgemeinen Funktionen von x, y, z und t sind, nur von z und t abhängen. Fassen wir eine zur Z-Axe senkrechte Ebene in's Auge, so werden alle in dieser Ebene befindlichen Moleküle zu derselben Zeit t auch dieselbe Verschiebung erleiden, da alle Punkte dieser Ebene durch denselben Werth von z charakterisirt sind. Diese Ebene ist die Wellenebene.

Bei den Transversalbewegungen ist die isotrope Funktion θ identisch Null; da nun bei der von uns betrachteten Bewegung ξ, η, ζ nicht von x und y abhängen, so haben wir

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0;$$

somit reducirt sich die Bedingungsgleichung $\theta = 0$ auf

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Die Verschiebungskomponente ζ ist also eine Konstante; nehmen wir an, dieselbe sei Null, so findet die Verschiebung der Moleküle des elastischen Medium in der Wellenebene statt; dies rechtfertigt den Namen Transversalbewegungen für die Bewegungen, welche durch die Gleichung $\theta = 0$ charakterisirt sind.

Die Bewegungen, welche wir als longitudinale bezeichneten, sind durch folgende identische Gleichungen (§ 35) bestimmt:

$$u = \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0; \quad v = \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0; \quad w = \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0.$$

Bei ebenen Wellen reduciren sich diese Bedingungen auf

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = 0\,; \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0.$$

Für denselben Augenblick t haben die Verschiebungskomponenten ξ und η aller Moleküle denselben Werth; setzen wir ihn gleich Null, dann findet die Verschiebung der Moleküle in einer zur Wellenebene senkrechten Geraden statt; aus diesem Grunde haben wir die den obigen Gleichungen genügenden Bewegungen als longitudinale bezeichnet.

41. Die Gleichungen für die Transversalbewegungen in den isotropen Körpern vereinfachen sich im Falle der Fortpflanzung in ebenen Wellen; da die Grössen ξ, η, ζ weder von x noch von y abhängen, so erhalten wir für die Bewegung eines Moleküls in der Wellenebene

$$-\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 2\,\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$$

$$-\varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 2\,\mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}.$$

Setzen wir

$$\mathrm{V} = \sqrt{-\frac{2\,\mu}{\varrho}}\,,$$

so gehen diese Gleichungen über in

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathrm{V}^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \mathrm{V}^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}.$$

Durch Integration der ersten Gleichung erhalten wir

$$\xi = \mathrm{F}(z - \mathrm{V}t) + \mathrm{F}'(z + \mathrm{V}t),$$

wobei F und F′ willkürliche Funktionen bezeichnen. Die Verschiebung ξ eines in der Wellenebene gelegenen Moleküls lässt sich also auffassen als Summe zweier Verschiebungen, von denen die eine durch die Funktion $\mathrm{F}(z - \mathrm{V}t)$, die andere durch die Funktion $\mathrm{F}'(z + \mathrm{V}t)$ gegeben ist.

42. Die Grösse V hat eine sehr einfache geometrische Bedeutung. Bezeichnen wir mit h die Entfernung der senkrecht zur Z-Axe durch zwei Moleküle A und A′ gelegten Ebenen, und nennen wir z_0 die Z-Koordinate des tiefer gelegenen Punktes A, dann erhalten wir für den Punkt A zur Zeit t_0 statt $(z - Vt)$ den Werth

$$z_0 - Vt_0.$$

Für den Punkt A′ wird der Werth dieses Ausdrucks zur Zeit $\left(t_0 + \frac{h}{V}\right)$

$$z_0 + h - V\left(t_0 + \frac{h}{V}\right) = z_0 - Vt_0.$$

Dies ist derselbe Werth, wie derjenige, welchen wir im Punkte A zur Zeit t_0 erhielten; somit nimmt die Funktion $F(z - Vt)$ im Punkte A′ den Werth an, den sie im Punkte A zu einer um $\frac{h}{V}$ früheren Zeit hatte. Für einen Beobachter, der sich längs OZ mit einer Geschwindigkeit V fortbewegt, wird die Funktion F eine Konstante sein; dem Beobachter müssen also die verschiedenen Moleküle, welchen er begegnet, in derselben Lage erscheinen. Somit muss sich die Bewegung innerhalb der Moleküle mit der gleichen Geschwindigkeit V fortgepflanzt haben. Aus diesem Grunde sagt man, dass F eine Bewegung bedeutet, welche sich mit der Geschwindigkeit V, und F′ eine Bewegung, welche sich mit der Geschwindigkeit — V fortpflanzt. Die Transversalbewegungen lassen sich also als Superposition zweier Bewegungen auffassen, welche sich in entgegengesetzter Richtung mit, absolut genommen, gleicher Geschwindigkeit fortpflanzen.

43. Setzt man

$$V_1 = \sqrt{-\frac{2(\mu + \nu)}{\varrho}},$$

so gehen die Gleichungen der Longitudinalbewegungen (40) für die Bewegung längs einer auf der Wellenebene normalen Geraden über in

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = V_1^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist

$$\zeta = F_1(z - V_1 t) + F_1'(z + V_1 t).$$

Man kann sich also auch eine Longitudinalbewegung aus dem Zusammenwirken zweier Bewegungen entstanden denken, welche sich mit den Geschwindigkeiten $+ V_1$ und $- V_1$ fortpflanzen.

44. Wenn der äussere Druck im Gleichgewichtszustande Null ist und die zwischen den Molekülen auftretenden Kräfte centrale sind, so hängen die Geschwindigkeiten V und V_1 von einander ab. Wie wir nämlich in § 26 sahen, sind unter diesen Bedingungen λ, μ und ν durch die Gleichungen

$$\mu = -\frac{\lambda}{2}, \quad \lambda + \nu = 0$$

verknüpft. Durch Elimination von λ erhält man

$$\nu = 2\mu.$$

Setzt man diesen Werth von ν in den Ausdruck für V_1 ein, so folgt

$$V_1^2 = 3V^2.$$

In allen anderen Fällen sind die Geschwindigkeiten V und V_1 unabhängig von einander.

45. Hypothesen über die Eigenschaften des Aethers. — Der Versuch zeigt, dass die Aetherschwingungen immer transversal gerichtet sind; um dieser experimentellen Thatsache Rechnung zu tragen, kann man mehrere Hypothesen aufstellen.

Erste Hypothese. — Man kann annehmen, dass der Aether sowohl die longitudinalen wie die transversalen Schwingungen fortzupflanzen vermag, dass aber die ersteren weder auf die Retina des Auges, noch auf die photographische Platte, noch auch auf die zur Bestimmung der strahlenden Wärme verwendeten Instrumente zu wirken vermögen. Diese Hypothese steht jedoch im Widerspruch mit den Experimenten von Fresnel über die Reflexion und Brechung des Lichts; dieselben zeigen nämlich, dass die lebendige Kraft des einfallenden Strahles sich vollständig in den reflektirten und gebrochenen Transversalstrahlen wiederfindet.

46. Zweite Hypothese. — Man kann annehmen, dass $V_1 = 0$, d. h., dass nach dem Werthe dieser Grösse

$$\mu = -\nu$$

ist. Aus § 34 ergibt sich, dass die Differentialgleichung

$$-\varrho \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = 2(\mu + \nu) \Delta \Theta$$

durch Annahme dieser Hypothese übergeht in $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = 0$. Wenn nun für $t = 0$ die Funktion θ und ihr Differentialquotient $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$ Null sind, so ist, wie wir bereits in § 34 nachwiesen, die Funktion θ identisch Null; anderenfalls liefert die Bedingung $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = 0$ für θ den Werth

$$\Theta = at + b.$$

Ist a von Null verschieden, dann wird die Funktion θ mit der Zeit über jede Grenze hinaus wachsen. Nun stellt aber θ den Zuwachs der Volumeneinheit des Medium dar (vgl. § 21). Demnach könnte ein Volumenelement, welches im Anfang der Zeit beliebig klein sein mag, im Verlauf einer genügend langen Zeit grösser werden, als jede gegebene Grösse. Dies ist eine bedenkliche Folgerung aus dieser Hypothese, man darf derselben jedoch nicht zu viel Gewicht beilegen, denn wenn der Volumenzuwachs des elastischen Medium zu gross würde, dann könnten die Grössen ξ, η, ζ auch nicht mehr als unendlich klein aufgefasst werden, und wir würden unter diesen Umständen die Bedingungen verlassen, welche wir beim Beginn dieser Untersuchungen (§ 2) aufgestellt hatten. Die obige Annahme gestattet die Erklärung aller in der Optik bekannt gewordenen Erscheinungen; ausserdem führt sie auch auf dieselben Gleichungen, welche sich aus der elektromagnetischen Lichttheorie ergeben; wir werden ihr also den Vorzug geben.

47. Dritte Hypothese. — Wir können ferner annehmen, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V_1 der Longitudinalbewegungen imaginär ist, d. h. dass

$$\mu + \nu > 0.$$

Diese Hypothese erklärt die Reflexion und Brechung besser als die erste, aber sie führt zu der Annahme, dass das Gleichgewicht des elastischen Medium nicht immer stabil ist. Bei stabilem Gleichgewichte muss nämlich das zweite Glied U_2 in der Entwickelung der Funktion U nach ξ negativ oder Null sein. Nun fanden wir (§ 13)

$$U_2 = U_2'' + \int W_2 \, d\tau,$$

und ausserdem ist bei isotropen Körpern (§ 24)

$$W_2 = \lambda K + \mu H + \nu \Theta^2.$$

Fassen wir den speciellen Fall in's Auge, dass alle partiellen Differentialquotienten ξ'_x, η'_x . . . mit Ausnahme von ζ'_z Null sind, ζ'_z aber gleich Eins ist, so erhalten wir für die isotropen Funktionen H, K, Θ^2 die Werthe

$$K = 0; \quad H = 1; \quad \Theta^2 = 1;$$

somit ist in diesem Falle

$$W_2 = \mu + \nu,$$

d. h. eine positive Grösse. Das im Ausdrucke für U_2 auftretende Integral ist also positiv und demnach ist das Gleichgewicht labil.

Aber bei unserer mangelhaften Kenntniss von der wahren Natur des Aethers dürfen wir den Einwürfen, welche sich auf die Elasticitätstheorie gründen, nicht allzuviel Bedeutung beimessen.

48. Vierte Hypothese. — Schliesslich kann man annehmen, dass die Aethermoleküle nicht frei, sondern Bedingungen unterworfen sind, in Folge deren $\theta = 0$ wird. Diese Hypothese kommt auf die Annahme von der Inkompressibilität des Aethers hinaus, sie steht somit, sozusagen, im Gegensatze zur zweiten Hypothese, welche zu der Annahme führte, dass θ beliebig gross werden könne, mit anderen Worten, dass der Widerstand des Aethers gegen Kompression Null sei. Fresnel wandte bald die eine, bald die andere der beiden Hypothesen an, denn bei seinen Rechnungen setzt er, — oft nur implicite — einmal voraus, dass dieser Widerstand gegen Kompression Null, ein anderes Mal, dass derselbe unendlich gross sei.

49. Bewegungsgleichungen des Aethers. — Wir wollen die zweite Hypothese annehmen, nach welcher $\mu + \nu = 0$ ist, und setzen also

$$V = \sqrt{\frac{-2\mu}{\varrho}},$$

wobei V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes bedeutet. Dann haben wir

$$2\mu = -\varrho V^2; \qquad 2\nu = \varrho V^2,$$

führen wir diese Werthe in die Bewegungsgleichungen für ein isotropes Medium (38) ein, so erhalten wir

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= V^2\left(\Delta\xi - \frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= V^2\left(\Delta\eta - \frac{\partial\Theta}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= V^2\left(\Delta\zeta - \frac{\partial\Theta}{\partial z}\right). \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichungen lassen sich noch in eine andere Form bringen, indem man setzt:

$$u = \frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}; \qquad v = \frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial z}; \qquad w = \frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial x};$$

es ist nämlich

$$\Delta\xi - \frac{\partial\Theta}{\partial x} = \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial z}$$

$$= \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial z}$$

oder

$$\Delta\xi - \frac{\partial\Theta}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Transformirt man auf dieselbe Weise die Grössen

$$\Delta\eta - \frac{\partial\Theta}{\partial y}; \quad \Delta\zeta - \frac{\partial\Theta}{\partial z},$$

welche in den beiden letzten Bewegungsgleichungen vorkommen, so findet man

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = V^2\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = V^2\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = V^2\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

50. Lösung der Gleichungen für die Transversalbewegungen. — Die Gleichungen für die Transversalbewegungen erhalten wir, wenn wir in den Gleichungen (1) $\Theta = 0$ setzen; dieselben werden dann

(2) $$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = V^2\Delta\xi; \quad \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = V^2\Delta\eta; \quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = V^2\Delta\zeta.$$

Wir wollen diesen Gleichungen dadurch zu genügen suchen, dass wir einführen

$$\xi = A\,e^P; \qquad \eta = B\,e^P; \qquad \zeta = C\,e^P;$$

hierbei sind A, B, C Konstanten und P ein homogenes Polynom ersten Grades in Bezug auf die Variabeln x, y, z, t,

$$P = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t.$$

Durch Differentiation von ξ, η, ζ erhalten wir

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \mathrm{A}\alpha e^{\mathrm{P}}; \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \mathrm{A}\alpha^2 e^{\mathrm{P}}; \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathrm{A}\delta^2 e^{\mathrm{P}}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \mathrm{B}\beta e^{\mathrm{P}}; \qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = \mathrm{B}\beta^2 e^{\mathrm{P}}; \qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \mathrm{B}\delta^2 e^{\mathrm{P}}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \mathrm{C}\gamma e^{\mathrm{P}}; \qquad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} = \mathrm{C}\gamma^2 e^{\mathrm{P}}; \qquad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \mathrm{C}\delta^2 e^{\mathrm{P}}.$$

Demnach wird

$$\Theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = e^{\mathrm{P}}(\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \mathrm{C}\gamma)$$

$$\Delta\xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \mathrm{A}e^{\mathrm{P}}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Ersetzt man nun in den Gleichungen (2) $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ und die zweiten Differentialquotienten von ξ, η, ζ nach der Zeit durch ihre Werthe, so erhält man

$$\delta^2 = \mathrm{V}^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Da die Bewegungen transversal sein sollen, so muss $\Theta = 0$ sein, d. h.

$$\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \mathrm{C}\gamma = 0.$$

Diese beiden Bedingungsgleichungen müssen die Koefficienten α, β, γ, δ erfüllen, damit die Ausdrücke für ξ, η, ζ den Bewegungsgleichungen genügen.

51. Wenn die Grössen A, B, C, α, β, γ, δ reell sind, so wird dasselbe auch für ξ, η, ζ der Fall sein; ist aber eine dieser Grössen komplex, dann sind auch ξ, η, ζ komplex. Da die Bewegungsgleichungen linear sind in Bezug auf die Differentialquotienten zweiter Ordnung von ξ, η, ζ, so müssen der reelle und der imaginäre Theil einer komplexen Lösung für sich genommen den Bewegungsgleichungen genügen; wir erhalten somit zwei Lösungen.

In der Optik haben wir es nur mit imaginären Lösungen zu thun, denn die Lichtbewegungen sind immer pendelartige Schwingungen und somit periodisch nach der Zeit. Demnach müssen auch die ξ, η, ζ nach der Zeit periodisch sein, und wenn wir sie, wie oben, durch eine Exponentialgrösse ausdrücken, so muss e^{P} für Werthe, welche sich um eine bestimmte Grösse τ unterscheiden, immer wieder denselben Werth annehmen; wir müssen also haben

$$\delta\tau = 2\pi i$$

und somit

$$\delta = \frac{2\pi i}{\tau};$$

δ ist also imaginär, δ^2 somit negativ, und die Gleichung

$$\delta^2 = V^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

zeigt, dass auch die Summe $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ negativ sein muss; dies erfordert aber, dass wenigstens eine der Grössen α, β, γ imaginär ist.

Haben wir nun die komplexe Lösung einer Gleichung gefunden, so muss der reelle Theil derselben den experimentell ermittelten Thatsachen genügen. Nun lässt sich der reelle Theil einer Exponentialfunktion durch einen Kosinus darstellen, wir könnten also die reellen Lösungen für die Differentialgleichungen finden, wenn wir diejenigen Werthe für die ξ, η, ζ suchten, welche einen Kosinus enthalten und die Gleichungen befriedigen. In gewissen Fällen werden wir auch diesen Weg einschlagen, in anderen dagegen werden wir uns der imaginären Exponentialfunktionen bedienen und die reellen Theile derselben als Lösung ansehen.

52. Wir fassen jetzt eine zur Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

parallele Ebene in's Auge. Für alle Punkte dieser Ebene hat das Polynom P in jedem Augenblicke denselben Werth; demnach werden die Verschiebungen aller dieser Punkte zu derselben Zeit die gleichen sein. Entsprechend der Definition in § 40 ist diese Ebene die Wellenebene.

Zunächst untersuchen wir den Fall, dass die Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

reell ist. Wählen wir dieselbe zur XY-Ebene, dann reducirt sich ihre Gleichung auf

$$z = 0;$$

somit haben wir in diesem Falle $\alpha = \beta = 0$ und $\delta^2 = V^2 \gamma^2$, also

$$\gamma = \frac{\delta}{V} = \frac{2\pi i}{V\tau}.$$

Das Produkt $V\tau$ im Nenner bezeichnen wir mit λ; es stellt die Wellenlänge dar und bedeutet den vom Lichte während einer Schwingungsperiode durchlaufenen Weg.

Ersetzt man in P die Grössen α, β, γ, δ durch ihre Werthe, so erhält man:

$$P = \frac{2\pi i}{\lambda}(z + Vt).$$

P ist also eine periodische Funktion von z und t; die Periode für z ist λ. Der Werth von ξ, welcher der ersten Bewegungsgleichung genügt, wird dann

$$\xi = A\, e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(z + Vt)}.$$

Der Koefficient A kann komplex sein. Bedeutet A_0 seinen Modul, φ sein Argument, dann können wir setzen

$$A = A_0 e^{i\varphi},$$

und damit wird der Werth von ξ:

$$\xi = A_0\, e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(z + Vt) + i\varphi}.$$

Der reelle Theil dieses Ausdruckes gibt die Verschiebung nach der X-Axe und hat den Werth

$$\xi = A_0 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z + Vt) + \varphi\right].$$

Für die Verschiebung nach der Y-Axe erhalten wir entsprechend

$$\eta = B_0 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z + Vt) + \varphi_1\right].$$

Wir wollen weiter annehmen, die Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z$ sei komplex; dann lässt sich die Gleichung derselben in die Form $P + iQ$ bringen. Wählen wir $P = 0$ zur YZ-Ebene, $Q = 0$ zur XY-Ebene, dann wird die Gleichung der Wellenebene

$$\alpha x + i \varepsilon z = 0.$$

In diesem Falle liefert die Bedingung $\theta = 0$ die Gleichung

$$A\alpha + iC\varepsilon = 0,$$

welche zeigt, dass das Verhältniss $\frac{A}{C}$ imaginär sein muss. In Folge der Periodicität der Lichtbewegung haben wir

$$\delta^2 = -\frac{4\pi^2}{\tau^2},$$

während die Bedingung $\delta^2 = V^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$ die Gleichung

$$-\frac{4\pi^2}{\lambda^2} = \alpha^2 - \varepsilon^2$$

liefert. Hieraus folgt, dass $\varepsilon > \alpha$ sein muss. Die Lösung der ersten Bewegungsgleichung ist

$$\xi = A_0\, e^{\alpha x + i \varepsilon z + \frac{2\pi i t}{\tau} + i q}.$$

Der reelle Theil derselben gibt als Werth für die Verschiebung nach der X-Axe

$$\xi = A_0\, e^{\alpha x} \cos\left(\varepsilon z + q + \frac{2\pi t}{\tau}\right).$$

Für die Verschiebungskomponenten nach den beiden anderen Axen η und ζ würden wir analoge Ausdrücke erhalten.

53. Erlöschende Strahlen. — Die Form, welche wir für ξ gefunden haben, unterscheidet sich von derjenigen, welche wir vorher für eine reelle Welle ermittelten, nur durch den Faktor $e^{\alpha x}$. Wenn α negativ ist, so nimmt dieser Faktor mit wachsendem x sehr rasch ab; in der Nähe der Ebene $x = 0$ wird die Bewegung merklich sein; dagegen wird die Amplitude sehr klein, wenn man sich von dieser Ebene etwas entfernt. Da α ungefähr von der Grössenordnung $\frac{1}{\lambda}$ ist, so wird die Bewegung schon in einer Entfernung, welche mit derjenigen einer Wellenlänge vergleichbar ist, ungemein gering. Eine derartige Bewegung finden wir bei der totalen Reflexion. Wenn der Winkel, welchen der einfallende Strahl mit der Normalen der Trennungsfläche bildet, grösser ist als der Grenzwinkel, so ist der sin. des Brechungswinkels, der sich aus der Formel

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n$$

ergibt, imaginär; in diesem Falle ist also sowohl der gebrochene Strahl als auch die auf demselben senkrecht stehende Wellenebene imaginär, wir haben daher in dem Medium mit geringerem Brechungsexponenten eine Bewegung, die sehr rasch erlischt. Fresnel versuchte experimentell die Existenz der erlöschenden Strahlen nachzuweisen; zu diesem Zwecke stellte er eine Glasplatte in sehr geringer Entfernung von einer Oberfläche auf, an welcher eine totale Reflexion vor sich ging, und erhielt in der That helle und dunkele Streifen.

Bei der Untersuchung der Longitudinalbewegungen fand Cauchy erlöschende Bewegungen, doch konnte deren Vorhandensein nicht experimentell nachgewiesen werden. Wir wollen annehmen, dass die Verschiebungen ξ und η, welche für alle Punkte einer ebenen Welle dieselben sind, Null seien, und wollen der Gleichung für ζ

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = V_1^2 \Delta \zeta$$

dadurch zu genügen suchen, dass wir setzen:

$$\zeta = C e^{(\gamma z + \delta t)}.$$

Durch Einführen der zweiten Differentialquotienten nach z und t in die Differentialgleichung erhalten wir die Bedingung

$$\delta^2 = V_1^2 \gamma^2.$$

Da die Grösse δ in Folge der Periodicität der Schwingungsbewegung imaginär sein muss, so ist ihr Quadrat negativ. Cauchy hatte die Annahme gemacht, dass $(\mu + \nu) > 0$; dann ist $V_1^2 < 0$ und γ reell; somit wird die Exponentialfunktion, welche der Bewegungsgleichung genügt,

$$\zeta = C e^{\gamma z + \frac{2 \pi i t}{\tau}}.$$

Der reelle Theil derselben ist

$$\zeta = C_0 e^{\gamma z} \cos \frac{2 \pi t}{\tau}.$$

Nehmen wir $\gamma < 0$ an, so wird die Amplitude der Schwingungsbewegung sehr rasch abnehmen, wenn man sich in der Richtung der positiven z von der Ebene $z = 0$ entfernt; wir haben es also mit einem erlöschenden Strahl zu thun.

54. Bahn der Aethermoleküle bei den Transversalbewegungen. — Setzen wir

$$\frac{2\pi}{\lambda}(z + Vt) + \varphi = \omega; \quad \varphi_1 - \varphi = \Theta,$$

so gehen die Ausdrücke

$$\xi = A_0 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z + Vt) + \varphi\right]$$

$$\eta = B_0 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z + Vt) + \varphi_1\right],$$

welche wir für die in der Wellenebene erfolgenden Transversalverschiebungen eines Moleküls gefunden hatten (vgl. § 52), über in

$$\xi = A_0 \cos \omega$$

$$\eta = B_0 \cos (\omega + \Theta).$$

Durch Elimination von ω aus diesen beiden Gleichungen finden wir die Gleichung der Kurve, welche das Molekül beschreibt; wir erhalten nämlich

$$\cos \omega = \frac{\xi}{A_0}; \quad \sin \omega = -\frac{\eta}{B_0 \sin \Theta} + \frac{\xi}{A_0} \operatorname{cotg} \Theta.$$

Erheben wir beide Ausdrücke in's Quadrat und addiren sie, so folgt

$$\frac{\xi^2}{A_0^2} + \left(\frac{\xi}{A_0} \operatorname{cotg} \Theta - \frac{\eta}{B_0 \sin \Theta}\right)^2 = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse; diese Ellipse geht für $\theta = 0$ oder $= \pi$ in eine Gerade über, wie man leicht sieht, wenn man $\cos \omega$ aus den beiden Gleichungen für ξ und η eliminirt, nachdem man $\theta = 0$ gesetzt hat. Je nachdem die Bahn des schwingenden Moleküls eine Ellipse oder eine Gerade ist, nennt man das Licht elliptisch oder geradlinig polarisirt.

Die Schwingungsrichtung des Aethers bei geradlinig polarisirtem Lichte experimentell zu bestimmen, ist nicht möglich; das einzige, was sich beobachten lässt, ist die Thatsache, dass die Erscheinungen von der Lage einer bestimmten Ebene abhängen, welche man Polarisationsebene genannt hat. Aus Gründen der Symmetrie müssen die Schwingungen entweder in der Polarisationsebene oder senkrecht dazu erfolgen. Fresnel nimmt an, dass sie senkrecht dazu verlaufen, andere Gelehrte (F. E. Neumann) haben die entgegengesetzte Hypothese vorgezogen; wir werden späterhin noch ausführlich auf diesen Punkt zurückkommen.

55. Bemerkung über die Konstanten, welche in den Bewegungsgleichungen auftreten. — Bei der Lösung der Gleichungen für die transversale Bewegung (§ 50) wurden die Grössen A_0, B_0, C_0, α, β, γ, φ, V, λ als Konstanten betrachtet. In Wirklichkeit nehmen die sieben ersten dieser neun Grössen innerhalb einer Sekunde unendlich viele Werthe an, aber da sie sich viel langsamer ändern als ξ, η, ζ, so darf man sie während der Dauer einer gewissen Anzahl von Schwingungen als konstant auffassen (dies gilt für mindestens 50000 Schwingungen, deren Schwingungsdauer ungefähr den zehnmilliardsten Theil einer Sekunde beträgt). Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V des Lichtes ist für ein homogenes Medium eine absolute Konstante, dasselbe gilt bei monochromatischem Lichte für λ. Man könnte auch annehmen, dass sich λ auf irgend eine Weise beim weissen Lichte ändert oder mit anderen Worten, dass das weisse Licht durch die Superposition einer grossen Anzahl von monochromatischen Lichtarten gebildet wird. Da wir jedoch im Verlaufe unserer Betrachtungen immer nur monochromatisches Licht berücksichtigen werden, so dürfen wir auch bei unseren Rechnungen λ als Konstante betrachten. Wollte man dann den Werth der Verschiebungen eines Moleküls für weisses Licht finden, so würde man nur die Summe aus einer grossen Anzahl von Verschiebungen zu bilden haben, wobei für jede derselben λ als Konstante aufzufassen wäre.

56. Intensität des Lichts. — Die Intensität einer Lichtschwingung definirt man als eine Grösse, welche der lebendigen Kraft des in Bewegung befindlichen Moleküls proportional ist. Da diese lebendige Kraft als Funktion der Zeit sich sehr rasch ändert, so ist die Annahme gestattet, dass die messbare Intensität, d. h. diejenige Intensität, welche auf unsere Sinne wirkt, dem Mittelwerthe dieser Funktion proportional ist.

Die lebendige Kraft des in Bewegung befindlichen Moleküls ist in einem bestimmten Augenblicke gegeben durch

$$\varrho\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2\right].$$

Nun sahen wir (§ 54), dass bei der Fortpflanzung des Lichtes durch reelle Wellen — dem einzigen Falle, der bei experimentellen Untersuchungen in Betracht kommt, — die Verschiebungskomponenten eines Moleküls dargestellt werden durch

$$\xi = A_0 \cos\omega\,; \qquad \eta = B_0 \cos(\omega+\Theta),$$

wobei

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda}(z+Vt)+\varphi.$$

Differentiiren wir ξ und η nach t und betrachten A_0, B_0 und φ als Konstanten, so erhalten wir

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = -A_0\frac{2\pi V}{\lambda}\sin\omega\,; \qquad \frac{\partial\eta}{\partial t} = -B_0\frac{2\pi V}{\lambda}\sin(\omega+\Theta).$$

Da nun $\sin x = -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, so sind $\frac{\partial\xi}{\partial t}$ und $\frac{\partial\eta}{\partial t}$ bis auf den konstanten Faktor $\frac{2\pi V}{\lambda}$ gleich ξ und η, wenn man in den Ausdrücken für diese letzteren Werthe ω um $\frac{\pi}{2}$ vermehrt. Dies kommt aber, in Folge des Werthes von ω, auf dasselbe hinaus, als ob man t um $\frac{\lambda}{4\mathrm{V}}$ oder um $\frac{\tau}{4}$ wachsen lässt. Demnach sind die Werthe von $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ und $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ zur Zeit t proportional den Werthen von ξ und η zur Zeit $t + \frac{\tau}{4}$, und die lebendige Kraft eines Moleküls zur Zeit t wird der Summe aus den Quadraten der Werthe ξ und η zur Zeit $t + \frac{\tau}{4}$ proportional sein. Wenn man aber t mit $\left(t + \frac{\tau}{4}\right)$ vertauscht, so ändert sich deshalb der Mittelwerth der lebendigen Kraft noch nicht, die letztere wird also dem Mittelwerthe von $\xi^2 + \eta^2$ proportional sein. Wir dürfen somit als Werth für die Lichtintensität eine dem Mittelwerthe von $\xi^2 + \eta^2$ proportionale Grösse wählen.

57. Interferenz des nicht polarisirten Lichtes. — Es sei P ein Punkt des Raumes, zu welchem Licht aus einer in der Entfernung z befindlichen Lichtquelle gelangt; dann haben wir für die Verschiebungskomponenten des in P befindlichen Aethermoleküls (§ 52) zu setzen

$$\xi = \mathrm{A}_0 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda}(z + \mathrm{V}t) + \varphi\right]; \qquad \eta = \mathrm{B}_0 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda}(z + \mathrm{V}t) + \varphi_1\right].$$

Setzt man

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda}(z + \mathrm{V}t) + \varphi; \qquad \Theta = \varphi_1 - \varphi,$$

so werden diese Ausdrücke

$$(1) \qquad \xi = \mathrm{A}_0 \cos \omega; \qquad \eta = \mathrm{B}_0 \cos(\omega + \Theta).$$

Wir nehmen nun an, der Punkt P erhalte gleichzeitig Licht von derselben Wellenlänge, welches entweder aus einer zweiten Lichtquelle stammt, oder auch aus der ursprünglichen, nur möge dasselbe in diesem Falle einen anderen Weg zurückgelegt haben, dessen Länge z' ist; dann erhalten wir für die Verschiebungskomponenten nach denselben Axen

$$(2) \qquad \xi = \mathrm{A}_0' \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda}(z' + \mathrm{V}t) + \varphi'\right]; \qquad \eta = \mathrm{B}_0' \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda}(z' + \mathrm{V}t) + \varphi_1'\right].$$

Wir führen nun eine neue Grösse ψ ein, welche man Gangdifferenz der Lichtstrahlen im Punkte P nennt und welche definirt ist durch die Gleichung

$$\frac{2\pi}{\lambda}(z' - z) = \psi.$$

Setzen wir ferner

$$\psi + \varphi' - \varphi = \varepsilon$$

$$\psi + \varphi_1' - \varphi_1 = \varepsilon_1 ,$$

so erhalten wir für die Gleichungen (2) die Ausdrücke

$$\xi = A_0' \cos(\omega + \varepsilon); \qquad \eta = B_0' \cos(\omega + \Theta + \varepsilon_1).$$

Die Verschiebung des Moleküls P, welche von den beiden Bewegungen herrührt, hat die Komponenten

$$(3) \qquad \xi = A_0 \cos\omega + A_0' \cos(\omega + \varepsilon)$$

$$\eta = B_0 \cos(\omega + \Theta) + B_0' \cos(\omega + \Theta + \varepsilon_1).$$

58. Um die Lichtintensität im Punkte P zu erhalten, suchen wir den Mittelwerth von $\xi^2 + \eta^2$. Nun ist

$$\xi^2 = A_0^2 \cos^2\omega + A_0'^2 \cos^2(\omega + \varepsilon) + 2 A_0 A_0' \cos\omega \cos(\omega + \varepsilon)$$

$$\eta^2 = B_0^2 \cos^2(\omega + \Theta) + B_0'^2 \cos^2(\omega + \Theta + \varepsilon_1) + 2 B_0 B_0' \cos(\omega + \Theta) \cos(\omega + \Theta + \varepsilon_1).$$

Während der Dauer einer Schwingung darf man A_0, φ und φ', somit auch ε als konstant betrachten; dagegen nimmt ω alle Werthe zwischen 0 und 2π an. Wir erhalten also für den Mittelwerth von ξ^2 während der Dauer einer Schwingung eine Grösse, welche dem zwischen den Grenzen 0 und 2π genommenen Integrale über ξ^2 proportional ist. Bezeichnen wir den Mittelwerth einer Grösse dadurch, dass wir die betreffende Grösse in eckige Klammern einschliessen, so finden wir

$$\Big[A_0^2 \cos^2\omega\Big] = \frac{1}{2\pi} A_0^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\omega \, d\omega = \frac{A_0^2}{2}$$

$$\Big[A_0'^2 \cos^2(\omega + \varepsilon)\Big] = \frac{1}{2\pi} A_0'^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\omega + \varepsilon) \, d\omega = \frac{A_0'^2}{2}$$

$$\Big[2 A_0 A_0' \cos\omega \cos(\omega + \varepsilon)\Big] = \frac{1}{2\pi} 2 A_0 A_0' \int_0^{2\pi} \cos\omega \cos(\omega + \varepsilon) \, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} A_0 A_0' \int_0^{2\pi} \Big(\cos(2\omega + \varepsilon) + \cos\varepsilon\Big) d\omega = A_0 A_0' \cos\varepsilon ,$$

somit

$$\left[\xi^2\right] = \frac{A_0^2}{2} + \frac{A_0'^2}{2} + A_0 A_0' \cos \varepsilon .$$

Entsprechend würden wir für den Mittelwerth von η^2 während der Dauer einer Schwingung finden

$$\left[\eta^2\right] = \frac{B_0^2}{2} + \frac{B'^2}{2} + B_0 B_0' \cos \varepsilon_1 .$$

Wir bestimmen nunmehr den Mittelwerth dieser Grössen während der Zeiteinheit einer Sekunde. In diesem Falle müssen die Grössen A_0, A_0', B_0, B_0' als Variabele betrachtet werden, ebenso die Grössen φ und φ', und da diese letzteren während der Zeiteinheit unendlich viele verschiedene Werthe annehmen, so ist dasselbe im Allgemeinen auch für die Grösse ε der Fall. Somit wird $\cos \varepsilon$ alle Werthe zwischen ± 1 annehmen, der Mittelwerth von $\cos \varepsilon$ während der Zeiteinheit wird also Null sein und damit reducirt sich der Mittelwerth von ξ^2 während dieses Intervalles auf $\left[\frac{A_0^2}{2} + \frac{A_0'^2}{2}\right]$; aus dem gleichen Grunde wird der Mittelwerth von η^2 während einer Sekunde $\left[\frac{B_0^2}{2} + \frac{B_0'^2}{2}\right]$ sein. Abgesehen von gewissen Ausnahmefällen wird also die Intensität in P nicht von der Lage dieses Punktes abhängen und sich auf die arithmetische Summe aus den Intensitäten reduciren, welche von jedem der beiden komponirenden Strahlen herrühren.

59. Wir wollen mit φ_0 und φ_0' die Werthe von φ und φ' in der Nähe der Lichtquellen bezeichnen, während im Punkte P die Werthe dieser selben Winkel auch fernerhin φ und φ' sein mögen. Nun sind diese vier Grössen φ, φ', φ_0, φ_0' Funktionen der Zeit, und wir haben

$$\varphi(t) = \varphi_0\left(t - \frac{z}{V}\right); \quad \varphi'(t) = \varphi_0'\left(t - \frac{z'}{V}\right).$$

Wenn die beiden Strahlen nicht aus der gleichen Lichtquelle stammen, so liegt kein Grund dafür vor, dass $\varphi_0 = \varphi_0'$ und $\varphi = \varphi'$ ist; die beiden Winkel φ und φ' werden sich also unabhängig von einander ändern. Daher kann ihre Differenz $\varphi - \varphi'$, und somit auch ε, alle möglichen Werthe annehmen, so dass der Mittelwerth von $\cos \varepsilon$ Null sein wird; daher werden die beiden Strahlen nicht interferiren.

Stammen dagegen beide Strahlen aus derselben Lichtquelle, so hat man

$$\varphi'(t) = \varphi_0\left(t - \frac{z'}{V}\right) = \varphi\left(t + \frac{z - z'}{V}\right).$$

Ist ψ nicht so klein, dass $\frac{z - z'}{V}$ weniger beträgt als etwa den zehnmilliardsten Theil einer Sekunde, so ist kein Grund dafür vorhanden, dass $\varphi' = \varphi$, somit werden aus denselben Gründen wie im vorhergehenden Falle die Strahlen nicht interferiren[1]).

Stammen endlich beide Strahlen aus derselben Lichtquelle und ihre Gangdifferenz ψ ist klein genug, dass $\frac{z - z'}{V}$ unter dem zehnmilliardsten Theile einer Sekunde liegt, so hat man

$$\varphi = \varphi'$$

und somit

$$\varepsilon = \psi + \varphi' - \varphi = \psi.$$

Ebenso können φ_1 und φ_1' als gleich aufgefasst werden, und wir erhalten $\varepsilon_1 = \psi$. Ersetzt man nun in dem Ausdrucke für den Mittelwerth von $\xi^2 + \eta^2$ die Grössen ε und ε_1 durch ihren Werth ψ, so tritt darin der Mittelwerth von

$$A_0\, A_0' \cos \psi + B_0\, B_0' \cos \psi$$

auf. Für den betrachteten Punkt P ist nun zwar die Gangdifferenz ψ eine Konstante, dagegen ändert sich der Werth von ψ, wenn man sich vom Punkte P entfernt; die Lichtintensität wird also im Punkte P nicht dieselbe sein, wie in einem benachbarten Punkte, und somit erhalten wir Interferenzstreifen.

60. Interferenz des polarisirten Lichtes. — Wir wollen nun die beiden Strahlen auf zwei Polarisatoren Π und Π' fallen lassen, deren Polarisationsebenen parallel sein mögen. Wählen wir als YZ-Ebene eine zu den Polarisationsebenen parallele Ebene und nehmen an, dass die Schwingungen senkrecht dazu gerichtet seien, dann werden die η-Komponenten der beiden Lichtstrahlen zerstört, somit wird die Lichtintensität in einem Punkte P, zu dem die Strahlen nach ihrem Durchgange durch die Polarisatoren gelangen, proportional dem Mittelwerthe aus dem Quadrate der Summe der ξ-Komponenten. In Folge dessen wird in diesem Falle unter den

[1]) In den letzten Jahren ist es gelungen, mit wirklich monochromatischem Lichte selbst bei Gangdifferenzen von mehreren hunderttausend Wellenlängen noch deutliche Interferenzen zu erzielen; die vom Verf. oben angenommene Grenze von 50000 Wellenlängen muss demnach wesentlich erweitert werden. — D. Uebers.

gleichen Bedingungen Interferenz auftreten, wie beim natürlichen Lichte.

Weiter wollen wir annehmen, die Polarisatoren Π und Π' seien senkrecht zu einander orientirt, somit gilt dies auch für die Polarisationsebenen der Strahlen, welche die Polarisatoren durchsetzen, und wir können dieselben zur YZ- und XZ-Ebene wählen. Nun wird die Komponente η des ersten Strahls beim Durchgang durch den Polarisator Π zerstört, wir haben somit $B_0 = 0$, ebenso wird die Komponente ξ des zweiten Strahles durch den Polarisator Π' vernichtet, demnach ist $A_0' = 0$. Somit kommt in dem Mittelwerthe des Ausdrucks für die Intensität im Punkte P kein mit $\cos \varepsilon$ behaftetes Glied vor, da die Koefficienten dieser Glieder Null sind, es findet also keine Interferenz statt.

Schliesslich lassen wir nun die beiden Strahlen, welche bereits getrennt die Polarisatoren Π und Π' passirt hatten, noch durch einen dritten Polarisator Π'' gehen. Bei seinem Eintritt in den Polarisator Π'' hat der erste Strahl eine Verschiebung nach der X-Axe

$$\xi = A_0 \cos \omega,$$

der zweite eine solche nach der Y-Axe

$$\eta = B_0' \cos (\omega + \Theta + \varepsilon_1),$$

oder, wenn man annimmt, dass die Gangdifferenz beider Strahlen nur sehr gering ist

$$\eta = B_0' \cos (\omega + \Theta + \psi).$$

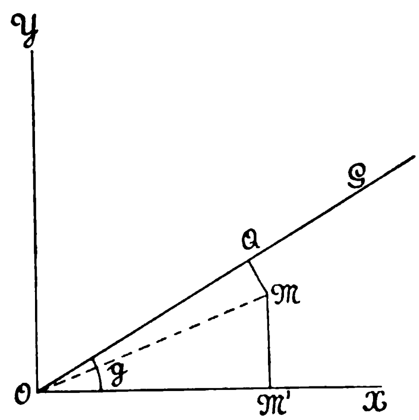

Fig. 3.

Unter dem Einflusse dieser beiden Bewegungen gelangt das in O befindliche Aethermolekül nach dem Punkte M mit den Koordinaten ξ und η (Fig. 3). Nun möge O G die neue Schwingungsrichtung beim Austritte aus dem Polarisator Π'' bezeichnen; dann lässt sich die Schwingung O M in zwei Komponenten zerlegen, deren eine mit O G zusammenfällt, während die darauf senkrechte in Folge des Durchganges durch Π'' vernichtet wird; wir erhalten somit

$$\mathrm{O\,Q} = \mathrm{O\,M'} \cos g + \mathrm{M\,M'} \sin g = \xi \cos g + \eta \sin g.$$

Ersetzt man ξ und η durch ihre Werthe, so erhält man

$$\mathrm{O\,Q} = \mathrm{A_0} \cos g \cos \omega + \mathrm{B_0}' \sin g \cos (\omega + \Theta + \psi).$$

Um nun die Lichtintensität in einem Punkte P zu bestimmen, hat man den Mittelwerth von $\overline{\mathrm{O\,Q}}^2$ für eine sehr grosse Anzahl von Schwingungen zu suchen. Der Mittelwerth dieser Grösse während einer Schwingung ist

$$\frac{1}{2} [\mathrm{A_0}^2 \cos^2 g + \mathrm{B_0}'^2 \sin^2 g + 2\,\mathrm{A_0}\,\mathrm{B_0}' \sin g \cos g \cos (\Theta + \psi)].$$

Wenn nun das Licht vor dem Eintritte in Π und Π' unpolarisirt war, so kann Θ unendlich viele Werthe annehmen, und in dem Mittelwerthe des vorangegangenen Ausdruckes verschwindet das Glied mit $\cos(\Theta + \psi)$, es kommt also keine Interferenz zu Stande.

Ist dagegen das Licht vor seinem Durchgange durch Π und Π' geradlinig polarisirt gewesen, dann ist die Grösse $\Theta = 0$ oder $= \pi$. In diesem Falle wird der Werth des letzten Gliedes, bis auf das Vorzeichen,

$$2\,\mathrm{A_0}\,\mathrm{B_0}' \sin g \cos g \cos \psi,$$

sein Mittelwerth während einer grossen Anzahl von Schwingungen wird also $\cos \psi$ enthalten und die Strahlen werden interferiren.

Kapitel III.

Das Princip von Huyghens.

61. Das Huyghens'sche Princip, auf welchem die Beugungstheorie beruht, war der Gegenstand zahlreicher Einwürfe; um diese zu entkräften und die Richtigkeit dieses wichtigen Princips nach Möglichkeit zu erweisen, werden wir genöthigt sein, uns eingehender mit diesem Gegenstande zu beschäftigen.

Wir wollen zunächst den Gedankengang von Huyghens auseinandersetzen; zu diesem Zwecke nehmen wir an, alle Aethermoleküle seien in Ruhe, und man bringe nur bei denjenigen eine Erschütterung hervor, welche sich innerhalb einer Kugel A (Fig. 4) von sehr kleinem Radius befinden; sodann überlasse man die Moleküle sich selbst. Die den Molekülen in A mitgetheilte Erschütterung wird sich nun in den Aether weiter verbreiten; Huyghens nimmt an, dass eine kugelförmige Welle entsteht, und dass nach Verlauf einer gewissen Zeit t die einzigen Moleküle, welche in Bewegung sind, eine unendlich dünne Schicht auf der Oberfläche einer mit A koncentrischen Kugel S vom Radius Vt einnehmen. Diese Hypothese läuft auf die Annahme hinaus, dass die Fortpflanzung einer isolirten Welle möglich sei, und wenn auch der experimentelle Nachweis dafür niemals gelingen dürfte, so kann man von dieser Abstraction in der Theorie doch Gebrauch machen. In diesem Falle werden nach Verlauf einer Zeit $t + t'$ die einzigen in Bewegung

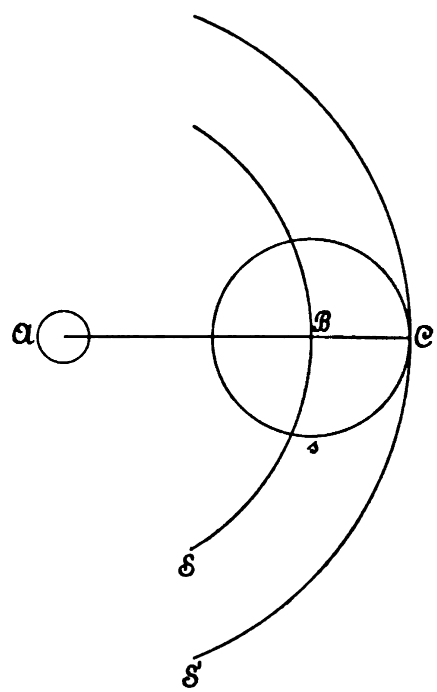

Fig. 4.

befindlichen Moleküle in einer Kugelschicht S' vom Radius V $(t+t')$ liegen, welche mit S koncentrisch ist. Das Princip von Huyghens besteht nun in der Annahme, dass die Aetherbewegung in jedem Punkte dieser Welle S' die Resultante der sämmtlichen Bewegungen ist, welche alle Elemente derselben Welle in ihrer früheren Lage S, einzeln für sich genommen, verursachen würden.

Ist dies Princip richtig, dann kann man daraus schliessen, dass die sämmtlichen in Bewegung befindlichen Moleküle zur Zeit $(t+t')$ innerhalb der Kugelschicht S' liegen. Nun wird die Partialwelle, welche bei der Fortpflanzung derjenigen Erschütterung entsteht, die ein Element B der Kugel S zur Zeit t erlitt, eine Kugel mit dem Mittelpunkte B und dem Radius Vt' sein; diese Kugel wird also die Welle S' berühren. Dasselbe ist für die sämmtlichen Partialwellen der Fall, und man darf daher die Welle S' als Einhüllende der Partialwellen auffassen, welche von den verschiedenen Punkten von S ausgehen. Somit ist es klar, dass jenseits der Welle S' eine Bewegung nicht vorhanden sein kann, dagegen liegt a priori kein Grund dafür vor, dass dies auch innerhalb der Welle S' der Fall sein müsse. Im Gegentheil scheint die Begründung dieser Annahme im ersten Augenblicke schwierig zu sein, denn da die Bewegungen der auf der Erschütterungskugel gelegenen Moleküle in demselben Sinne zu verlaufen scheinen, müssten sie auch Bewegungen in derselben Richtung hervorrufen, die sich nicht gegenseitig vernichten können. Huyghens suchte diese Anomalie durch die Annahme zu erklären, dass bei der unendlich geringen Dicke der Schicht S die Bewegungen, welche von der Erschütterung der verschiedenen Elemente dieser Oberfläche herrühren, unendlich klein sein müssen, und dass sie daher nur auf der Oberfläche S' zu bemerken wären, wo eine grosse Anzahl dieser Bewegungen zusammenwirkt. Diese Erklärung kann jedoch vor einer strengen Analyse nicht bestehen.

62. Fresnel modificirt in seiner Beugungstheorie das Huyghens'sche Princip, indem er nicht mehr eine isolirte Welle betrachtet, sondern vielmehr eine ganze Reihe von Wellen, welche von Schwingungsbewegungen herrühren. Er spricht dies Princip folgendermaassen aus: *Die Schwingungen einer Lichtwelle in jedem ihrer Punkte kann man als die Summe aller einzelnen Elementarbewegungen auffassen, welche alle Theile dieser Welle von einer beliebigen früheren Stellung aus in demselben Augenblicke an diesen Punkt gesendet haben würden.* Hierzu fügt er noch die Anmerkung[1]): „Ich betrachte immer die Aufeinanderfolge einer unendlich grossen Anzahl von Schwingungen oder

[1]) Oeuvres de Fresnel, Bd. *1*, S. 293.

eine allgemeine Schwingung des Fluidum. Denn nur in diesem Sinne kann man davon sprechen, dass zwei Lichtwellen sich vernichten, wenn sie um eine halbe Wellenlänge verschieden sind. Die Formeln für die Interferenz, welche ich aufgestellt habe, lassen sich durchaus nicht auf den Fall anwenden, wo es sich um eine isolirte Schwingung handelt, ein Fall, der übrigens in der Natur auch nicht vorkommt.“ — Wenn man, wie Fresnel, auf diese Weise die aufeinanderfolgenden Wellen in's Auge fasst, wobei die Schwingungen der Moleküle von S bald in der einen, bald in einer anderen Richtung vor sich gehen, ist es erklärlich, warum zur Zeit $(t + t')$ die ausserhalb der Oberfläche S′ befindlichen Moleküle nicht in Bewegung begriffen sind. Immerhin ist diese Erklärung keineswegs über jeden Einwurf erhaben, wie wir im folgenden Paragraphen sehen werden. Ausserdem lässt auch die — in mathematischer Betrachtungsweise immerhin mögliche — Fortpflanzung einer isolirten Welle noch eine Schwierigkeit bestehen, welche beseitigt werden muss.

63. Fresnel's Streit mit Poisson. — Ob man nun eine isolirte Welle betrachten mag oder eine Reihe von aufeinanderfolgenden Wellen, immer wird das Huyghens'sche Princip zu der Annahme nöthigen, dass ausser der Welle S′ noch eine andere Welle S″ entsteht, welche die innere Einhüllende für die Elementarwellen S bildet. Dies ist einer der Einwürfe, welche Poisson in einem an Fresnel gerichteten Briefe[1]) erhebt, aus dem wir folgende Stelle wiedergeben wollen: „Ich möchte Ihnen ausserdem bemerken, dass in der Ueberlegung, die Sie zu der Formel auf Seite 287 Ihrer Abhandlung über die Beugung[2]) geführt hat, kein Grund dafür vorhanden ist, dass der Punkt P (Fig. 5) jenseits der Welle AMF liegen muss, und dass, wenn er diesseits dieser Welle läge, genau dieselbe Ueberlegung Sie zu einer ähnlichen Formel für die ihm ertheilte Geschwindigkeit führen würde; diese Formel enthielte nur für die Entfernung CP an Stelle von $(a + b)$ die Differenz $(a - b)$. Aus Ihren Sätzen würde also folgen, dass die Welle AMF, auch wenn sie voll-

[1]) Oeuvres de Fresnel, Bd. *2*, S. 209.

[2]) Er meint damit die Formel

$$\left[\left[\int dz \cos\left(\pi \frac{z^2 (a+b)}{a b \lambda}\right)\right]^2 + \left[\int dz \sin\left(\pi \frac{z^2 (a+b)}{a b \lambda}\right)\right]^2\right]^{1/2},$$

welche die Verschiebungsgeschwindigkeit im Punkte P darstellt und die Fresnel auf Grund des Huyghens'schen Princips aufstellte (Oeuvres de Fresnel Bd. *1*, S. 316); hierbei bedeutet a die Entfernung CM, b die Entfernung MP.

ständig ist, sowohl diesseits wie jenseits ihrer Oberfläche Bewegung hervorrufen müsste, ein Schluss, der genügen würde zum Beweise dafür, dass in Ihrer Auffassung dieser Frage irgend ein Fehler vorhanden sein muss. Das Entstehen einer neuen Welle diesseits der von Ihnen betrachteten und die Thatsache, dass diese Bewegung sich nicht auch nach rückwärts fortpflanzt, lässt sich nur dadurch erklären, dass ein bestimmtes Verhältniss zwischen den Verdichtungen und den eigenen Geschwindigkeiten der Moleküle in der gegebenen Welle besteht, nicht aber durch Interferenz der Elementarwellen, welche von allen ihren Punkten zu verschiedenen Zeiten ausgegangen sind.“

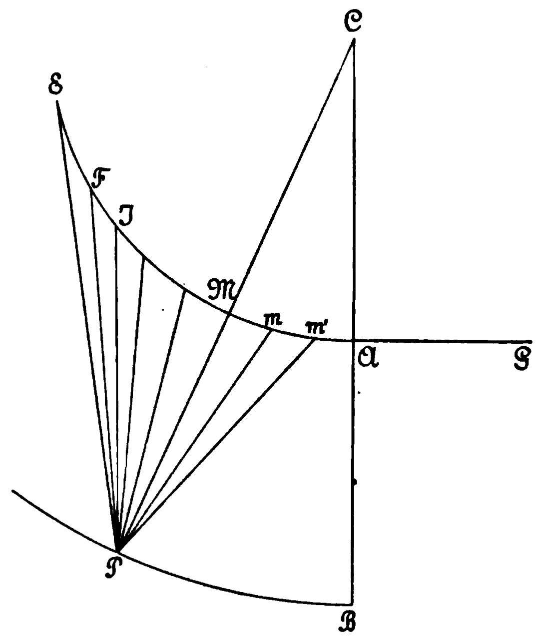

Fig. 5.

64. Nachdem Fresnel in seiner Erwiderung auf diesen Brief zunächst andere Einwürfe von Poisson beantwortet hatte, kommt er schliesslich zur wirklichen Erklärung der Anomalie, welche die Mathematiker so lange aufgehalten hatte. Er sagt, bei der Bewegung eines Moleküls sei zweierlei zu unterscheiden, nämlich die Geschwindigkeit, welche das Molekül besitzt, und seine Verschiebung aus der Gleichgewichtslage; hieraus entständen zwei verschiedene Wellensysteme.

Bevor wir jedoch jene Stelle aus der Fresnel'schen Erwiderung anführen, müssen wir noch einige Bemerkungen über das Kosinusgesetz vorausschicken. Zu der Zeit, als dieser wissenschaftliche Streit stattfand, hatte Fresnel bereits seine grosse Entdeckung gemacht, dass die Lichtschwingungen transversal gerichtet sind, Poisson jedoch und die übrigen Mathematiker jener Zeit wollten dieselbe nicht anerkennen. So richtete denn Fresnel, getrieben von dem Wunsche, die Differenzen zwischen seinen und Poisson's Ansichten zu verringern, und in der Ueberzeugung, dass seine Beugungstheorie sich auf alle Hypothesen anwenden lasse, seine Ausführungen so ein, als hätte man es mit Longitudinalschwingungen zu thun.

In Folge dessen kam er durch eine Beweisführung, die auch aus anderen Gründen keineswegs einwurfsfrei ist, zu der Folgerung, dass die von einem Punkte B der Welle S (Fig. 6) zu einem Punkte D der Welle S′ übertragene Bewegung dem Kosinus des von der Richtung DB und der Wellennormale eingeschlossenen Winkels DBC proportional ist. Dieser Beweis ist in keiner Weise auf die Transversalbewegungen anwendbar.

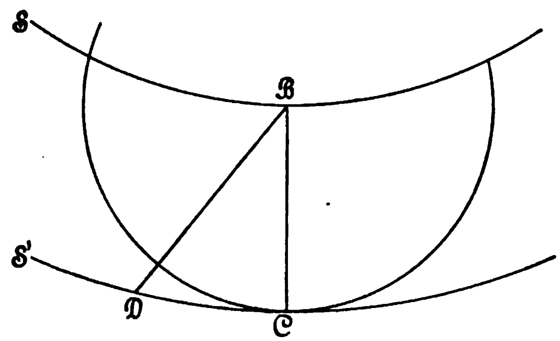

Fig. 6.

Glücklicherweise spielt das Kosinusgesetz in der Fresnel'schen Theorie keine wesentliche Rolle und darf bei diesem Streite nur als etwas Nebensächliches betrachtet werden. Die Einwürfe, zu welchen dies Gesetz Veranlassung gibt, stehen in keiner Beziehung zu Fresnel's Theorie.

65. Die wichtigste Stelle aus dem Briefe von Fresnel lautet[1]): „Sie werden vielleicht gegenüber der Ausführung, die ich soeben für den Fall einer kleinen Erschütterung gegeben habe, den Einwurf erheben, dass diese Erschütterung auch entgegengesetzt gerichtete Strahlen gleicher Intensität hervorrufen würde, selbst wenn die anfängliche Erschütterung von einer sekundären Welle ausginge. Darauf muss ich, wie ich es bereits gethan, antworten, dass dies keineswegs eine Folgerung des Princips ist, auf das ich mich stütze. Ich komme nämlich zu dem Kosinusgesetze, indem ich die beiden

[1]) Oeuvres complètes 2, S. 227.

Wellen getrennt betrachte, deren eine von den Geschwindigkeiten der im Erschütterungscentrum befindlichen Moleküle herrührt, während die andere auf die blossen Verschiebungen der Moleküle zurückzuführen ist. Falls nun diese beiden Wellenzüge auf das Fluidum in derselben Richtung wirken, so verstärken sie sich gegenseitig durch Uebereinanderlagerung, und wenn die Intensitäten an den verschiedenen Oberflächenpunkten bei beiden Wellen das Kosinusgesetz befolgen, so wird dies Gesetz auch bei der Welle Gültigkeit haben, die aus der Vereinigung der beiden Theilwellen entsteht. Haben die Wellen das Bestreben, die Aethermoleküle in entgegengesetzter Richtung zu bewegen, so werden sich die absoluten Geschwindigkeiten gegenseitig vermindern und sogar aufheben können, wenn sie gleiche Grösse besitzen. Dies ist aber der Fall für die rückläufigen Wellen, wenn das Erschütterungscentrum die specielle Beschaffenheit der sekundären Wellen besitzt. Fasst man beispielsweise ein Element einer derartigen Welle in dem Moment in's Auge, wo die Moleküle nach vorwärts getrieben werden, d. h. in der Fortpflanzungsrichtung der sekundären Welle, so ist bekanntlich diese Bewegung von einer Verdichtung, d. h. von einer Annäherung der Moleküle, begleitet. Wären nun die Moleküle nur verschoben, besässen aber in demselben Augenblicke keine Geschwindigkeit, so würde aus ihrer Annäherung eine Expansivkraft entstehen, welche das Fluidum nach rückwärts wie nach vorwärts treiben und so eine rückläufige Welle erzeugen würde, ähnlich derjenigen, welche sie nach vorwärts hervorbringt, nur dass bei beiden die absoluten Geschwindigkeiten das entgegengesetzte Vorzeichen hätten. Befänden sich dagegen die Moleküle in dem Momente, wo man die Erschütterung beobachtet, in ihrer Gleichgewichtslage, und man ertheilte ihnen in diesem Augenblicke nur die Geschwindigkeiten, welche sie vorwärts trieben, so würde auch dann eine rückläufige und eine vorwärts gerichtete Welle entstehen, da die hinteren Moleküle den vorderen folgen würden, und so fort von Schicht zu Schicht. Die nach rückwärts verlaufende Welle würde auch dieselbe Intensität besitzen, wie die nach vorwärts gerichtete, und würde die Moleküle des Fluidum in demselben Sinne verschieben, während die in Folge der einfachen Verdichtung entstandene rückläufige Welle die Moleküle im entgegengesetzten Sinne bewegt. Diese beiden Bewegungen werden sich also bei den rückwärts gerichteten Wellen, welche von der Verdichtung und von den Geschwindigkeiten der Moleküle herrühren, gegenseitig verringern, während sie sich bei den beiden nach vorwärts gerichteten Wellen addiren. Wenn also beide Ursachen gleich grosse Wirkungen erzeugen, wie dies speciell bei den sekundären Wellen der Fall ist, so werden sich die rückläufigen Wellen gegenseitig vernichten und die Schwingungen werden sich nur in der Bewegungsrichtung der sekundären Welle fortpflanzen können."

Dies war thatsächlich die richtige Erklärung für das Huyghens'sche Princip, wie wir im Folgenden noch genauer nachweisen werden.

66. Integration der Gleichungen für die Transversalbewegungen bei Kugelwellen. — Wir wollen wieder auf die Gleichungen für die Transversalbewegungen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = V^2 \Delta \xi; \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = V^2 \Delta \eta; \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = V^2 \Delta \zeta$$

zurückgehen, die wir bereits für den Fall ebener Wellen gelöst hatten (vgl. § 50), und nunmehr die Integrale für den Fall suchen, dass wir es mit kugelförmigen Wellen zu thun haben.

Bei derartigen Wellen müssen die Verschiebungen und die Geschwindigkeiten in einem Punkte M (Fig. 7) dieselben Werthe für alle diejenigen Punkte besitzen, welche sich in der gleichen Entfernung r vom Mittelpunkte der Wellen befinden; demnach werden die Grössen ξ, η, ζ und deren Differentialquotienten nur von r und von der Zeit t abhängen. Wählen wir als Koordinatenanfang das Centrum der Kugelwellen und nennen x, y, z die Koordinaten des Punktes M, dann haben wir

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

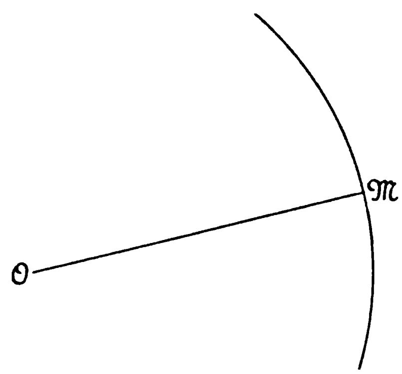

Fig. 7.

Wir wollen nun

$$\xi = \frac{u}{r}$$

setzen, wobei u eine Funktion von r und t sein soll, und zusehen, welche Form diese Funktion haben muss, damit sie den Bewegungsgleichungen genügt.

Die Grösse $\Delta \xi$ ist eine homogene lineare Funktion von u und den ersten beiden Differentialquotienten von u nach r; wir können sie also schreiben

$$\Delta \xi = A u + B \frac{\partial u}{\partial r} + C \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}.$$

67. Den Werth der Koefficienten A, B, C könnten wir nun dadurch bestimmen, dass wir die zweiten Differentialquotienten von ξ nach x, y, z berechneten und dieselben addirten; wir kommen jedoch einfacher zum Ziele, wenn wir specielle Annahmen über die Funktion u machen.

Setzen wir beispielsweise $u = 1$, dann haben wir $\xi = \frac{1}{r}$. Dies ist die Form der Potentialfunktion für die Anziehung zweier Punkte nach dem Newton'schen Gesetze, somit muss $\Delta\xi = 0$ sein, und da sich unser Ausdruck für $\Delta\xi$ in diesem speciellen Fall auf A reducirt, so folgt, dass A Null sein muss.

Wählen wir ferner $u = r$, so erhalten wir $\xi = 1$ und $\Delta\xi = 0$. Andererseits haben wir

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 1; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0;$$

da wir für A bereits den Werth Null gefunden haben, ist somit

$$\Delta\xi = \mathrm{B}\,\frac{\partial u}{\partial r} = 0;$$

es muss also auch der Koefficient $\mathrm{B} = 0$ sein.

Um endlich den Koefficient C zu ermitteln, setzen wir $u = r^3$; dann ist $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 6r$, und wir erhalten

$$\Delta\xi = 6\,\mathrm{C}r.$$

Andererseits ist bei $u = r^3$ der Werth von ξ:

$$\xi = \frac{u}{r} = r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

somit

$$\Delta\xi = 6.$$

Durch Vergleichung der beiden für $\Delta\xi$ gefundenen Werthe folgt

$$\mathrm{C} = \frac{1}{r}\cdot$$

Der Ausdruck für $\Delta\xi$ im allgemeinen Falle wird also

$$\Delta\xi = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot$$

Führen wir diesen Werth in die erste Bewegungsgleichung ein und ersetzen dabei noch $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ durch seinen Werth $\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, so erhalten wir eine Gleichung zur Bestimmung von u, nämlich

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

oder

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}.$$

Durch Integration dieser Gleichung finden wir

$$u = F(r - Vt) + F_1(r + Vt),$$

und somit

$$\xi = \frac{F(r - Vt)}{r} + \frac{F_1(r + Vt)}{r}.$$

68. Da die Funktionen F und F_1 beliebig sind, so können wir eine derselben, z. B. F_1, gleich Null setzen, und erhalten dann den Ausdruck

$$\xi = \frac{F(r - Vt)}{r},$$

welcher den Bewegungsgleichungen genügt. Demnach lässt sich im allgemeinen Falle ξ als eine Verschiebung betrachten, welche aus zwei Bewegungen entsteht, die sich in kugelförmigen Wellen fortpflanzen und von denen die eine mit der Geschwindigkeit V, die andere mit der Geschwindigkeit $-V$ vom Mittelpunkte 0 ausgeht. Der Faktor $\frac{1}{r}$, welcher im Ausdrucke von ξ auftritt, zeigt, dass die Bewegung mit der Entfernung vom Erschütterungscentrum abnimmt.

Die beiden anderen Gleichungen der Transversalbewegungen würden für η und ζ Ausdrücke liefern, welche dem für ξ gefundenen analog sind.

69. Durch die Festsetzung bestimmter Anfangswerthe für die Verschiebungs- und Geschwindigkeitskomponenten wird die Bewegung vollständig bestimmt, und man kann dann die Funktionen F und F_1 finden. Nehmen wir an, dass zur Zeit $t = 0$

$$\xi = \varphi(r); \qquad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \psi(r)$$

sei, so erhalten wir aus dem allgemeinen Ausdrucke für ξ, wenn wir darin $t = 0$ setzen,

$$r\,\varphi(r) = F(r) + F_1(r). \tag{1}$$

Der Differentialquotient von ξ nach der Zeit wird

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -V\frac{F'(r - Vt)}{r} + V\frac{F_1'(r + Vt)}{r};$$

setzt man darin $t=0$, so folgt:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = - \mathrm{V} \frac{\mathrm{F}'(r)}{r} + \mathrm{V} \frac{\mathrm{F}_1'(r)}{r},$$

und somit

$$r \psi(r) = \mathrm{V}\left[\mathrm{F}_1'(r) - \mathrm{F}'(r)\right]. \tag{2}$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) lassen sich die Funktionen F und F_1 bestimmen.

Eine specielle Lösung der Gleichungen für die Transversalbewegung, welche gerade für die Optik von Interesse ist, erhält man, wenn man setzt:

$$\mathrm{F}_1(r) = 0; \qquad \mathrm{F}(r) = e^{i\alpha r}.$$

Dann wird der Werth von ξ

$$\xi = \frac{e^{i\alpha(r - \mathrm{V}t)}}{r}.$$

Der zweite Differentialquotient von ξ nach t wird $-\alpha^2 \mathrm{V}^2 \xi$. Da nun ξ den Bewegungsgleichungen genügen soll, so muss gelten

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathrm{V}^2 \Delta \xi,$$

d. h.

$$-\alpha^2 \mathrm{V}^2 \xi = \mathrm{V}^2 \Delta \xi,$$

oder

$$\Delta \xi + \alpha^2 \xi = 0.$$

70. Allgemeine Integrale der Gleichungen für die Transversalbewegungen. — Wir wollen die erste Gleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathrm{V}^2 \Delta \xi \tag{1}$$

etwas näher in's Auge fassen. Das allgemeine Integral derselben finden wir dadurch, dass wir eine Funktion ξ von x, y, z und t suchen, welche dieser Gleichung genügt, und die sich ausserdem für $t=0$ auf eine willkürliche Funktion von x, y und z reducirt, während ihr Differentialquotient nach der Zeit für $t=0$ eine andere willkürliche Funktion von x, y, z darstellt.

Das allgemeine Integral enthält somit zwei willkürliche Funktionen.

Zunächst wollen wir zusehen, wohin uns die Anwendung des Huyghens'schen Princips führt. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, dass die anfängliche Erschütterung der Moleküle im Punkte

x', y', z' zur Zeit $t = 0$ gleich F (x', y', z') sei. Nach Verlauf einer Zeit t wird dieser Punkt x', y', z' eine Erschütterung $\frac{F}{r}$ nach allen Punkten x, y, z entsandt haben, welche in einer Entfernung $r = Vt$ vom Punkte x', y', z' liegen, während alle Punkte, die sich in einer grösseren oder geringeren Entfernung befinden, keine Erschütterung von ihm aus erleiden.

Somit wird also auch dem Punkte x, y, z nach dem Huyghens'schen Princip zur Zeit t eine Erschütterung $\frac{F}{r}$ von allen den Punkten x', y', z' derjenigen Kugel zugeführt werden, deren Mittelpunkt x, y, z und deren Radius $r = Vt$ ist, während er von keinem anderen Punkte des Raumes aus eine Erschütterung erleidet.

Wir setzen also

$$\xi = \int \frac{F(x', y', z')}{r} \, d\omega \,, \tag{2}$$

wobei das Integral über alle Oberflächenelemente $d\omega$ der Kugel mit dem Mittelpunkte x, y, z und dem Radius $r = Vt$ auszudehnen ist; hierbei bezeichnen x', y', z' die Koordinaten des Elements $d\omega$. Der Werth des Integrals wird offenbar vom Mittelpunkte und dem Radius dieser Kugel abhängen, ξ wird also eine Funktion von x, y, z und t sein. Wir haben somit zum Beweise für die Richtigkeit des Huyghens'schen Princips zu zeigen, dass der Werth (2) der Gleichung (1) genügt.

Zu diesem Zwecke bestimmen wir $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, indem wir x einen Zuwachs dx ertheilen, während y, z und t, somit auch r ihre Werthe beibehalten; dies kommt darauf hinaus, dass wir die Kugel parallel zur X-Axe um die Grösse dx verschieben. Hieraus ergibt sich für x' ein Zuwachs dx, während y', z', $d\omega$ und r ihre Werthe beibehalten. Dann wird der Zuwachs von F (x', y', z') sein: $\frac{\partial F}{\partial x'} dx$, und wir erhalten

$$d\xi = \int \frac{\partial F}{\partial x'} dx \frac{d\omega}{r} \,.$$

Da der Zuwachs von x' für alle Elemente des Integrals dieselbe Grösse hat, kann man dx als Faktor vor das Integral setzen und beide Seiten der Gleichung durch dx dividiren; man findet somit

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \int \frac{\partial F}{\partial x'} \cdot \frac{d\omega}{r} \,.$$

Eine nochmalige Differentiation nach x liefert für den zweiten Differentialquotient den Werth

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \int \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} \cdot \frac{d\omega}{r},$$

und eine analoge Rechnung würde für die zweiten Differentialquotienten von ξ nach y und z ergeben:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \int \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot \frac{d\omega}{r}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \int \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2} \cdot \frac{d\omega}{r}.$$

Durch Summation dieser drei Gleichungen finden wir

$$\Delta \xi = \int \Delta F\ (x', y', z')\ \frac{d\omega}{r}. \tag{3}$$

71. Wir wollen nun den zweiten Differentialquotient des Integrals (2) nach der Zeit bestimmen. Ertheilen wir der Zeit t einen Zuwachs dt, ohne dabei x, y, z zu ändern, so bleibt der Kugelmittelpunkt unverändert, dagegen erfährt der Kugelradius eine Vergrösserung

$$dr = V dt;$$

hierbei geht das Oberflächenelement $d\omega$ in $d\omega'$ über. Man kann nun $d\omega$ aus dem Integral entfernen, wenn man dafür den körperlichen Winkel $d\sigma$ einführt, unter welchem das Oberflächenelement, vom Kugelmittelpunkte aus gesehen, erscheint; es ist nämlich

$$d\omega = r^2 d\sigma$$

oder

$$\frac{d\omega}{r} = r\, d\sigma.$$

Somit wird unser Integral

$$\xi = \int F\ (x', y', z')\ r\, d\sigma, \tag{4}$$

und, da r für alle Elemente des Integrals denselben Werth besitzt, kann man auch schreiben

$$\xi = r \int F\ (x', y', z')\ d\sigma.$$

Wenn nun r einen Zuwachs dr erhält, so ist der Zuwachs $d\xi$, welcher hierbei für ξ eintritt,

$$d\xi = dr\int F\,d\sigma + r\,d\int F\,d\sigma$$

$$= dr\int F\,d\sigma + r\,dr\int \frac{\partial F}{\partial r}\,d\sigma.$$

Bei der Auswerthung des zweiten Integrals bedenken wir, dass der Radius r auf dem Oberflächenintegral $d\omega$ senkrecht steht; somit ist nach dem Green'schen Satze

$$\int \frac{\partial F}{\partial r}\,d\omega = \int \varDelta F\,d\tau,$$

wenn $d\tau$ ein Volumenelement bedeutet, und das Integral auf der rechten Seite über die ganze Kugel erstreckt wird. Führen wir in diese letzte Gleichung den körperlichen Winkel $d\sigma$ ein, welcher $d\omega$ entspricht, so geht sie über in

$$(5)\qquad \int \frac{\partial F}{\partial r}\,d\sigma = \frac{1}{r^2}\int \varDelta F\,d\tau.$$

Wir können somit den oben für $d\xi$ gefundenen Werth folgendermaassen schreiben:

$$d\xi = dr\int F\,d\sigma + \frac{dr}{r}\int \varDelta F\,d\tau,$$

oder, wenn wir beiderseits mit $dr = V\,dt$ dividiren,

$$(6)\qquad \frac{1}{V}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial t} = \int F\,d\sigma + \frac{1}{r}\int \varDelta F\,d\tau.$$

Differentiiren wir diese letzte Gleichung nochmals nach r, so erhalten wir

$$\frac{1}{V^2}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \int \frac{\partial F}{\partial r}\,d\sigma - \frac{1}{r^2}\int \varDelta F\,d\tau + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\int \varDelta F\,d\tau,$$

eine Gleichung, die sich unter Berücksichtigung von (5) reducirt auf

$$(7)\qquad \frac{1}{V^2}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\int \varDelta F\,d\tau.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist, bis auf den Faktor $\frac{1}{r\,dr}$, gleich dem Integral $\int \varDelta F\,d\tau$, das über die Volumenelemente einer Kugelschale zwischen den Radien r und $r + dr$ zu erstrecken ist. Wir fassen nun ein Element in's Auge, welches begrenzt ist von den beiden Kugelflächen und von einem Kegelmantel, dessen Spitze in dem gemeinsamen Mittelpunkte der beiden Kugeln liegt und dessen Basis von dem Element $d\omega$ der ersten Kugelfläche gebildet wird. Das Volumen dieses Elements ist, bis auf Grössen von einer höheren Ordnung als der dritten, gleich $d\omega\, dr$; somit wird das vorhergehende Integral

$$\int \Delta \mathrm{F}\, d\omega\, dr\,,$$

oder

$$dr \int \Delta \mathrm{F}\, d\omega\,,$$

wobei die Integration über alle Elemente der Kugel vom Radius r zu erstrecken ist; wir erhalten also an Stelle der Gleichung (7)

$$\frac{1}{\mathrm{V}^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \int \Delta \mathrm{F}\, d\omega. \tag{8}$$

72. Ersetzen wir in der Bewegungsgleichung (1) $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ durch den Werth, der sich aus der letzten Gleichung ergibt, und $\Delta \xi$ durch den aus (3) folgenden Werth, so wird dieselbe erfüllt. Somit ist

$$\xi = \int \frac{\mathrm{F}(x', y', z')}{r}\, d\omega$$

eine partikuläre Lösung der Bewegungsgleichung; ein allgemeines Integral derselben kann sie noch nicht sein, da sie nur eine einzige willkürliche Funktion enthält.

Wir wollen nun die Anfangswerthe von ξ und $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ suchen. Wenn t sich der Null nähert, so ist dies auch für den Radius der Kugel r der Fall, dann aber nähert sich $\mathrm{F}(x', y', z')$ dem Werthe von $\mathrm{F}(x, y, z)$. Ist nun x', y', z' nur sehr wenig von x, y, z verschieden, so wird der Werth des Integrals

$$\int \mathrm{F}(x', y', z')\, d\sigma$$

dem Werthe von

$$\mathrm{F}(x, y, z) \int d\sigma = 4\,\pi\, \mathrm{F}(x, y, z)$$

sehr nahe kommen. Hieraus folgt, dass der durch den Ausdruck (4) gegebene Werth von ξ nur wenig von

$$r\, 4\, \pi\, \mathrm{F}(x, y, z)$$

abweicht. An der Grenze, für $r = 0$, ist also auch $\xi = 0$; demnach ist auch der Anfangswerth von ξ Null.

Für $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ liefert uns die Gleichung (6)

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = V \int F\, d\sigma + \frac{V}{r} \int \Delta F\, d\tau.$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite kann für ein unendlich kleines r vernachlässigt werden. Da nämlich das Integral auf alle Elemente der Kugel auszudehnen ist, so ist es in diesem Falle unendlich klein von der dritten Ordnung; durch Division mit r bleibt es daher immer noch unendlich klein von der zweiten Ordnung, und somit kann dies Glied gegenüber dem ersten, dessen Grenzwerth $4\pi V F$ ist, unberücksichtigt bleiben. Wir erhalten also

$$(9) \qquad \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_0 = 4\pi V F(x, y, z).$$

Da die Funktion F beliebig ist, so ist auch die anfängliche Geschwindigkeit der Verschiebung willkürlich.

73. Um das allgemeine Integral der Bewegungsgleichung zu finden, müssen wir noch eine zweite partikuläre Lösung suchen, deren Anfangswerth willkürlich ist. Wir wollen nachweisen, dass

$$\xi' = \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

diesen Bedingungen genügt, und zwar haben wir zunächst zu zeigen, dass diese Grösse ξ' ebenfalls eine Lösung der Bewegungsgleichung darstellt.

Es ist nämlich

$$\frac{\partial^2 \xi'}{\partial t^2} = \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial^3 \xi}{\partial t^3} = \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right)$$

und

$$\Delta \xi' = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{V} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{V} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{V} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t}\right) = \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\Delta \xi).$$

Soll also die Bewegungsgleichung befriedigt werden, so muss sein

$$\frac{1}{V} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right) = V^2 \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\Delta \xi)$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right) = V^2 \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\Delta \xi).$$

Dies ist aber thatsächlich der Fall, denn man erhält die soeben aufgestellte Gleichung, wenn man die Gleichung (1), welcher ja ξ identisch genügt, nach t differentiirt.

Um den Anfangswerth von ξ' zu finden, braucht man nur zu untersuchen, was aus Gleichung (6) wird, wenn wir $t=0$ setzen. Nach dem, was wir oben bei der Bestimmung des Anfangswerthes von $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ fanden, ist

$$(\xi')_0 = 4\pi F(x, y, z). \tag{10}$$

Da die Funktion F willkürlich ist, können wir somit für den Anfangswerth der Verschiebung einen beliebigen Werth setzen.

Der Anfangswerth von $\frac{\partial \xi'}{\partial t}$ ergibt sich aus der Gleichung (8); es ist nämlich

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} = \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{V}{r} \int \Delta F \, d\omega;$$

somit ist der Anfangswerth der Geschwindigkeit $\frac{\partial \xi'}{\partial t}$ Null.

74. Die Summe der beiden partikulären Lösungen ξ und ξ', die wir soeben fanden, wird die allgemeinste Lösung der Bewegungsgleichung darstellen. Diese Lösung ist

$$\xi = \int \frac{F(x', y', z')}{r} d\omega + \int F_1(x', y', z') \, d\sigma + \frac{1}{r} \int \Delta F_1 \, d\tau,$$

wenn wir mit F_1 diejenige willkürliche Funktion bezeichnen, welche in der zweiten partikulären Lösung auftritt.

Wir wollen nun den Ausdruck für diese Lösung suchen, wenn für die Verschiebung und Geschwindigkeit bestimmte Anfangswerthe angenommen werden; wir setzen:

$$\xi_0 = \varphi(x, y, z); \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_0 = \psi(x, y, z).$$

Der Anfangswerth des allgemeinen Ausdruckes für ξ reducirt sich auf den Anfangswerth der zweiten partikulären Lösung; somit liefert uns die Gleichung (10)

$$\varphi = 4\pi F_1.$$

Da die Anfangsgeschwindigkeit bei der zweiten partikulären Lösung Null ist, so erhalten wir aus (9)

$$\psi = 4\pi V F.$$

Ersetzt man in dem allgemeinen Ausdrucke für ξ die Funktionen F und F_1 durch ihre aus den beiden letzten Gleichungen abgeleiteten Werthe, so findet man

$$\xi = \int \frac{\psi\, d\omega}{4\pi V r} + \int \frac{\varphi\, d\sigma}{4\pi} + \frac{1}{r} \int \frac{\Delta\varphi\, d\tau}{4\pi}$$

oder

(11)
$$\xi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\omega}{r} \left[\frac{\psi}{V} + \frac{\varphi}{r} + \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right].$$

75. Rechtfertigung des Huyghens'schen Princips. — Der obige Ausdruck zeigt, dass die zur Zeit t eintretende Verschiebung eines Punktes einer Kugel der Radius Vt gleichzeitig von den Werthen der Verschiebung und der Geschwindigkeit abhängt, welche der Kugelmittelpunkt zur Zeit $t = 0$ besass. Hierauf können wir den Nachweis von der Richtigkeit des Huyghens'schen Princips gründen, und zwar sowohl in dem Falle, wo es sich um eine einzelne Welle handelt, als auch dann, wenn eine ganze Reihe periodischer Wellen in Betracht kommen.

Wir nehmen nach dem Vorgange von Huyghens an, dass die Moleküle einer Kugel von unendlich kleinem Radius eine Erschütterung erleiden. Diese Erschütterung wird sich in kugelförmigen Wellen fortpflanzen, und zu einer bestimmten Zeit werden sich die erschütterten Moleküle innerhalb einer Kugelschale S befinden, welche von Kugeloberflächen mit den Radien r_0 und $r_0 + \varepsilon$ begrenzt ist. Die Verschiebung eines Moleküls wird durch die Formel

$$\xi = \frac{F(r - Vt)}{r}$$

gegeben sein, die wir im § 68 bei der Untersuchung der Fortpflanzung sphärischer Wellen fanden. Da eine Bewegung nur innerhalb der Kugelschale vorhanden ist, so muss ξ und somit auch F für jeden Punkt ausserhalb derselben Null sein. Die Funktion F, welche für r_0 und für $r_0 + \varepsilon$ Null ist, weist also für einen bestimmten Werth von r zwischen r_0 und $r_0 + \varepsilon$ ein Maximum oder Minimum auf; demnach hat ihr Differentialquotient nach r nicht für alle Punkte der Schale gleiches Vorzeichen. Nun ist die Geschwindigkeit eines Moleküls gegeben durch

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = -\frac{V}{r} F'(r - Vt),$$

sie muss also für einen Werth von r, welcher zwischen r_0 und $r_0 + \varepsilon$ liegt, ebenfalls ihr Vorzeichen wechseln.

Nach Verlauf der Zeit $t + t'$ wird eine Bewegung nur im Innern einer Kugelschale S' vorhanden sein, welche durch zwei koncentrische Kugelflächen mit den Radien $(r_0 + Vt')$ und $(r_0 + Vt' + \varepsilon)$

begrenzt ist. Wollen wir andrerseits den Werth von ξ zur Zeit $t+t'$ in einem beliebigen Punkte des Raumes haben, so können wir die verschiedenen Moleküle von S als Erschütterungscentren auffassen, und erhalten den Werth von ξ durch die Formel (11) des § 74

$$\xi = \frac{1}{4\pi}\int \frac{d\omega}{r'}\left(\frac{\psi}{V} + \frac{\varphi}{r'} + \frac{\partial \varphi}{\partial r'}\right).$$

Dies Integral ist über sämmtliche Elemente $d\omega$ einer Kugelfläche zu erstrecken, deren Centrum P und deren Radius $r' = Vt'$ ist, oder vielmehr über alle diejenigen Elemente, welche der unendlich dünnen Schicht S angehören; hierbei bezeichnet φ den Werth der Verschiebung des Schwerpunktes von $d\omega$ zur Zeit t und ψ den Werth der Geschwindigkeit desselben Punktes zu derselben Zeit.

Wir haben nun noch zu erklären, wie es kommt, dass der so gefundene Ausdruck ξ immer dann Null ist, wenn der Punkt P nicht der Schicht S′ angehört. Dies ergibt sich daraus, dass die Anfangsgeschwindigkeit ψ, wie wir eben sahen, nicht immer dasselbe Vorzeichen besitzt. Das Integral hat also positive und negative Elemente, und es ist ersichtlich, dass der Werth desselben Null sein kann.

Wir wollen uns mit dem Nachweise begnügen, dass eine thatsächliche Anomalie nicht vorhanden ist; eine ausführliche Rechnung würde den Beweis liefern, dass das Integral in der That für alle Punkte ausserhalb des Raumes S′ Null wird.

Kapitel IV.

Beugung.

76. Gleichungen der Transversalbewegungen bei periodischen Verschiebungen. — Wir wollen annehmen, die Verschiebungskomponenten ξ, η, ζ seien periodische Funktionen der Zeit, dann lässt sich die Komponente ξ in der Form

$$\xi = \mathrm{A} \cos \frac{2\pi \mathrm{V} t}{\lambda} + \mathrm{B} \sin \frac{2\pi \mathrm{V} t}{\lambda}$$

schreiben, wobei A und B nur Funktionen von x, y, z bedeuten. Mit Rücksicht darauf, dass $\cos z$ der reelle Theil der Exponentialfunktion e^{-iz} und $\sin z$ der reelle Theil von $-ie^{-iz}$ ist, kann man ξ als den reellen Theil der Exponentialgrösse

$$(\mathrm{A} - \mathrm{B}i)\, e^{-\frac{2\pi i}{\lambda} \mathrm{V} t}$$

oder

$$\xi_0 e^{-\frac{2\pi i}{\lambda} \mathrm{V} t}$$

auffassen.

Die Bewegungsgleichungen sind linear in Bezug auf die zweiten Differentialquotienten von ξ, η, ζ; wenn daher eine derartige Exponentialfunktion diesen Gleichungen genügt, so werden auch die reellen und imaginären Theile derselben einzeln genommen die Gleichungen befriedigen. Wir können also, wie bereits in § 51 erwähnt, die Lösungen von der Form

$$\xi = \xi_0 e^{-\frac{2\pi i}{\lambda} \mathrm{V} t}$$

bestimmen und sodann den reellen Theil derselben als Werth für die Verschiebungskomponente betrachten.

Der Einfachheit halber setzen wir

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \alpha,$$

und schreiben somit

$$\xi = \xi_0 e^{-i\alpha V t}.$$

Der zweite Differentialquotient von ξ nach t ist dann

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\alpha^2 V^2 \xi_0 e^{-i\alpha V t},$$

denn ξ_0 hängt nicht von t ab, da A und B von t unabhängig sind. Der zweite Differentialquotient von ξ nach x wird

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial x^2} e^{-i\alpha V t},$$

somit ist

$$\Delta \xi = \Delta \xi_0 e^{-i\alpha V t}.$$

Soll die erste Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = V^2 \Delta \xi$$

erfüllt sein, so muss die Gleichung bestehen:

$$-\alpha^2 V^2 \xi_0 e^{-i\alpha V t} = V^2 \Delta \xi_0 e^{-i\alpha V t}$$

oder

(1) $$\Delta \xi_0 + \alpha^2 \xi_0 = 0.$$

Die beiden anderen Bewegungsgleichungen liefern uns zwei neue Bedingungsgleichungen

(2) $$\Delta \eta_0 + \alpha^2 \eta_0 = 0$$

(3) $$\Delta \zeta_0 + \alpha^2 \zeta_0 = 0$$

Da ausserdem die Bewegungen transversal sind, so muss gelten:

$$\Theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0;$$

da aber

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi_0}{\partial x} e^{-i\alpha V t}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \eta_0}{\partial y} e^{-i\alpha V t}; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial z} e^{-i\alpha V t},$$

so geht diese Gleichung über in

(4) $$\frac{\partial \xi_0}{\partial x} + \frac{\partial \eta_0}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial z} = 0.$$

Dies sind die vier Bedingungsgleichungen, welchen die Grössen ξ_0, η_0, ζ_0 genügen müssen, falls die ξ, η, ζ die Gleichungen für die Transversalbewegungen erfüllen sollen.

77. Integration der ersten Bedingungsgleichung. — Für den Fall kugelförmiger Wellen fanden wir (§ 69) als partikuläre Lösung der Gleichung

$$\Delta\xi + \alpha^2\xi = 0$$

den Ausdruck

$$\xi = \frac{e^{i\alpha(r - Vt)}}{r}.$$

Demnach wird

$$\xi_0 = \frac{1}{r}\, e^{i\alpha r}$$

eine partikuläre Lösung für die Bedingungsgleichung (1) sein, wobei r die Entfernung des Punktes x, y, z vom Koordinatenanfang darstellt. Diese Grösse wird aber immer noch eine Lösung der betreffenden Gleichung bilden, wenn r den Abstand des Punktes x, y, z von einem beliebigen festen Punkte bezeichnet, denn die Differentialgleichung behält dieselbe Form bei, wenn man den festen Punkt zum Koordinatenanfang wählt.

Es mögen nun P_1, P_2, $P_3 \ldots . P_n$ eine Anzahl fester Punkte sein, deren Entfernungen vom Punkte M mit den Koordinaten x, y, z durch r_1, r_2, $r_3 \ldots . r_n$ bezeichnet sein sollen; dann wird auch die Summe

$$\xi_0 = m_1 \frac{e^{i\alpha r_1}}{r_1} + m_2 \frac{e^{i\alpha r_2}}{r_2} + m_3 \frac{e^{i\alpha r_3}}{r_3} + \ldots m_n \frac{e^{i\alpha r_n}}{r_n}$$

der Gleichung (1) genügen. Würde man $\alpha = 0$ setzen, so erhielte man eine Summe von Gliedern von der Form $\frac{m_1}{r_1}$, d. h., ξ_0 wäre dann das Potential im Punkte M, der von den Punkten P_1, $P_2 \ldots P_n$ mit den Massen m_1, $m_2 \ldots m_n$ nach dem Newton'schen Gesetze angezogen würde. Diese Analogie wird uns leicht noch mehrere partikuläre Lösungen der Gleichung (1) finden lassen.

Betrachten wir nämlich eine irgendwie im Raume vertheilte anziehende Materie, deren Anziehung jedoch, statt nach dem Newton'schen Gesetze, nach der Funktion

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{i\alpha r}}{r}\right)$$

vor sich gehen soll, wobei r den Abstand des angezogenen vom anziehenden Punkte bedeutet, so erkennt man nach dem oben Ausgeführten, dass das Potential einer derartigen Anziehung der Gleichung (1) genügen muss.

78. In der Potentialtheorie betrachtet man nicht nur die Anziehung von getrennten Punkten, sondern auch diejenige von Körpern und Oberflächen.

Nehmen wir an, die Punkte P_1, $P_2 \dots P_n$ bildeten ein Volumen, so erhalten wir für ξ_0 den Ausdruck

$$\xi_0 = \int \frac{e^{i\alpha r} X \, d\tau}{r}. \tag{5}$$

Hierbei ist das Integral über alle Elemente $d\tau$ des anziehenden Volumens zu erstrecken; X ist eine beliebige Funktion der Koordinaten des Elements $d\tau$ und bedeutet die Dichte der anziehenden Materie.

Dass ξ_0 für jeden ausserhalb des anziehenden Volumens gelegenen Punkt der Gleichung (1) genügen wird, ist klar; die Analogie mit der gewöhnlichen Potentialtheorie genügt jedoch zum Hinweise darauf, dass dies nicht mehr bei einem Punkte der Fall sein wird, welcher zum anziehenden Volumen selbst gehört. Wir wollen zeigen, dass für einen Punkt P dieses Volumens gilt

$$\Delta\xi_0 + \alpha^2\xi_0 + 4\pi X = 0, \tag{6}$$

wobei X den Werth für die Dichte der anziehenden Materie im Punkte P bedeutet. Man erkennt sofort, dass man für $\alpha = 0$ die Poisson'sche Gleichung erhält.

Zum Beweise für die Richtigkeit der Gleichung (6) denken wir uns um den Punkt P als Mittelpunkt eine sehr kleine Kugel s beschrieben und zerlegen somit das anziehende Volumen in zwei Theilvolumina, nämlich die Kugel s und das ausserhalb dieser Kugel gelegene Volumen T. Ferner setzen wir

$$\xi_0 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3,$$

wo

$$\xi_1 = \int X \frac{e^{i\alpha r}}{r} d\tau \quad \text{(das Integral auszudehnen über das Volumen T)}$$

$$\xi_2 = \int \frac{X}{r} d\tau \quad \text{(das Integral auszudehnen über } s\text{)}$$

$$\xi_3 = \int X \left(\frac{e^{i\alpha r} - 1}{r}\right) d\tau \quad \text{(das Integral auszudehnen über } s\text{).}$$

Da der Punkt P ausserhalb des Volumens T liegt, so hat man

$$\Delta\xi_1 + \alpha^2\xi_1 = 0.$$

Ausserdem liefert uns die Gleichung von Poisson

$$\Delta\xi_2 + 4\pi X = 0.$$

Da nun aber der Radius der Kugel s unendlich klein ist, so hat man bis auf unendlich kleine Grössen

$$\xi_2 = \xi_3 = 0; \qquad \xi_1 = \xi_0.$$

Andererseits zeigt uns die Betrachtung des Integrals, welches die Funktion ξ_3 definirt, dass die unter dem Integralzeichen stehende Funktion für $r = 0$ nicht unendlich wird; wir können daraus schliessen, dass $\Delta\xi_3$ von derselben Grössenordnung sein wird, wie die Kugel s; es ist also

$$\Delta\xi_3 = 0; \qquad \Delta\xi_0 = \Delta\xi_1 + \Delta\xi_2,$$

folglich

$$\Delta\xi_0 + \alpha^2\xi_0 + 4\pi X = 0.$$

79. Wir fassen nun eine anziehende Fläche in's Auge. Das Potential der Anziehung dieser Fläche wird dargestellt durch

$$\xi_0 = \int X \frac{e^{i\alpha r}}{r}\, d\omega, \tag{7}$$

wobei das Integral über alle Elemente $d\omega$ der anziehenden Fläche auszudehnen ist; X bedeutet irgend eine Funktion der Koordinaten des Elements $d\omega$, und r die Entfernung dieses Elements vom angezogenen Punkte x, y, z.

Auch werden wir hier eine vollständige Analogie mit der Newton'schen Potentialtheorie finden; setzen wir nämlich

$$\xi_0 = \xi_1 + \xi_2;$$

$$\xi_1 = \int \frac{X}{r}\, d\omega; \qquad \xi_2 = \int X \frac{e^{i\alpha r} - 1}{r}\, d\omega,$$

so ist das erste Integral ein gewöhnliches Potential, das zweite hat die Eigenschaft, dass die Funktion unter dem Integralzeichen niemals unendlich wird; diese ist also, ebenso wie ihre sämmtlichen Differentialquotienten, eine stetige Funktion.

Nach der Theorie des Newton'schen Potentials ist auch ξ_1 eine stetige Funktion, somit gilt dies ebenfalls für ξ_0, nicht aber für seine Differentialquotienten.

Es sind nämlich $\frac{\partial\xi_0}{\partial x}$, $\frac{\partial\xi_0}{\partial y}$, $\frac{\partial\xi_0}{\partial z}$ die Komponenten der Anziehung nach den drei Koordinatenaxen; weiter bezeichnen wir, wie gebräuchlich, mit $\frac{\partial \xi_0}{\partial n}$ die Projektion der anziehenden Kraft auf die zum Element $d\omega$ gehörige Normale; somit wird

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial n} = l \frac{\partial \xi_0}{\partial x} + m \frac{\partial \xi_0}{\partial y} + n \frac{\partial \xi_0}{\partial z},$$

wobei unter l, m, n die Richtungscosinus dieser Normale zu verstehen sind.

Nun wissen wir aber, dass $\frac{\partial \xi_1}{\partial n}$ eine diskontinuirliche Funktion ist, denn für zwei unendlich nahe Punkte diesseits und jenseits des Elements $d\omega$ unterscheiden sich die Werthe dieser Funktion um $4\pi X$. Somit wird, wenngleich $\frac{\partial \xi_2}{\partial n}$ stetig ist, $\frac{\partial \xi_0}{\partial n} = \frac{\partial \xi_1}{\partial n} + \frac{\partial \xi_2}{\partial n}$ unstetig sein und einen plötzlichen Sprung von $4\pi X$ erleiden, wenn man durch die anziehende Fläche hindurchgeht.

80. Es bleibt uns noch übrig, auf den soeben betrachteten Fall die Theorie von der anziehenden Doppelschicht anzuwenden, welche beim Newton'schen Potential eine so grosse Rolle spielt.

Wir betrachten zwei unendlich nahe Flächen, welche so angeordnet sind, dass ihre Normalen zusammenfallen und dass ihre Entfernung von einander in Richtung der gemeinschaftlichen Normalen immer dieselbe bleibt. Auf diesen beiden Oberflächen möge nun anziehende Materie ausgebreitet sein, und zwar derart, dass die Dichte derselben auf zwei entsprechenden Elementen der beiden Flächen immer die gleiche Grösse, aber das entgegengesetzte Vorzeichen besitzt.

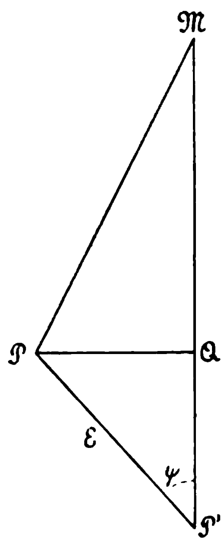

Fig. 8.

Das Potential der Anziehung einer derartigen Doppelschicht wird uns neue partikuläre Lösungen der Gleichung (1) liefern.

Bezeichnen wir mit ε den Abstand der beiden Schichten, mit X_1 und $-X_1$ die Dichten in den Schwerpunkten P und P′ (Fig. 8) zweier entsprechenden Elemente $d\omega$, und setzen

$$F(r) = \frac{e^{i\alpha r}}{r},$$

dann erhalten wir für das Potential der Anziehung dieser beiden Elemente auf einen ausserhalb der Schichten gelegenen Punkt M, dessen Entfernung von einem dieser Oberflächenelemente r sein möge

(8) $$X_1\, d\omega\, F(r) - X_1\, d\omega\, F(r + dr) = - X_1\, d\omega\, dr\, F'(r).$$

Um den Werth von dr zu finden, fällen wir vom Schwerpunkte P des einen Elements eine Senkrechte PQ auf die Gerade MP'; dann wird, bis auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung, P' Q $= dr$ sein, somit ist

$$dr = \varepsilon \cos \psi,$$

wenn wir mit ψ den Winkel zwischen der Geraden MP' und der gemeinschaftlichen Normalen PP' bezeichnen. Durch Einführung dieses Werthes in (8) erhalten wir für das gesammte Potential

(9) $$\xi_0 = - \int X_1\, \varepsilon\, d\omega \cos \psi\, F'(r).$$

Da nun die Funktion X beliebig ist, so können wir, unbeschadet der Allgemeinheit der partikulären Lösung (9), an Stelle von $-\varepsilon X_1$ eine einzige Funktion von x, y, z setzen, etwa X_2. In Folge der Bedeutung von $F(r)$ ist ferner

$$F'(r) = \frac{e^{i\alpha r}}{r}\left(i\alpha - \frac{1}{r}\right);$$

somit lässt sich der Ausdruck (9) für ξ_0 schreiben

(10) $$\xi_0 = \int X_2 \frac{e^{i\alpha r}}{r}\left(i\alpha - \frac{1}{r}\right) \cos \psi\, d\omega.$$

Weiter setzen wir

$$\xi_0 = \xi_1 + \xi_2,$$

$$\xi_1 = - \int \frac{X_2 \cos \psi}{r^2}\, d\omega,$$

$$\xi_2 = \int X_2 \cos \psi \left[\frac{i\alpha\, e^{i\alpha r}}{r} - \frac{e^{i\alpha r}}{r^2} + \frac{1}{r^2}\right] d\omega.$$

Offenbar stellt ξ_1 das Newton'sche Potential einer Doppelschicht dar. Das zweite Integral ξ_2 ist, da die Funktion unter dem Integralzeichen nicht unendlich wird, stetig, ebenso alle seine Differentialquotienten.

Die Theorie des Newton'schen Potentials lehrt nun, dass $\frac{\partial \xi_1}{\partial n}$ stetig ist, nicht aber ξ_1; somit wird auch $\frac{\partial \xi_0}{\partial n}$ stetig sein, während ξ_0 eine unstetige Funktion ist, welche beim Durchgange durch die anziehende Schicht einen plötzlichen Sprung von der Grösse $4\pi X_2$ erleidet.

81. Die Kombination der Integrale (7) und (10) liefert uns die allgemeinste Lösung der Gleichung (1).

Bedeuten nämlich X_1 und X_2 zwei beliebige Funktionen der Koordinaten eines beliebigen Oberflächenelements $d\omega$, r die Länge der Verbindungslinie zwischen dem Element $d\omega$ und dem Punkte x, y, z, und ψ den Winkel zwischen dieser Geraden und der Normalen des Elements $d\omega$, so wird der Ausdruck

$$(11) \qquad \xi_0 = \int X_1 \frac{e^{i\alpha r}}{r} d\omega + \int X_2 \cos\psi \frac{e^{i\alpha r}}{r}\left(i a - \frac{1}{r}\right) d\omega$$

der Gleichung (1) genügen. Es ist nun noch der Nachweis zu führen, dass derselbe dem allgemeinen Integrale entspricht.

Wir bezeichnen mit U eine Funktion, welche ebenso wie ihre sämmtlichen Differentialquotienten endlich und stetig ist, und ausserhalb einer gewissen Fläche S der Gleichung (1) genügt.

Ferner möge V das Potential eines bestimmten anziehenden Volumens bedeuten, von dem sich ein Theil ausserhalb der Fläche S befinden kann. Dann gilt für einen Punkt ausserhalb des anziehenden Volumens

$$(12) \qquad \Delta V + \alpha^2 V = 0,$$

und für einen zu diesem Volumen gehörigen Punkt

$$(13) \qquad \Delta V + \alpha^2 V + 4\pi\varrho = 0,$$

wenn ϱ die Dichte der anziehenden Materie bezeichnet.

Nun liefert uns der Green'sche Satz die Beziehung

$$(14) \qquad \int \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}\right) d\omega = \int (U \Delta V - V \Delta U)\, d\tau;$$

hierbei ist das erste Integral auf alle Elemente $d\omega$ der Oberfläche S zu erstrecken, das zweite auf alle Volumenelemente $d\tau$ des Raumes ausserhalb dieser Oberfläche. Bei der Bestimmung der Differentialquotienten $\frac{\partial U}{\partial n}$ und $\frac{\partial V}{\partial n}$ hat man sich die Normale des Elements $d\omega$ als gegen das Innere der Oberfläche S gerichtet zu denken.

Da nun U der Gleichung (1) und V den Gleichungen (12) und (13) genügt, so reducirt sich das Integral auf der rechten Seite von (14) auf

$$-4\pi \int U \varrho \, d\tau;$$

hierbei ist die Integration auf das anziehende Volumen zu erstrecken, von welchem das Potential V herrührt, oder vielmehr auf denjenigen Theil dieses Volumens, der ausserhalb S liegt.

Wir wollen nun annehmen, dass das anziehende Volumen, von welchem V herrührt, sich auf eine Kugel mit sehr kleinem Radius reducirt, welche um den Punkt x_0, y_0, z_0 beschrieben ist, und dass die Dichtigkeit ϱ so gross sei, dass die gesammte anziehende Masse $= 1$ wird. Bezeichnet man dann den Abstand eines zu S gehörigen Elements $d\omega$ vom Punkte x_0, y_0, z_0 mit r_0, dann ist der Werth von V im Schwerpunkte dieses Elements

$$\frac{e^{i\alpha r_0}}{r_0},$$

und derjenige von $\frac{\partial V}{\partial n}$

$$+\cos\psi \frac{e^{i\alpha r_0}}{r_0}\left(i\alpha - \frac{1}{r_0}\right);$$

hierbei bedeutet ψ immer den Winkel zwischen der nach Aussen gerichteten Normale des Elements $d\omega$ mit der Geraden, welche dieses Element mit dem Punkte x_0, y_0, z_0 verbindet.

Das Integral $\int U \varrho \, d\tau$ wird sich auf U_0 reduciren (wobei U_0 den Werth von U im Punkte x_0, y_0, z_0 darstellt), wenn der Punkt ausserhalb S liegt; im entgegengesetzten Falle ist das Integral Null, denn dasselbe erstreckt sich nur auf den ausserhalb von S liegenden Theil des Volumens; wenn aber der Punkt x_0, y_0, z_0 innerhalb von S liegt, so liegt auch das gesammte anziehende Volumen innerhalb von S. Wir haben somit

$$-4\pi U_0 = \int \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}\right) d\omega.$$

Lassen wir nun die Indices weg und nennen x, y, z den Punkt, den wir bisher mit x_0, y_0, z_0 bezeichnet hatten, r seine Entfernung vom Element $d\omega$ und U den Werth der Funktion U in diesem Punkte, dann erhalten wir

$$(15) \qquad U = -\int \frac{U}{4\pi} \cdot \frac{e^{i\alpha r}}{r}\left(i\alpha - \frac{1}{r}\right) \cos\psi \, d\omega + \int \frac{\partial U}{\partial n} \cdot \frac{e^{i\alpha r}}{4\pi r} d\omega.$$

Wir sehen also, dass die beliebige Funktion U, welche nur der Gleichung (1) zu genügen hat, in den Ausdruck (11) übergeht, wenn man für die willkürliche Funktion X_1 den Werth $\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial U}{\partial n}$ auf dem Element $d\omega$ und für die willkürliche Funktion X_2 den Werth $-\frac{U}{4\pi}$ auf demselben Elemente wählt.

82. Die Gleichung (15) ist richtig, wenn der Punkt x, y, z ausserhalb von S liegt, anderenfalls reducirt sich die rechte Seite dieser Gleichung (15) auf Null, denn, wie wir eben sahen, wird das Integral $\int U \varrho \, d\tau$ Null, wenn der Punkt x_0, y_0, z_0 innerhalb S liegt.

Wenn im Ausdruck (11) die willkürlichen Funktionen X_1 und X_2 beliebig sind, so wird derselbe ausserhalb von S immer eine Funktion U darstellen, welche der Gleichung (1) genügt; es wird jedoch im Allgemeinen U sich nicht auf $-4\pi X_2$ und $\frac{\partial U}{\partial n}$ auf $4\pi X_1$ reduciren, wenn der Punkt x, y, z einem Elemente $d\omega$ von S unendlich nahe kommt. Soll dies der Fall sein, dann muss, wie wir sahen, der Ausdruck (11) immer Null sein, wenn der Punkt x, y, z innerhalb von S liegt.

Diese Bedingung ist hinreichend. Wenn sie nämlich für einen unendlich nahe an S, aber innerhalb dieser Oberfläche gelegenen Punkt erfüllt ist, dann werden die Werthe von (11) ebenso wie ihre Differentialquotienten Null sein. Fassen wir nun einen diesem ersten unendlich nahe liegenden Punkt in's Auge, der sich aber ausserhalb von S befinden möge, so müssen nach dem, was wir früher über die Unstetigkeit des Potentials einer einfachen oder einer Doppelschicht sagten, die Werthe von U und von $\frac{\partial U}{\partial n}$ in diesen beiden benachbarten Punkten um die Grössen $4\pi X_1$ resp. $-4\pi X_2$ von einander verschieden sein. Nun gilt aber für den ersten Punkt

$$U = \frac{\partial U}{\partial n} = 0,$$

somit erhalten wir für den zweiten Punkt

$$U = -4\pi X_2; \quad \frac{\partial U}{\partial n} = 4\pi X_1.$$

83. Gleichungen für die Beugungserscheinungen. — Es möge O eine Lichtquelle bedeuten, die wir uns auf einen Punkt reducirt denken, dessen Verschiebungen periodische Funktionen der Zeit sind. Dieser Punkt wird zum Centrum einer Reihe von Kugelwellen werden, von denen jeder Punkt eine periodische Bewegung besitzt. Die Verschiebungskomponenten eines dieser Punkte sind gegeben durch die reellen Theile von Ausdrücken der Form:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\xi &= \xi_1\, e^{-i\alpha Vt} \\
\eta &= \eta_1\, e^{-i\alpha Vt} \\
\zeta &= \zeta_1\, e^{-i\alpha Vt},
\end{aligned}
$$

wobei ξ_1, η_1, ζ_1 den Differentialgleichungen genügen:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
\Delta\xi_1 + \alpha^2\,\xi_1 &= 0 \\
\Delta\eta_1 + \alpha^2\,\eta_1 &= 0 \\
\Delta\zeta_1 + \alpha^2\,\zeta_1 &= 0
\end{aligned}
$$

$$\Theta_1 = \frac{\partial\xi_1}{\partial x} + \frac{\partial\eta_1}{\partial y} + \frac{\partial\zeta_1}{\partial z} = 0.$$

Aus der Thatsache, dass wir es mit Kugelwellen zu thun haben, folgt zwar nicht, dass ξ_1, η_1, ζ_1 Funktionen von r allein sind — denn dies würde sich nicht mit der Bedingung vereinigen lassen, dass die Schwingungen transversal sind —, wohl aber, dass sich diese Grössen viel langsamer ändern, wenn man sich längs der Oberfläche einer Kugel S mit dem Mittelpunkte O bewegt, als wenn man in einer dazu senkrechten Richtung fortschreitet. Wir können somit setzen:

$$\xi_1 = \xi_2 e^{i\alpha r}; \qquad \eta_1 = \eta_2 e^{i\alpha r}; \qquad \zeta_1 = \zeta_2 e^{i\alpha r},$$

wobei ξ_2, η_2, ζ_2 sich viel langsamer ändern, als der Faktor $e^{i\alpha r}$. Der Differentialquotient von $e^{i\alpha r}$ ist nämlich $i\alpha e^{i\alpha r}$, und da $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$ sehr gross ist, so wird auch der Differentialquotient selbst sehr gross sein. Im Gegensatze dazu nehmen wir an, dass die Differentialquotienten von ξ_2, η_2, ζ_2 endliche Grössen sind.

Wenn wir mit l, m, n die Richtungskosinus der Normalen zur Kugel S bezeichnen, so ist

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial n} = l\,\frac{\partial\xi_1}{\partial x} + m\,\frac{\partial\xi_1}{\partial y} + n\,\frac{\partial\xi_1}{\partial z},$$

und ferner

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial n} = \frac{\partial\xi_1}{\partial r} = i\alpha\,\xi_2 e^{i\alpha r} + \frac{\partial\xi_2}{\partial r}\, e^{i\alpha r}.$$

Das zweite Glied ist verhältnissmässig gering gegenüber dem ersten Gliede, welches α enthält und daher sehr gross ist; wir können somit als angenäherten Werth setzen

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial n} = i\alpha\xi_1,$$

und entsprechend

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial n} = i\alpha\eta_1; \qquad \frac{\partial \zeta_1}{\partial n} = i\alpha\zeta_1.$$

Wir nehmen nun an, ein Theil der Kugeloberfläche S, in deren Mittelpunkt der leuchtende Punkt sich befindet, sei von einem Schirme bedeckt; dann wird die Intensität des Lichtes an einem Punkte innerhalb der Kugel sehr nahezu die gleiche sein, als wenn der Schirm nicht vorhanden wäre; dasselbe wird für die Punkte der Kugel ausserhalb des Schirmes gelten. Für die Punkte des Schirmes selbst muss dagegen die Intensität nahezu Null sein.

84. Wir wollen nun die Bedingungen aufstellen, welche zu erfüllen sind.

Ausserhalb der Kugel werden die drei Verschiebungskomponenten durch die reellen Theile der Exponentialgrössen

$$\xi_0 e^{-i\alpha Vt}; \quad \eta_0 e^{-i\alpha Vt}; \quad \zeta_0 e^{-i\alpha Vt}$$

gegeben sein, wobei die Funktionen ξ_0, η_0, ζ_0 folgenden vier Bedingungen genügen müssen.

A. Ausserhalb von S muss sein

$$\Delta\xi_0 + \alpha^2\xi_0 = \Delta\eta_0 + \alpha^2\eta_0 = \Delta\zeta_0 + \alpha^2\zeta_0 = 0.$$

B. An allen Punkten von S, welche dem Schirm nicht angehören, muss nahezu gelten

$$\xi_0 = \xi_1 \qquad \frac{\partial \xi_0}{\partial n} = \frac{\partial \xi_1}{\partial n} = i\alpha\xi_1$$

$$\eta_0 = \eta_1 \qquad \frac{\partial \eta_0}{\partial n} = \frac{\partial \eta_1}{\partial n} = i\alpha\eta_1$$

$$\zeta_0 = \zeta_1 \qquad \frac{d\zeta_0}{\partial n} = \frac{\partial \zeta_1}{\partial n} = i\alpha\zeta_1.$$

C. An allen Punkten des Schirmes muss nahezu sein

$$\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = \frac{\partial \xi_0}{\partial n} = \frac{\partial \eta_0}{\partial n} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial n} = 0.$$

D. Die Bedingung für die transversale Richtung der Schwingungen

$$\Theta_0 = \frac{\partial \xi_0}{\partial x} + \frac{\partial \eta_0}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial z} = 0$$

muss erfüllt sein.

Den Bedingungen B und C streng zu genügen, ist unmöglich; dieselben sind nur sehr annähernd zu erfüllen, d. h. ungefähr bis auf Grössen von der Ordnung der Wellenlänge λ.

Nun sahen wir bereits früher: Wenn eine Funktion ξ_0 der Gleichung $\Delta\xi_0 + \alpha^2\xi_0 = 0$ ausserhalb einer Oberfläche S genügt, wenn sie sich ferner an den verschiedenen Punkten der Oberfläche auf $-4\pi X_2$ reducirt, während $\frac{\partial \xi_0}{\partial n}$ den Werth $4\pi X_1$ erhält, so ist ausserhalb von S

$$(3) \qquad \xi_0 = \int X_2 \frac{e^{i\alpha r}}{r}\left(i\alpha - \frac{1}{r}\right)\cos\psi\, d\omega + \int X_1 \frac{e^{i\alpha r}}{r}\, d\omega,$$

während im Inneren von S die rechte Seite von (3) Null wird.

In unserem Falle ist die betreffende Oberfläche S eine Kugel mit dem Mittelpunkte O; ξ_0 und $\frac{\partial \xi_0}{\partial n}$ sind sehr nahe gleich Null für die Punkte des Schirmes; für die Punkte ausserhalb des Schirmes ist ξ_0 ungefähr gleich ξ_1 und $\frac{\partial \xi_0}{\partial n}$ ungefähr gleich $i\alpha\xi_1$, wenn man annimmt, dass die Normale zu S nach Aussen gerichtet ist, dagegen gleich $-i\alpha\xi_1$, wenn man die Normale nach Innen gerichtet annimmt, wie man es bei der Anwendung der Formel (15) in § 81 zu thun hat.

Setzen wir also

$$X_1 = i\alpha X_2 = 0$$

für die Punkte des Schirmes von S, und

$$X_1 = i\alpha X_2 = -\frac{i\alpha\xi_1}{4\pi}$$

für die Punkte ausserhalb des Schirmes, so wird sich die rechte Seite von (3) ausserhalb von S nur sehr wenig von ξ_0 und innerhalb von S nur sehr wenig von Null unterscheiden.

Wir gelangen also zu folgendem Schlusse:

Gibt es Funktionen ξ_0, η_0, ζ_0, welche den Bedingungen A, B, C, D annähernd genügen, so werden diese Funktionen sehr annähernd dargestellt durch die Integrale

$$\xi_0 = \int X_2\, d\omega\, \frac{e^{i\alpha r}}{r} \left(i\alpha + i\alpha \cos\psi - \frac{\cos\psi}{r} \right)$$

(4) $$\eta_0 = \int Y_2\, d\omega\, \frac{e^{i\alpha r}}{r} \left(i\alpha + i\alpha \cos\psi - \frac{\cos\psi}{r} \right)$$

$$\zeta_0 = \int Z_2\, d\omega\, \frac{e^{i\alpha r}}{r} \left(i\alpha + i\alpha \cos\psi - \frac{\cos\psi}{r} \right)$$

welche auf alle Elemente $d\omega$ der Kugel S zu erstrecken sind. In diesen Formeln ist

$$X_2 = Y_2 = Z_2 = 0,$$

wenn das Element $d\omega$ zum Schirme gehört, während

$$X_2 = -\frac{\xi_1}{4\pi}; \quad Y_2 = -\frac{\eta_1}{4\pi}; \quad Z_2 = -\frac{\zeta_1}{4\pi},$$

wenn das Element ausserhalb des Schirmes liegt.

85. Wir haben nun noch nachzuweisen, dass die Ausdrücke (4) in der That sehr nahezu den Bedingungen A, B, C, D genügen.

1. Die Bedingung A ist nach dem, was wir in § 82 sagten, sicher erfüllt.

2. Wie wir in demselben Paragraphen sahen, würden die Bedingungen B und C strenge erfüllt sein, wenn die Integrale (4) im Innern von S genau Null wären; sie sind also nahezu erfüllt, wenn diese Integrale im Innern von S nahezu Null sind. Zum Nachweise dafür müssen wir eine Methode angeben, welche die angenäherte Berechnung dieser Integrale gestattet; dies wollen wir im nächsten Paragraphen thun.

Sodann werden wir nachweisen, dass, wenn ξ_0, η_0, ζ_0 durch die Formeln (4) definirt sind, sehr nahezu gilt

$$\Theta_0 = \frac{\partial \xi_0}{\partial x} + \frac{\partial \eta_0}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial z} = 0 .$$

Bei dieser Gelegenheit wollen wir bemerken, dass die Integrale (4) innerhalb und ausserhalb von S zwei verschiedene Funktionen darstellen, von denen nicht die eine die analytische Fortsetzung der anderen bildet. Dies rührt von der Unstetigkeit des Potentials einer einfachen und einer Doppelschicht her. So stellen auch die Fresnel'schen Integrale, welche die optischen Erscheinungen ausserhalb der Kugel S erklären, nicht die Erscheinungen dar, welche im Innern dieser Kugel auftreten. Hierin liegt die Erklärung der von Poisson angedeuteten Anomalien.

86. Berechnung der Integrale (4). — Wir wollen nun annäherungsweise das erste Integral (4) bestimmen, das wir schreiben können

$$\xi_0 = \int X \frac{e^{iar}}{r} d\omega, \tag{5}$$

indem wir zur Abkürzung setzen

$$X = X_2 \left[i\alpha (1 + \cos \psi) - \frac{\cos \psi}{r} \right]. \tag{6}$$

Zu diesem Zwecke führen wir Polarkoordinaten ein. Es möge S (Fig. 9) die Kugel bezeichnen, von welcher ein Theil durch einen Schirm bedeckt ist, und P den beleuchteten Punkt x, y, z; dann

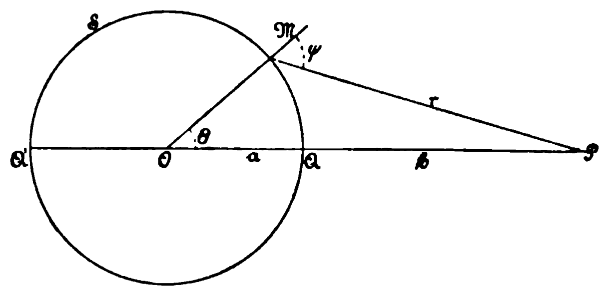

Fig. 9.

wird die Lage eines Punktes in dem neuen Koordinatensystem bestimmt sein durch den Winkel φ, welchen die durch den betreffenden Punkt und die Gerade OP gehende Ebene mit einer durch OP gelegten festen Ebene einschliesst, ferner durch den Winkel Θ zwischen der Geraden OP und derjenigen Geraden, welche den betreffenden Punkt mit O verbindet, und endlich durch den von O ausgehenden Radiusvektor R. Der Ausdruck für ein Oberflächenelement der Kugel S vom Radius a wird in diesem neuen Koordinatensystem

$$d\omega = a^2 \sin \Theta d\Theta d\varphi.$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch etwas umformen. Bezeichnet man mit b den Abstand QP des Punktes P von der Kugel, so ist in dem Dreieck MOP

$$r^2 = (a + b)^2 + a^2 - 2a(a + b) \cos \Theta.$$

Durch Differentiation erhalten wir

$$r dr = a(a + b) \sin \Theta d\Theta.$$

Führt man den für $\sin\Theta d\Theta$ aus diesem Ausdrucke folgenden Werth in den Ausdruck für $d\omega$ ein, so folgt

$$d\omega = \frac{a^2 r dr}{a(a+b)} d\varphi = \frac{a}{a+b} r dr d\varphi.$$

Diesen Werth verwenden wir beim Integral (5), und erhalten

$$\xi_0 = \frac{a}{a+b} \int\int X\, e^{i\alpha r} dr d\varphi, \tag{7}$$

wobei die Integration nach r zwischen den Grenzen b und $(2a+b)$, nach φ zwischen den Grenzen 0 und 2π auszuführen ist.

Wenn wir auch die Integration nur auf den vom Schirm nicht eingenommenen Theil der Kugel erstrecken, so ändert das nichts an der Sache, denn auf dem Schirm ist die Funktion X Null; wir haben aber so den Vortheil, dass in dem ganzen Integrationsgebiete die Funktion X stetig und deren Differentialquotienten endlich sind, und dies ist für unsere folgenden Rechnungen nothwendig. Unter diesen Bedingungen werden die Integrationsgrenzen für r nicht nothwendig b und $2a+b$ zu sein brauchen; wir wollen sie r_1 und r_2 nennen.

Führen wir zunächst die Integration nach r aus und integriren partiell, so erhalten wir

$$\int X\, e^{i\alpha r} dr = \left[\frac{X e^{i\alpha r}}{i\alpha}\right]_{r_1}^{r_2} - \frac{1}{i\alpha}\int \frac{\partial X}{\partial r} e^{i\alpha r} dr,$$

und durch erneute partielle Integration

$$\int X\, e^{i\alpha r} dr = \left[\frac{X e^{i\alpha r}}{i\alpha}\right]_{r_1}^{r_2} + \frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{\partial X}{\partial r} e^{i\alpha r}\right]_{r_1}^{r_2} - \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} e^{i\alpha r} dr.$$

Da nun α sehr gross ist, so können wir im Allgemeinen bei der Annäherungsrechnung die Glieder auf der rechten Seite vernachlässigen, welche als Faktor eine höhere als die erste Potenz von α im Nenner enthalten; wir haben also

$$\int X\, e^{i\alpha r} dr = \left[\frac{X e^{i\alpha r}}{i\alpha}\right]_{r_1}^{r_2},$$

und der durch das Integral (7) gegebene Werth von ξ_0 wird angenähert

$$(8) \qquad \xi_0 = \frac{a}{a+b} \int_0^{2\pi} \left[\frac{X\, e^{i\alpha r}}{i\alpha}\right]_{r_1}^{r_2} d\varphi .$$

87. In Fig. 9 befindet sich der Punkt P ausserhalb der Kugel S; hätten wir jedoch den Punkt P innerhalb der Kugel S angenommen, so würden wir offenbar zu demselben Ausdrucke für ξ_0 gelangt sein, nur hätten wir in diesem Falle den Abstand b des Punktes von der Kugel negativ nehmen müssen.

Wir wollen nun mit Hülfe des Ausdruckes (8) zeigen, dass der Werth von ξ_0 für einen innerhalb der Kugel gelegenen Werth Null ist. Zu diesem Zwecke untersuchen wir die Bedeutung der oberen und unteren Grenze r_1 und r_2. Hierbei können mehrere Fälle eintreten, von denen wir nur drei in's Auge fassen wollen.

1. Es ist kein Schirm vorhanden; dann ist

$$r_1 = b; \qquad r_2 = 2a + b,$$

wenn der Punkt P ausserhalb der Kugel liegt, und

$$r_1 = b, \qquad r_2 = 2a - b$$

für einen Punkt innerhalb der Kugel.

2. Es ist ein Schirm vorhanden; der Pol des Punktes P, der Punkt Q, liegt nicht auf dem Schirme, wohl aber gehört der diametral entgegengesetzte Punkt dem Schirme an. In diesem Falle ist $r_1 = b$, und die obere Grenze r_2, welche im Allgemeinen eine Funktion von φ ist, wird durch den Werth von r dargestellt, welcher dem Rande des Schirmes entspricht.

3. Es ist ein Schirm vorhanden; der Punkt Q gehört dem Schirme an, während der diametral entgegengesetzte Punkt nicht auf demselben liegt.

Dann ist $r_2 = 2a \pm b$ und r_1 ist derjenige Werth von r, welcher dem Rande des Schirms entspricht.

Wir bezeichnen nun mit J das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{X e^{i\alpha r}}{i\alpha}\, d\varphi ,$$

welches längs des Schirmrandes zu nehmen ist; X′ und X″ mögen die Werthe von $\frac{X e^{i\alpha r}}{i\alpha}$ im Punkte Q und in dem diametral entgegengesetzten Punkte bedeuten; dann haben wir im ersten Falle $\xi_0 = \frac{a}{a+b}\,(2\pi X'' - 2\pi X')$

- zweiten - $\xi_0 = \frac{a}{a+b}\,(J - 2\pi X')$

- dritten - $\xi_0 = \frac{a}{a+b}\,(2\pi X'' - J)$.

Wir werden weiterhin sehen, dass J im Allgemeinen vernachlässigt werden kann.

Zunächst haben wir X' und X'' zu bestimmen. Es ist

$$X = X_2\left(i\alpha + i\alpha\cos\psi - \frac{\cos\psi}{r}\right);$$

da α sehr gross ist, kann das Glied $\frac{\cos\psi}{r}$ gegenüber $i\alpha$ unberücksichtigt bleiben; somit wird

$$X = i\alpha X_2(1+\cos\psi) = -\frac{i\alpha\xi_1}{4\pi}(1+\cos\psi),$$

da ausserhalb des Schirmes $X_2 = -\frac{\xi_1}{4\pi}$ ist.

Im Punkte Q erhalten wir

wenn der Punkt P ausserhalb von S liegt: $\psi = 0$; $X' = -\frac{\xi_1 e^{i\alpha b}}{2\pi}$

- - - - innerhalb - - - $\psi = \pi$; $X' = 0$.

Für den diametral entgegengesetzten Punkt ist in allen Fällen $\psi = \pi$ und $X'' = 0$, demnach wird, wenn der Punkt P innerhalb von S liegt, das Integral (8) im Allgemeinen zu vernachlässigen sein.

88. Wenn der Punkt P ausserhalb von S liegt, so erhält man in den drei oben betrachteten Fällen folgende Werthe:

Im ersten Falle $\xi_0 = \xi_1 e^{i\alpha b}\frac{a}{a+b}$,

- zweiten - $\xi_0 = \xi_1 e^{i\alpha b}\frac{a}{a+b}$,

- dritten - $\xi_0 = 0$.

Wenn also der Punkt Q nicht dem Schirm angehört, d. h., wenn P nicht im geometrischen Schatten liegt, so ist die Intensität dieselbe, als wenn kein Schirm vorhanden wäre. Liegt dagegen P im geometrischen Schatten, so ist die Intensität Null. Mit anderen Worten, die Erscheinungen sind dieselben wie bei der geometrischen

Schattentheorie. Es werden also nur dann Beugungserscheinungen auftreten, wenn J nicht zu vernachlässigen ist.

Wir haben also 1. nachzuweisen, dass das Integral J im Allgemeinen zu vernachlässigen ist;

2. zu untersuchen, in welchen Ausnahmefällen dies nicht mehr stattfindet.

Es handelt sich somit um die Auswerthung des Integrals

$$J = \int \frac{X\, e^{i\alpha r}}{i\alpha}\, dq\,,$$

welches sich über den ganzen Umfang des Schirmes erstreckt. Zu diesem Zwecke wollen wir diesen Umfang in eine gewisse Anzahl von Theilbogen von zweierlei Art zerlegen:

1. Auf den Bogen der ersten Art wird der Differentialquotient $\frac{\partial q}{\partial r}$ endlich sein.

2. Auf den Bogen der zweiten Art wird dieser Differentialquotient hinreichend gross sein, dass er nicht gegenüber dem Werthe von α vernachlässigt werden darf.

Uebrigens können wir ohne Weiteres annehmen, dass die Zerlegung des Umfanges in Theilbogen derart vorgenommen wird, dass längs eines dieser Bogen r beständig wächst oder beständig abnimmt.

89. Wir wollen zuerst das Integral auswerthen, das längs eines Bogens der ersten Art genommen ist.

Wählen wir als Integrationsvariabele r, dann haben wir unser Integral zu schreiben

$$\int \frac{X\, e^{i\alpha r}}{i\alpha} \cdot \frac{\partial q}{\partial r}\, dr.$$

Durch theilweise Integration finden wir

$$-\frac{X\, e^{i\alpha r}}{\alpha^2} \cdot \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{1}{\alpha^2} \int e^{i\alpha r} \frac{\partial}{\partial r}\left(X \frac{\partial q}{\partial r}\right) dr.$$

Nun ist X von derselben Grössenordnung wie α; wenn also $\frac{\partial q}{\partial r}$ eine endliche Grösse darstellt, so ist jedes der Glieder dieser letzteren Summe von der Ordnung $\frac{1}{\alpha}$, d. h., es ist zu vernachlässigen. Somit kann das ganze Integral, genommen längs eines Bogens der ersten Art, vernachlässigt werden.

Das Integral

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \mathrm{X} \frac{e^{i\alpha r}}{i\alpha} d\varphi,$$

genommen längs eines Bogens der zweiten Art, wird im Allgemeinen ebenfalls zu vernachlässigen sein, weil die Differenz der Integrationsgrenzen $\varphi_1 - \varphi_0$ von derselben Grössenordnung sein wird, wie $\frac{1}{\alpha}$.

Soll also das Integral J einen endlichen Werth erhalten, so muss $\varphi_1 - \varphi_0$ endlich sein, d. h. es muss wenigstens einer der Bogen zweiter Art von Q aus gesehen unter einem endlichen Winkel erscheinen; dies kann in zwei Fällen eintreten.

1. Wenn dieser Bogen selbst endlich ist, dann ist längs desselben $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \infty$, $\frac{\partial r}{\partial \varphi} = 0$, $r = \text{const.}$; d. h. der fragliche Bogen darf sich nur sehr wenig von einem Kreisbogen unterscheiden, dessen Pol in Q liegt.

2. Wenn sich der Bogen sehr nahe am Punkte Q, d. h. sehr nahe am Rande des Schirmes befindet.

Ist dies nicht der Fall, so ist der Werth des Integrals J stets zu vernachlässigen und wir erhalten keine anderen Erscheinungen, als diejenigen, welche schon nach der geometrischen Schattentheorie eintreten müssen.

90. Wir wollen nun zusehen, in welchen Fällen $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ unendlich wird. In § 86 hatten wir gefunden

$$r\, d r = a (a + b) \sin \Theta\, d \Theta;$$

hieraus ergibt sich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{a(a+b)} \cdot \frac{r}{\sin \Theta} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta}. \tag{10}$$

Diese Gleichung zeigt, dass $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ in zwei Fällen unendlich werden kann: 1. wenn $\sin \Theta$ sehr klein, 2. wenn $\frac{\partial \varphi}{\partial \Theta}$ unendlich ist.

Da im ersten Falle der Winkel Θ sehr klein ist, so wird ein zum Schirmrand gehöriger Bogen sehr nahe am Punkte Q liegen, und wir können den Theil der Kugel, welcher diesen Bogen enthält, mit einer durch Q gehenden Ebene vertauschen. Ausserdem dürfen wir diesen Bogen wegen seiner sehr geringen Grösse auch als Element einer Geraden AB (Fig. 10) auffassen. Die Entfernung MQ des Punktes Q vom Bogenelement M ist $a\Theta$, wobei a den Radius der Kugel bezeichnet, auf welcher sich der betrachtete Theil des Schirmumfanges befindet. Nennen wir $a\delta$ den kürzesten Abstand des Punktes Q von der Geraden AB und φ den Winkel zwischen QM und QC, so haben wir

$$a\Theta\cos\varphi = a\delta$$

oder

$$\Theta\cos\varphi = \delta.$$

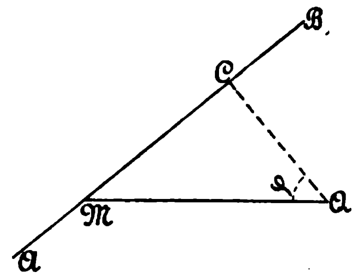

Fig. 10.

Der hier auftretende Winkel φ unterscheidet sich übrigens nur durch eine Konstante von dem Winkel, den wir früher mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet hatten; die Differentialquotienten beider Grössen besitzen also den gleichen Werth. Durch Differentiation der vorhergehenden Gleichung finden wir nun

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\cos\varphi - \Theta\sin\varphi = 0;$$

diese neue Gleichung zeigt, dass $\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}$ von derselben Grössenordnung ist, wie Θ, und somit auch wie δ. In Folge dessen ist $\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta}$ von der Grössenordnung $\frac{1}{\delta}$, und $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ nach Gleichung (10) von der Ordnung $\frac{r}{\delta^2}$.

Liegt der Punkt P in endlicher Entfernung r von der Kugel, so ist $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ von der Ordnung $\frac{1}{\delta^2}$, und, wenn dieser Differentialquotient von derselben Grössenordnung sein soll, wie $\frac{1}{\lambda}$, so muss δ von der Ordnung $\sqrt{\lambda}$ sein. Befindet sich dagegen der Punkt P nur in einer Entfernung von der Kugel, welche selbst von der Grössenordnung λ ist, so muss δ von derselben Ordnung wie λ sein, damit $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ unendlich gross von der Ordnung $\frac{1}{\lambda}$ ist.

Die Gerade, welche den Punkt P mit der Lichtquelle verbindet, muss also die Kugel in einer Entfernung vom Schirmrande schneiden, welche von der Grössenordnung λ ist, wenn die Beleuchtung in P abnorm sein soll; der Bezirk, in dem sich der Punkt P befinden muss, ist aber dann zu klein, als dass er der Beobachtung zugänglich wäre. Man wird Anomalien in der Beleuchtung von P nur dann erkennen können, wenn P in einer endlichen Entfernung von der Kugel liegt.

So ist auf einer mit dem Radius $(a + b)$ beschriebenen, zu S koncentrischen Kugelschale die von den Beugungsstreifen eingenommene Stelle von der Grössenordnung $\sqrt{\lambda}$, wenn b einen endlichen Werth besitzt, während auf der Kugel S selbst diese Stelle von der Grössenordnung λ ist.

91. Wir wollen nun den zweiten Fall betrachten, wo $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ unendlich gross ist; da $\frac{\partial \varphi}{\partial \Theta}$ unendlich gross ist, muss $\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}$ unendlich klein sein. Ist also $\frac{r}{\sin \Theta}$ eine endliche Grösse, so muss $\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}$ von der Ordnung λ sein, wenn $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ von der Ordnung $\frac{1}{\lambda}$ sein soll.

Mit anderen Worten, Θ muss, bis auf Grössen von der Ordnung von λ, eine Konstante sein, d. h., unter Vernachlässigung von Grössen dieser Ordnung muss man einen zum Schirmrand gehörigen endlichen Bogen als Kreisbogen auffassen können, dessen Mittelpunkt in Q liegt. Die Entfernung des Punktes Q vom Centrum der mittleren Krümmung dieses Bogens muss von der Ordnung λ sein. Hieraus folgt, dass die abnorm beleuchteten Punkte sämmtlich innerhalb eines Kreises liegen, dessen Radius von der Grössenordnung λ ist, und sich der Beobachtung entziehen.

Soll also eine Beobachtung möglich sein, so muss $\sin \Theta$ und somit auch der Radius dieses Kreisbogens sehr klein sein.

Ist $\frac{\sin \Theta}{r}$ eine Grösse von der Ordnung $\sqrt{\lambda}$, so genügt es, dass $\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}$ und somit die Entfernung des Punktes Q vom Mittelpunkte des Kreises ebenfalls von dieser Grössenordnung ist. Unter dieser Bedingung ist der Raum, in welchem P liegen muss, um abnorme Beleuchtungserscheinungen zu zeigen, hinreichend gross, dass man diese Erscheinungen auch wirklich beobachten kann.

Hierbei ist noch zu bemerken, dass, wenn sich der Punkt P auf der Kugel selbst befindet, die Beleuchtung durch die geometrische Schattentheorie bestimmt wird, oder wenigstens wird es nicht möglich sein, durch die Beobachtung einen Unterschied zwischen der so bestimmten und der thatsächlich stattfindenden Beleuchtung zu ermitteln.

Wenn nämlich der Punkt P sehr nahe an den Punkt Q rückt, so wird $\frac{\sin\Theta}{r} = \frac{1}{a}$, denn in dem Dreieck MOP (vgl. Fig. 9) ist

$$\frac{\sin\Theta}{r} = \frac{\sin \mathrm{OMP}}{a},$$

und der Grenzwerth des Winkels OMP ist dann ein rechter Winkel. Da nun $\frac{\sin\Theta}{r}$ endlich ist, so werden zufolge unsrer obigen Ableitungen die Erscheinungen der Beobachtung unzugänglich sein.

92. Wir haben nun weiter nachzuweisen, dass die Bedingung der Transversalität

$$\Theta_0 = \xi_0' + \eta_0' + \zeta_0'$$

für die ausserhalb der Kugel S oder auf dieser Kugel selbst gelegenen Punkte erfüllt ist.

Θ_0 genügt der Gleichung

$$\Delta\Theta_0 + a^2\,\Theta_0 = 0.$$

Es gilt also für den Raum ausserhalb von der Kugel S nach § 81 (15) die Gleichung

$$\Theta_0 = -\int \frac{\Theta_0}{4\pi}\,\frac{e^{i\alpha r}}{r}\left(i\alpha - \frac{1}{r}\right)\cos\psi\, d\omega + \int \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial\Theta_0}{\partial n}\,\frac{e^{i\alpha r}}{r}\, d\omega\,;$$

hierbei erstrecken sich die Integrale der rechten Seite auf alle Elemente $d\omega$ der Kugel S.

Lässt man nun die Stelle, wo sich Beugungsstreifen befinden, unberücksichtigt, so sind, wie wir sahen, die Erscheinungen dieselben, wie in der geometrischen Schattentheorie; mit anderen Worten, an gewissen Punkten ist die Beleuchtung Null und an anderen so, als wäre ein Schirm überhaupt nicht vorhanden. In diesen beiden Fällen sind Θ_0 und $\frac{\partial\Theta_0}{\partial n}$ Null.

Bei der von uns gewählten Annäherung genügt es also, die Integrale rechter Hand auf die Region der Kugel S zu erstrecken, wo sich Beugungsstreifen befinden, diese ist aber, wie wir sahen, von der Grössenordnung λ. Die Integrale auf der rechten Seite sind somit zu vernachlässigen, folglich auch Θ_0.

Fassen wir nochmals alles zusammen, so genügen die Integrale (4) gut den Bedingungen A, B, C und D, und es kann nur dann eine abnorme Beleuchtung eintreten, wenn sich der Punkt P sehr nahe am geometrischen Schatten des Schirmrandes befindet.

93. Vereinfachung der Ausdrücke für ξ_0, η_0, ζ_0. — Wir haben gesehen, dass, wenn der Punkt Q in einem endlichen Abstande von den Rändern eines Schirmes liegt, die Beleuchtung des Punktes P den Gesetzen der Schattentheorie folgt, dass aber die Beleuchtung geändert wird, wenn der Punkt Q in einer Entfernung vom Schirmrande liegt, die von der Grössenordnung $\sqrt{\lambda}$ ist. Die Beleuchtung eines Punktes hängt also nur von den Theilen der Kugel ab, welche dem Punkte Q benachbart sind; dieser letztere Punkt heisst der Pol des Punktes P. Wir wollen diese Ueberlegung zur Vereinfachung der Ausdrücke für ξ_0, η_0, ζ_0 benutzen, welche durch die Integrale (4) gegeben sind.

Wir fassen das erste dieser Integrale in's Auge:

$$\xi_0 = \int X_2 \, d\omega \, \frac{e^{iar}}{r} \left(ia + ia \cos \psi - \frac{\cos \psi}{r} \right).$$

Da diejenigen Theile dieses Integrals, welche nicht vernachlässigt werden dürfen, den Punkten entsprechen, die dem Pole Q des beleuchteten Punktes P sehr nahe liegen, so brauchen wir das Integral auch nur auf diese Punkte zu erstrecken und können in Folge dessen X_2 und ψ als Konstanten betrachten. Ausserdem ist a sehr gross und r muss endlich sein, wenn die Beugungserscheinungen sich überhaupt beobachten lassen sollen, somit dürfen wir das unter dem Integralzeichen stehende Glied $-\frac{\cos \psi}{r}$ gegen die beiden anderen Glieder ia und $ia \cos \psi$ vernachlässigen. Setzen wir nun die betreffenden Konstanten vor das Integral, dann erhalten wir

$$\xi_0 = X_2 \, ia \, (1 + \cos \psi) \int \frac{e^{iar}}{r} \, d\omega.$$

Ausserdem ist nach § 84

$$X_2 = -\frac{\xi_1}{4\pi};$$

ersetzen wir also X_2 und $\cos \psi$ in dem Ausdrucke für ξ_0 durch die Werthe, welche diese Grössen am Pole Q annehmen, so finden wir

$$\xi_0 = -\frac{ia}{2\pi} \, \xi_1 \int \frac{e^{iar}}{r} \, d\omega.$$

Die Entfernung des Punktes P von den dem Pole Q benachbarten Kugelpunkten unterscheidet sich nur sehr wenig von der Entfernung $PQ = b$ und kann, da das Integral sich nur auf die dem Punkte Q zunächst liegenden Punkte erstreckt, vor das Integral gezogen werden; der Werth von ξ_0 geht dadurch über in

$$\xi_0 = -\frac{i\alpha}{2\pi}\frac{\xi_1}{b}\int e^{i\alpha r}\,d\omega$$

oder, in einer etwas anderen Schreibweise,

$$\xi_0 = -\frac{i\alpha\xi_1 e^{i\alpha b}}{2\pi b}\int e^{i\alpha(r-b)}d\omega\,.$$

94. Den Werth dieses letzten Integrals wollen wir nun bestimmen. Es ist in dem Dreieck MOP (Fig. 9)

$$r^2 = (a+b)^2 + a^2 - 2a(a+b)\cos\Theta\,.$$

Da wir hier nur die dem Pole Q sehr nahe liegenden Punkte zu berücksichtigen haben, für welche Θ sehr klein ist, so können wir $\cos\Theta$ durch die beiden ersten Glieder seiner Reihenentwickelung $1-\frac{\Theta^2}{2}$ ersetzen, und erhalten

$$r^2 = (a+b)^2 + a^2 - 2a(a+b)\left(1-\frac{\Theta^2}{2}\right) = b^2 + a(a+b)\Theta^2\,.$$

Bezeichnen wir das zwischen einem Kugelpunkte M und dem Pole Q liegenden Stück des grössten Kreises mit s, so ist

$$\Theta = \frac{s}{a}\,;$$

somit wird

$$r^2 = b^2 + \frac{a+b}{a}s^2\,;$$

hieraus folgt

$$r-b = \frac{a+b}{a(r+b)}s^2\,.$$

Nun ist r nur sehr wenig von b verschieden, man kann also $(r+b)$ durch $2b$ ersetzen, und erhält

$$r-b = \frac{a+b}{2ab}s^2\,;$$

die Einführung dieses Werthes in den Ausdruck für ξ_0 liefert uns

$$\xi_0 = -\frac{i\alpha\xi_1 e^{i\alpha b}}{2\pi b}\int e^{i\alpha\frac{a+b}{2ab}s^2}\,d\omega\,.$$

Da das Integral nur auf diejenigen Theile der Kugel auszudehnen ist, welche dem Punkte Q benachbart sind, so darf man annehmen, dass dieselben, statt auf der Kugel, in einer die Kugel in Q berührenden Tangentialebene liegen. Wir wählen in dieser Ebene zwei rechtwinkelige Koordinatenaxen, die sich in Q schneiden. Die Koordinaten des Punktes M in diesem System werden durch die Entfernungen l und l' des Punktes von den Axen gegeben sein. Zur Vereinfachung des Ausdruckes für ξ_0 definiren wir die Lage des Punktes M durch zwei Parameter u und v derart, dass

$$l = u\sqrt{\frac{a\,b\,\lambda}{2\,(a+b)}}, \qquad l' = v\sqrt{\frac{a\,b\,\lambda}{2\,(a+b)}};$$

dann ist

$$s^2 = l^2 + l'^2 = (u^2 + v^2)\,\frac{a\,b\,\lambda}{2\,(a+b)},$$

und

$$d\omega = dl\,dl' = du\,dv\,\frac{a\,b\,\lambda}{2\,(a+b)}.$$

Durch Einführung dieser Werthe von s^2 und $d\omega$ in den Ausdruck für ξ_0 erhalten wir

$$\xi_0 = -\frac{i\alpha\xi_1 a\lambda\, e^{i\alpha b}}{4\pi\,(a+b)}\int e^{\frac{1}{4}i\alpha\lambda(u^2+v^2)}\,du\,dv,$$

und, da $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$ war,

$$\xi_0 = -\frac{i a\xi_1\, e^{i\alpha b}}{2(a+b)}\int e^{\frac{i\pi}{2}(u^2+v^2)}\,du\,dv. \tag{11}$$

95. **Intensität des Lichts in einem Punkte.** — Wie wir in § 76 sahen, ist die X-Komponente der Verschiebung für einen ausserhalb der Kugel S gelegenen Punkt P

$$\xi = \text{reeller Theil von } \xi_0 e^{-i\alpha Vt},$$

wobei ξ_0 durch den oben entwickelten Ausdruck (11) dargestellt wird. Für die beiden anderen Komponenten würden wir dementsprechend erhalten

$$\eta = \text{reeller Theil von } \eta_0 e^{-i\alpha Vt},$$

$$\zeta = \text{reeller Theil von } \zeta_0 e^{-i\alpha Vt};$$

hierbei ergeben sich die Ausdrücke für η_0 und ζ_0 aus dem Ausdrucke für ξ_0, indem man in (11) ξ_1 durch η_1 bezw. ζ_1 ersetzt. Die Lichtintensität im Punkte P wird also proportional

$$\varrho\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2\right]$$

sein; nun ist

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=\text{reeller Theil von}\left(-i\alpha V\xi_0 e^{-i\alpha Vt}+e^{-i\alpha Vt}\frac{\partial\xi_0}{\partial t}\right),$$

und entsprechend die beiden Ausdrücke für $\frac{\partial\eta}{\partial t}$ und $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$. Demnach ist die Intensität proportional der Summe der Quadrate der Moduln der drei Grössen von der Form

$$\left(-i\alpha V\xi_0+\frac{\partial\xi_0}{\partial t}\right)$$

In dem Ausdrucke (11) ist aber ξ_1 die einzige Grösse, welche von der Zeit abhängt; somit wird die Intensität gleich der Summe der Quadrate der Moduln von drei Grössen, deren erste gegeben ist durch

$$(1)\qquad\left(-i\alpha V\xi_1+\frac{\partial\xi_1}{\partial t}\right)\frac{iae^{i\alpha b}}{2(a+b)}\int e^{\frac{i\pi}{2}(u^2+v^2)}\,du\,dv,$$

während die anderen aus dieser folgen, wenn man ξ_1 durch η_1 und ζ_1 ersetzt.

Wenn wir die Beugungserscheinungen in einer Ebene beobachten wollen, so haben wir die relative Intensität der in einer und derselben Ebene gelegenen Punkte zu bestimmen. Da sich diese Punkte immer nahe an einander und in einer bestimmten Entfernung vom Schirme befinden, so dürfen wir annehmen, dass der Abstand b eines jeden derselben von der Kugel, welche den Schirm enthält, der gleiche ist. Hieraus ergibt sich, dass in jedem der Ausdrücke (1), von denen die Summe der Quadrate proportional der Intensität ist, der Faktor $\frac{iae^{i\alpha b}}{2(a+b)}$ unverändert bleibt, vorausgesetzt, dass man nur homogenes Licht in Betracht zieht. Da man ausserdem diese Punkte in dem gleichen Augenblicke beobachtet, und die Werthe ξ_1, η_1, ζ_1 sich nur wenig ändern, wenn man von einem Punkte der Kugel S zu einem benachbarten Punkte übergeht, so wird auch der Faktor $\left(-i\alpha V\xi_1+\frac{\partial\xi_1}{\partial t}\right)$ nahezu denselben Werth besitzen. Die relative Intensität des Lichtes in den verschiedenen in Betracht kommenden Punkten wird also in demselben Augenblicke dem Quadrate des Moduls des Integrals

$$(2) \qquad \int e^{\frac{i\pi}{2}(u^2+v^2)}\, du\, dv$$

proportional sein, das in dem Ausdrucke (1) und den entsprechenden beiden anderen als Faktor auftritt. Wir brauchen also, um die Lichtintensität in den verschiedenen Punkten der Ebene zu finden, in welcher die Beobachtungen angestellt werden, nur die Aenderungen des Moduls dieses Integrals zu untersuchen.

96. Ausdruck des Integrals (2), für den Fall eines Spaltes mit parallelen Rändern. — Wir wollen annehmen, dass die eine der Axen, welchen die Parameter u und v entsprechen, parallel zu den Rändern des Spaltes sei; beispielsweise möge dies für die u-Axe der Fall sein. Gehen wir nun auf die Gleichung

$$\delta = u \sqrt{\frac{a b \lambda}{2(a+b)}}$$

zurück, durch welche der Parameter u mit der Entfernung δ eines Punktes der uv-Ebene von der v-Axe verbunden ist, so sehen wir, dass u von der Ordnung $\frac{\delta}{\sqrt{\lambda}}$ ist. Da der Spalt eine, wenn auch nicht unbegrenzte, so doch im Verhältniss zu den Grössen von der Ordnung $\sqrt{\lambda}$ sehr bedeutende Länge besitzt, so werden die Werthe von u für die in Betracht kommenden Punkte immer sehr bedeutend sein.

Demnach darf man die Grenzen für u in dem Integral (2) unendlich setzen. Bezeichnen wir ferner die Grenzen von v, die im Allgemeinen wegen der geringen Breite des Spaltes endlich sind, mit v_1 und v_2, so können wir das Integral in der Form schreiben

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i\pi}{2} u^2}\, du \int_{+v_1}^{+v_2} e^{\frac{i\pi v^2}{2}}\, dv.$$

Der Werth des ersten dieser beiden Integrale ist $(1+i)$ mit dem Modul 2; wir haben uns also nur noch mit dem zweiten Integrale zu beschäftigen, welches nach Einführung von trigonometrischen Funktionen an Stelle der Exponentialfunktion übergeht in

$$(3) \qquad \int_{v_1}^{v_2} e^{\frac{i\pi v^2}{2}}\, dv = \int_{v_1}^{v_2} \cos\frac{\pi v^2}{2}\, dv + i \int_{v_1}^{v_2} \sin\frac{\pi v^2}{2}\, dv.$$

97. Graphische Darstellung des Integrals (3). — Die beiden Integrale rechter Hand sind unter dem Namen Fresnel'sche

Integrale bekannt; wir wollen sie nun genauer untersuchen. Zur Vereinfachung der Rechnung setzen wir die untere Grenze Null; durch Bildung der algebraischen Summe von zwei solchen Integralen, deren eine Grenze Null ist, gelangt man dann leicht zu dem allgemeinen Falle, in welchem die Grenzen ganz beliebig sind.

Wir setzen also

$$x = \int_0^v \cos \frac{\pi v^2}{2} dv; \quad y = \int_0^v \sin \frac{\pi v^2}{2} dv,$$

und konstruiren die zu den verschiedenen Koordinaten x und y gehörige Kurve. Diese geht durch den Koordinatenanfang, denn für $v = 0$ ist auch $x = y = 0$. Vertauscht man v mit $-v$, so bleibt die unter dem Integralzeichen stehende Grösse ungeändert, dagegen ändert die obere Grenze ihr Vorzeichen, und zwar gleichzeitig bei x und bei y; der Koordinatenanfang ist also ein Symmetriepunkt für die Kurve.

Durch Differentiation von x und y erhalten wir

$$dx = \cos \frac{\pi v^2}{2} dv; \quad dy = \sin \frac{\pi v^2}{2} dv;$$

hieraus ergibt sich durch Quadrirung und Addition

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 = dv^2,$$

also

$$ds = dv,$$

wenn ds ein Bogenelement der Kurve bezeichnet.

Durch Integration der beiden Seiten dieser Gleichung folgt

$$s = v,$$

wenn man die Integrationskonstante Null setzt, was darauf hinauskommt, dass man die Bogen vom Koordinatenanfangspunkte an rechnet, da für $x = y = 0$ auch $v = 0$ ist.

Der Quotient $\frac{dy}{dx}$ liefert die trigonometrische Tangente des Winkels α zwischen der X-Axe und der Tangente an die Kurve im Punkte x, y; es ist also

(4) $$\alpha = \frac{\pi}{2} v^2.$$

Der Krümmungsradius in einem Punkte ist gegeben durch

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{dv}{\pi v \, dv} = \frac{1}{\pi v}.$$

Im Koordinatenanfang, d. h. für $v=0$, ist der Krümmungsradius unendlich gross, und da α gleichzeitig mit v Null ist, so ist die X-Axe eine Tangente in dem Wendepunkt O (Fig. 11).

Um den ferneren Verlauf der Kurve zu ermitteln, lassen wir v von 0 bis ∞ wachsen; dann nimmt auch der Winkel α über jede Grenze hinaus zu, während der Krümmungsradius sich der Grenze

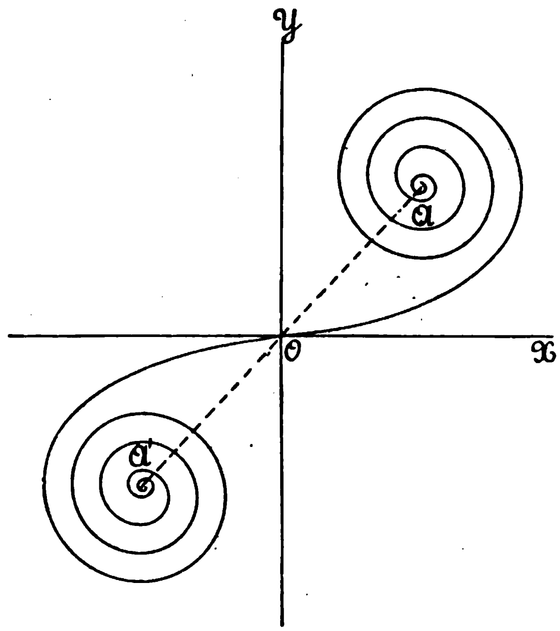

Fig. 11.

Null nähert. Wir haben es also mit einer spiralförmigen Kurve zu thun, welche einen asymptotischen Punkt A besitzt, dessen Koordinaten wir nun bestimmen wollen. Zu diesem Zwecke suchen wir den Werth des Integrals

$$\int_0^\infty e^{\frac{i\pi}{2}v^2}\,dv.$$

Bekanntlich ist

$$\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Setzen wir

$$z^2 = -\frac{i\pi}{2}v^2,$$

so haben wir

$$z = v\sqrt{-\frac{i\pi}{2}}; \qquad dz = dv\sqrt{-\frac{i\pi}{2}};$$

somit erhalten wir für das gesuchte Integral

$$\int_0^\infty e^{\frac{i\pi}{2}v^2}\,dv = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{-\frac{2}{i\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{2i} = \frac{1+i}{2};$$

da nun

$$\int_0^v e^{\frac{i\pi v^2}{2}}\,dv = x + iy,$$

so erhalten wir für $v = \infty$

$$x = \frac{1}{2}; \qquad y = \frac{1}{2}.$$

Dies sind die Koordinaten des asymptotischen Punktes A. Der Theil der Kurve, welcher negativen Werthen von v entspricht, liegt symmetrisch zu dem eben gefundenen.

98. Zur genaueren Definition der Kurve sehen wir zu, wie sich der Abstand AM des Asymptotenpunktes A von einem beliebigen Punkte M des positiven Zweiges der Kurve ändert.

Ist v der Werth des Parameters, welcher zu dem betreffenden Punkte gehört, so werden dessen Koordinaten sein

$$x = \int_0^v \cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv; \qquad y = \int_0^v \sin\frac{\pi v^2}{2}\,dv.$$

Wir wollen den Koordinatenanfang nach diesem Punkte M verlegen; in Bezug auf das neue Koordinatensystem wird die Abscisse des Asymptotenpunktes A gleich der Abscisse desselben Punktes im alten Koordinatensystem, vermindert um die Abscisse des Punktes M; es ist also

$$\int_0^\infty \cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv - \int_0^v \cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv = \int_v^\infty \cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv.$$

Auf analoge Weise erhält man als Ordinate des Punktes A im neuen System

$$\int_v^\infty \sin\frac{\pi v^2}{2}\,dv.$$

Die Koordinaten des Asymptotenpunktes in Bezug auf die durch M gehenden Axen sind also gegeben durch den reellen und den imaginären Theil des Integrals

$$J = \int_v^\infty e^{\frac{i\pi}{2} v^2} dv. \tag{5}$$

Wir wollen nun noch einen anderen Ausdruck für J suchen. Zu diesem Zwecke setzen wir in dem Integral

$$\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$z = vw$, wobei v eine positive Grösse sein soll, und erhalten also

$$\int_0^\infty e^{-v^2 w^2} v\, dw = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Das Produkt aus diesem Integral und dem Integrale (5) liefert uns

$$\int_v^\infty \int_0^\infty e^{v^2\left(\frac{i\pi}{2} - w^2\right)} v\, dv\, dw = \frac{J}{2}\sqrt{\pi}.$$

Die Integration nach v lässt sich in diesem Ausdrucke ohne Weiteres ausführen; es ist nämlich

$$\int_v^\infty e^{v^2\left(\frac{i\pi}{2} - w^2\right)} v\, dv = \frac{1}{i\pi - 2w^2} \int_v^\infty d\left[e^{v^2\left(\frac{i\pi}{2} - w^2\right)}\right],$$

und somit

$$\int_v^\infty e^{v^2\left(\frac{i\pi}{2} - w^2\right)} v\, dv = -\frac{1}{i\pi - 2w^2} e^{v^2\left(\frac{i\pi}{2} - w^2\right)}.$$

Unser Doppelintegral geht also über in

$$\int_0^\infty \frac{e^{v^2\left(\frac{i\pi}{2} - w^2\right)}}{2w^2 - i\pi} dw = e^{\frac{i\pi}{2} v^2} \int_0^\infty \frac{e^{-v^2 w^2}}{2w^2 - i\pi} dw = \frac{J}{2}\sqrt{\pi}.$$

Hieraus erhalten wir einen neuen Ausdruck für J, der uns lehrt, dass die Koordinaten des Punktes A in Bezug auf die durch

M parallel zu OX und OY gelegten Axen durch den reellen und den imaginären Theil des Integrals

$$(6) \qquad J = \frac{e^{\frac{i\pi}{2} v^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{2 e^{-v^2 w^2}}{2 w^2 - i\pi} dw$$

gegeben sind.

99. Drehen wir nun die Koordinatenaxen im Punkte M um einen Winkel $\frac{\pi}{2} v^2$, d. h. nach Gleichung (4) um den Winkel α, welchen die Tangente an die Kurve mit der X-Axe einschliesst, so erhalten wir ein neues Axensystem, das von der Tangente und der Normalen zur Kurve im Punkte M gebildet wird. Wenn wir mit x' und y' die Koordinaten eines Punktes in diesem neuen System bezeichnen, mit x_1, y_1 die Koordinaten desselben Punktes in dem alten System, bei welchem die durch M gehenden Axen parallel zu OX und OY sind, so haben wir als Transformationsformeln anzuwenden

$$x' = x_1 \cos\frac{\pi v^2}{2} + y_1 \sin\frac{\pi v^2}{2}$$

$$y' = y_1 \cos\frac{\pi v^2}{2} - x_1 \sin\frac{\pi v^2}{2}.$$

Multipliciren wir die zweite dieser Gleichungen mit i und addiren sie zur ersten, so erhalten wir

$$x' + iy' = (x_1 + iy_1)\cos\frac{\pi v^2}{2} - (ix_1 - y_1)\sin\frac{\pi v^2}{2}$$

$$= (x_1 + iy_1)\left(\cos\frac{\pi v^2}{2} - i\sin\frac{\pi v^2}{2}\right),$$

oder

$$x' + iy' = (x_1 + iy_1)\, e^{-\frac{i\pi v^2}{2}}.$$

Diese letzte Gleichung zeigt uns, dass der Werth der komplexen Grösse $(x' + iy')$ im neuen System gleich ist dem mit $e^{-\frac{i\pi v^2}{2}}$ multiplicirten Werthe $(x_1 + iy_1)$ im alten System. Nun ist für den Asymptotenpunkt A

$$x_1 + iy_1 = J,$$

somit wird

$$x' + i y' = J e^{-\frac{i \pi v^2}{2}},$$

und, nach Gleichung (6)

$$(7) \qquad x' + i y' = \int_0^\infty \frac{2 e^{-v^2 w^2}}{\sqrt{\pi}\,(2 w^2 - i \pi)} dw.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner des unter dem Integralzeichen stehenden Bruches mit $(2 w^2 + i \pi)$, so erhält man

$$\int_0^\infty \frac{2\,(2 w^2 + i \pi)\, e^{-v^2 w^2}}{\sqrt{\pi}\,(4 w^4 + \pi^2)} dw.$$

Der Abstand des Punktes A von der Normale in M wird durch den reellen Theil dieses Ausdrucks gebildet und hat den Werth

$$\int_0^\infty \frac{4 w^2 e^{-v^2 w^2}}{\sqrt{\pi}\,(4 w^4 + \pi^2)} dw,$$

und die Entfernung dieses Punktes von der Tangente, welche gleich dem imaginären Theile des Integrals ist, wird

$$\int_0^\infty \frac{2 \pi e^{-v^2 w^2}}{\sqrt{\pi}\,(4 w^4 + \pi^2)} dw.$$

Die Elemente dieser beiden letzten Integrale sind positiv und nehmen beständig ab, wenn v von 0 bis ∞ zunimmt. Somit sind auch die Abstände des Punktes A von der Normalen und von der Tangente in M immer positiv und nehmen stets ab; das Gleiche gilt also von dem Abstande AM. Dies ist auch ganz klar, denn falls es anders wäre, müsste der Abstand AM ein Maximum oder ein Minimum aufweisen; in diesem, dem Maximum oder Minimum entsprechenden Punkte müsste aber AM normal zur Kurve gerichtet sein, und die Entfernung des Punktes A von der Normalen wäre daher Null, was nach dem Vorhergehenden nicht der Fall sein kann.

Es ist leicht ersichtlich, dass für die dem Punkte A benachbarten Punkte der Kurve die Gerade AM nahezu senkrecht auf der Kurve steht. Für diese Punkte ist nämlich v sehr gross und die Exponentialgrösse $e^{-v^2 w^2}$ sehr klein, vorausgesetzt, dass w nicht sehr klein ist; in dem Integrale (7) lassen sich also die Elemente, welche nicht einem kleinen Werthe von w entsprechen, vernachlässigen. Ist aber w klein, so reducirt sich der Nenner $(2w^2 - i\pi)$ nahezu auf $-i\pi$, und wir erhalten für $x' + iy'$ den angenäherten Werth

$$x' + iy' = \frac{2i}{\pi\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-v^2 w^2} dw = \frac{2i}{\pi\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{v} = \frac{i}{\pi v}.$$

Da der reelle Theil Null ist, so ist der Abstand des Punktes A von der Normalen Null, d. h. AM ist ungefähr normal, während der Werth von AM annähernd $\frac{1}{\pi v}$ wird.

Die Gestalt der Kurve ist nunmehr hinreichend genau bestimmt.

100. Beugung durch einen engen Spalt. — Wie wir in § 96 sahen, ist die Lichtintensität in einem äusseren Punkte proportional dem Quadrate des Moduls des Integrals

$$\int_{v_1}^{v_2} e^{\frac{i\pi}{2} v^2} dv.$$

Der Modul dieses Integrals ist gleich der geometrischen Differenz der Moduln der Integrale

$$\int_0^{v_2} e^{\frac{i\pi}{2} v^2} dv \quad \text{und} \quad \int_0^{v_1} e^{\frac{i\pi}{2} v^2} dv.$$

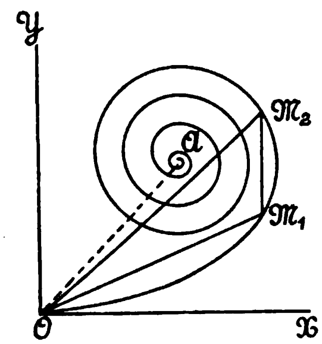

Fig. 12.

Ist M_1 (Fig. 12) der Punkt der darstellenden Kurve, welcher v_1 entspricht, M_2 derjenige, welcher v_2 entspricht, so werden die Moduln dieser Integrale durch OM_1 und OM_2 gegeben sein; ihre geometrische Differenz ist M_1M_2.

Betrachten wir nun einen durch einen Spalt beleuchteten Punkt P, so sind die Grössen v_1 und v_2 proportional den Abständen seines Pols Q von den Rändern des Spalts; da die Breite des Spalts konstant ist, so hat die Differenz $v_1 - v_2$ für jeden in der Beobachtungsebene gelegenen Punkt immer denselben Werth. Nun sahen wir, dass v_1 und v_2 den Längen der Kurvenstücke OM_1 und OM_2 gleich sind, in Folge dessen hat der Bogen M_1M_2 immer dieselbe Länge. Wir müssen also, um die Aenderung der Lichtintensität in den verschiedenen Punkten der Beobachtungsebene zu erhalten, die Längenänderung der zu gleichen Bogen gehörigen Sehne M_1M_2 bestimmen. Soll ein Maximum oder Minimum auftreten, so muss das von der

Sehne und den Tangenten M_1T und M_2T gebildete Dreieck gleichschenkelig sein (Fig. 13), oder die Tangenten an den Enden müssen parallel und von gleicher Richtung sein (Fig. 14). Wir erhalten auf diese Weise zwei Arten von Maxima und Minima; für die zweite Art gilt

$$\frac{\pi}{2} v_2^2 = \frac{\pi}{2} v_1^2 + 2\,K\pi\,,$$

wobei $\frac{\pi}{2} v^2$ den Winkel zwischen der Tangente in einem Punkte der Kurve und der X-Axe bezeichnet. Diese Gleichung liefert uns

$$v_2^2 - v_1^2 = 4\,K$$

oder

$$v_2 + v_1 = \frac{4\,K}{l}\,,$$

wenn wir

$$l = v_2 - v_1$$

setzen. Die Untersuchung der Maxima und Minima der ersten Art ist sehr komplicirt.

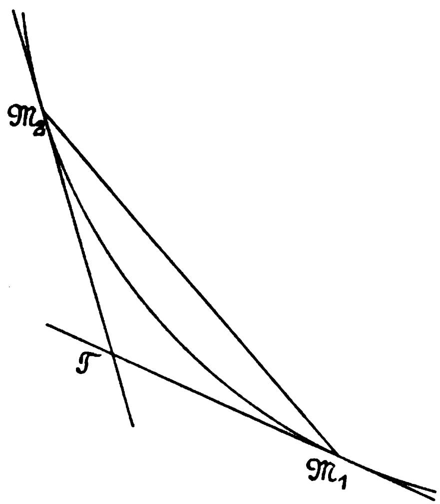

Fig. 13.

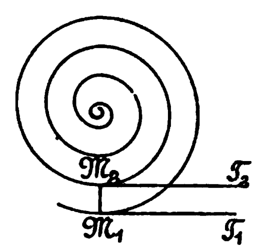

Fig. 14.

101. Beugung durch den Rand eines Schirms. — In diesem Falle ist die Grenze v_2 des Integrals (3) in § 96 unendlich, und die Lichtintensität in einem Punkte P ist proportional dem Quadrate des Moduls von

$$\int_{v_1}^{\infty} e^{\frac{i\pi}{2} v^2}\, dv.$$

Bezeichnet M_1 den Punkt, welcher dem Werthe v_1 entspricht, so ist dieser Modul gleich der Länge AM_1 derjenigen Geraden, welche den asymptotischen Punkt A mit dem Punkte M_1 verbindet.

Wenn der Punkt P innerhalb des geometrischen Schattens liegt, so befindet sich sein Pol Q auf dem Schirme; demnach ist die untere Grenze v_1 des vorhergehenden Integrals positiv, und der ihr entsprechende Punkt M_1 liegt auf dem Theile der Kurve, welche sich auf derselben Seite wie A befindet (Fig. 15). Die Intensität nimmt also sehr rasch ab, wenn man sich vom Rande des geometrischen Schattens entfernt, und hat weder Maximum noch Minimum.

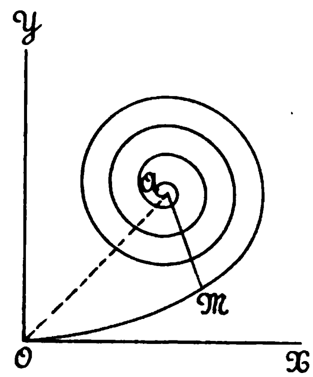

Fig. 15.

Da AM annähernd gleich $\frac{1}{\pi v}$ ist, so ist das Quadrat des Moduls unseres Integrals gleich $\frac{1}{\pi^2 v^2}$; in Folge dessen ändert sich auf der Seite des geometrischen Schattens die Lichtintensität ungefähr umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes vom Rande dieses Schattens.

Befindet sich dagegen der Punkt P ausserhalb des geometrischen Schattens, so liegt sein Pol Q ausserhalb des Schirms; die Grenze v_1 ist dann negativ, und der Punkt M_1 liegt auf dem unterhalb der X-Axe gelegenen Kurventheile (Fig. 16). Die Gerade AM_1 und somit die Intensitäten P werden also eine Reihe von Maxima und Minima aufweisen, d. h. es werden Beugungsstreifen auftreten. Die Maxima und Minima von AM_1 entsprechen den Punkten, wo diese Gerade senkrecht auf der Kurve steht. Für einen nahe an A′ gelegenen Punkt weichen die Normalen zur Kurve, welche durch A gehen, nur wenig von der Geraden AA′ ab. Da diese Gerade mit OX einen Winkel $= \frac{\pi}{4}$ einschliesst, so schliesst die Tangente in einem Punkte, welcher einem Maximum oder Minimum entspricht, mit OX einen Winkel ein, der gegeben ist durch

$$-\frac{\pi}{4} + K\pi.$$

Dieser Winkel, als Funktion von v ausgedrückt, ist aber gleich $\frac{\pi}{2} v^2$; somit erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\pi}{2} v^2 = -\frac{\pi}{4} + K\pi,$$

welche für v^2 den Werth liefert:

$$v^2 = 2\,K - \frac{1}{2}\cdot$$

Diese Formel gibt uns näherungsweise die Werthe von v^2, welchen die Maxima und Minima entsprechen.

Sind M_1 und M_2 zwei Punkte, welche einem Maximum und einem darauf folgenden Minimum zugehören, so wird die Differenz der Intensität sein

$$A\,M_1{}^2 - A\,M_2{}^2.$$

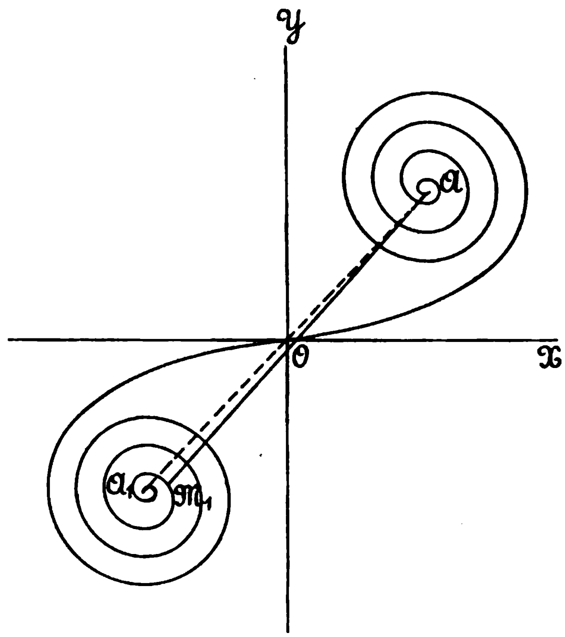

Fig. 16.

Haben wir es mit einem Maximum von hoher Ordnungszahl zu thun, so werden die Punkte M_1 und M_2 einander sehr nahe und zwar ungefähr auf der Geraden $A\,A'$ liegen; wir erhalten dann annäherungsweise

$$A\,M_1 + A\,M_2 = 2\,A\,A'$$

$$A\,M_1 - A\,M_2 = A'\,M_1 + A'\,M_2 = \frac{1}{\pi\,v_1} + \frac{1}{\pi\,v_2},$$

wobei v_1 und v_2 die Werthe von v bedeuten, welche zu M_1 und M_2 gehören. Die Differenz der Intensität ist also gegeben durch

$$\frac{2\,A\,A'}{\pi}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right),$$

somit ändert sich die Differenz zwischen einem Maximum und dem darauf folgenden Minimum ungefähr umgekehrt proportional dem Abstande vom Rande des geometrischen Schattens.

102. Beugung durch einen kleinen kreisförmigen Schirm. — Wir nehmen an, ein Theil der Kugel S werde von einem kleinen, kreisförmigen Schirme bedeckt. Um in diesem Falle die Aenderungen der Lichtintensität in den verschiedenen Punkten einer Ebene zu erhalten, welche in einer Entfernung b vom Mittelpunkte des Schirms liegt, müssen wir, wie früher, die Aenderungen des Integrals

$$(1) \qquad \int\int e^{\frac{i\pi}{2}(u^2+v^2)}\,du\,dv$$

untersuchen, das sich auf alle ausserhalb des Schirmes liegende Punkte der Tangentialebene erstreckt, welche im Punkte Q an die Kugel gelegt ist.

Im Speciellen wollen wir die Beleuchtung des Punktes untersuchen, der auf der Verbindungslinie der Lichtquelle mit dem Mittelpunkte des Schirmes liegt; der Pol des betreffenden Punktes befindet sich dann also im Mittelpunkte des Schirmes.

Setzen wir

$$u = \varrho\cos\varphi, \qquad v = \varrho\sin\varphi,$$

so haben wir

$$\varrho^2 = u^2 + v^2,$$

und da u und v den Abständen eines Punktes der Tangentialebene in Q von zwei aufeinander senkrechten, durch Q gelegten Axen proportional sind, so wird ϱ der Entfernung dieses Punktes von Q proportional sein. Wählen wir also als Koordinaten ϱ und φ, dann haben die Ränder des Schirmes für ϱ einen konstanten Werth a. Das dem Flächeninhalt eines Oberflächenelements proportionale Produkt $du dv$ wird in diesem Koordinatensystem $\varrho d\varrho d\varphi$; demnach ist das Integral, welches die Lichtintensität angibt,

$$(2) \qquad \int_a^\infty\int_0^{2\pi} e^{\frac{i\pi}{2}\varrho^2}\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi.$$

Durch Integration nach φ erhalten wir

$$(3) \qquad 2\pi\int_a^\infty e^{\frac{i\pi}{2}\varrho^2}\,\varrho\,d\varrho,$$

und, wenn wir die Integration nach ϱ ausführen,

$$2\pi \left[\frac{1}{i\pi} e^{\frac{i\pi}{2}\varrho^2}\right]_a^\infty = -2i \left[e^{\frac{i\pi}{2}\varrho^2}\right]_a^\infty .$$

Für die Grenze $\varrho = \infty$ ist der Werth der komplexen Exponentialgrösse unbestimmt; wir wählen hierfür den Werth Null, denn unsere Formeln lassen sich nur auf den Fall anwenden, wo ϱ klein ist, und die Elemente des Integrals (3), welche sehr grossen Werthen von ϱ entsprechen, dürfen nicht in Betracht gezogen werden. Somit finden wir einfach:

$$\int\int e^{\frac{i\pi}{2}(u^2+v^2)}\, du\, dv = 2ie^{\frac{i\pi}{2}a^2} .$$

Der Modul dieser letzteren Exponentialgrösse ist 2; somit hängt die Lichtintensität in dem betrachteten Punkte nicht von a, d. h. von dem Durchmesser des Schirmes ab; sie hat vielmehr denselben Werth, als wenn $a = 0$ wäre, d. h. als wenn gar kein Schirm vorhanden wäre.

Diese Folgerung aus den Beugungsformeln wurde von Poisson gefunden. Fresnel bestätigte durch experimentelle Beobachtungen das Vorhandensein dieses leuchtenden Punktes in der Mitte des geometrischen Schattens, welchen ein kleiner kreisförmiger Schirm wirft.

Es ist leicht einzusehen, dass diese Erscheinung nur bei Anwendung eines kleinen Schirmes auftritt, denn im entgegengesetzten Falle lassen sich unsere Formeln nicht mehr anwenden. Wir sahen nämlich (§ 95), dass die Intensität in einem Punkte von den Werthen ξ_1 und $\frac{\partial \xi_1}{\partial t}$ in den verschiedenen Punkten der Kugel S abhängt, und diese hatten wir als konstant angenommen; dies ist aber nur für den Fall zulässig, dass wir nur einen sehr kleinen Theil der Kugel S betrachten.

103. Beugung durch eine kleine kreisrunde Oeffnung. — In diesem Falle sind die Grenzen des Integrals (3) o und a. Wir erhalten also für die Intensität in einem Punkte, dessen Pol mit dem Mittelpunkte der Oeffnung zusammenfällt, eine Grösse, welche dem Modul von

$$2i\left(1 - e^{\frac{i\pi}{2}a^2}\right)$$

proportional ist.

Der Modul des ersten Faktors ist 2, derjenige des zweiten Faktors variirt gleichzeitig mit dem Werthe von a zwischen 0 und 2, und zwar ist er Null für $a^2 = 4\,K$, wobei K eine ganze Zahl bedeutet, und 2 für $a^2 = 4\,K + 2$. Wir haben also, je nach dem Radius der Oeffnung, in ein und demselben Punkte des Raumes Dunkelheit oder Helligkeit. Um diesen Punkt herum erhalten wir Streifen, welche aus Gründen der Symmetrie kreisförmig sein müssen.

104. Beugung bei parallelem Lichte. — Ein besonders interessanter Fall der Beugung ist derjenige, wo man die Erscheinungen in grosser Entfernung von einem Schirme beobachtet, der auch seinerseits weit von der Lichtquelle entfernt ist.

Die eine Verschiebungskomponente eines Punktes P (Fig. 17) ist gegeben durch den reellen Theil des Ausdrucks

$$\xi = e^{-i\alpha Vt} \int X \frac{e^{i\alpha r}}{r} d\omega,$$

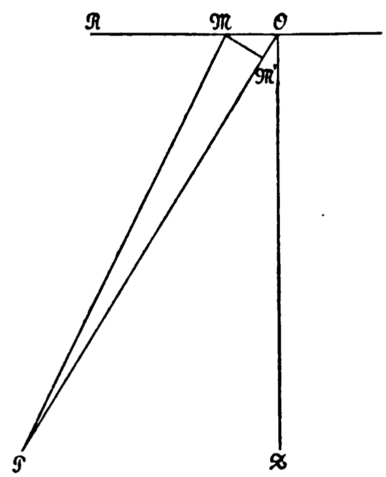

Fig. 17.

wobei X eine Funktion der Verschiebung ξ_1 eines zur Ebene R gehörigen Punktes bedeutet, und das Integral über alle Punkte dieser Ebene zu erstrecken ist. Befand sich der Schirm nicht in grosser Entfernung von der Lichtquelle, so hatte, wie wir sahen, nur derjenige Theil der Kugel einen Einfluss auf die Beleuchtung dieses Punktes, welcher dem Pole des Punktes P benachbart war. Dasselbe wird eintreten, wenn der Radius der Kugel unendlich gross wird, und wir haben bei der Untersuchung der Beleuchtung des Punktes P auch nur diejenigen Punkte der Ebene R zu betrachten, welche nahe am Fusspunkt des von P auf die Ebene gefällten Perpendikels liegen. Demnach dürfen wir die Funktion X als konstant ansehen und sie vor das Integralzeichen setzen. Da ferner der Punkt P sehr weit von der Ebene entfernt sein sollte, so werden seine Abstände PO und PM von zwei einander benachbarten Punkten M und O nur wenig von einander verschieden sein, und wir können annehmen, dass der Faktor $\frac{1}{r}$ für alle Elemente des Integrals, die nicht vernachlässigt werden dürfen, dieselbe Grösse besitzt. Nennen wir also r_0 die Entfernung zwischen P und einem beliebigen Punkte O der Ebene Q, dann ist

$$\int X \frac{e^{i\alpha r}}{r} d\omega = \frac{X}{r} \int e^{i\alpha r}\, d\omega = X \frac{e^{i\alpha r_0}}{r} \int e^{i\alpha(r - r_0)}\, d\omega.$$

105. Mit Hülfe derselben Untersuchungen, wie wir sie in § 95 angestellt hatten, liesse sich nachweisen, dass die Lichtintensität in den verschiedenen Theilen einer zu R parallelen Ebene dem Quadrate des Moduls des Integrals

$$\int e^{i\alpha(r-r_0)}\,d\omega \tag{1}$$

proportional ist.

Dies Integral wollen wir umformen. Zu diesem Zwecke fällen wir vom Punkte M auf OP das Perpendikel MM' und bezeichnen mit P den Winkel OPM, mit r den Abstand PM; dann ist

$$\mathrm{PM}' = r\cos \mathrm{P} = r - r(1-\cos \mathrm{P}) = r - 2r\sin^2\frac{\mathrm{P}}{2}\,.$$

Da wir nur Punkte in der Ebene R berücksichtigen, welche einander sehr nahe liegen, so ist der Winkel P sehr klein, demnach ist $\sin^2\frac{\mathrm{P}}{2}$ das Quadrat einer sehr kleinen Grösse, und wenn wir auch r sehr gross angenommen hatten, so wird doch das Produkt $2r\sin^2\frac{\mathrm{P}}{2}$ zu vernachlässigen sein. Somit ist $\mathrm{PM}' = r$ und $\mathrm{OM}' = r_0 - r$.

Wir wollen nun in der Ebene R zwei durch O gehende, senkrecht auf einander stehende Koordinatenaxen annehmen; bezeichnen wir dann mit x und y die Koordinaten von M und mit l und m die Kosinus der Winkel, welche OP mit den Koordinatenaxen einschliesst, dann erhalten wir für OM', d. h. für die Projektion von OM auf OP,

$$\mathrm{OM}' = lx + my\,,$$

und somit

$$r_0 - r = lx + my.$$

Führen wir diesen Werth in das Integral (1) ein, so geht dasselbe über in

$$\int e^{-i\alpha(lx+my)}\,d\omega;$$

da jedoch nur das Quadrat des Moduls dieses Integrals in Betracht kommt, so können wir statt dessen das Integral

$$\int e^{i\alpha(lx+my)}\,d\omega \tag{2}$$

setzen, das denselben Modul besitzt.

106. Streifen, welche durch eine Oeffnung mit einem Symmetriecentrum hervorgebracht werden. — Im Allgemeinen sind die Minima der Lichtintensität nicht Null, denn der Modul unseres Integrals kann nur verschwinden, wenn der reelle und der imaginäre Theil gleichzeitig Null wird, was im Allgemeinen nicht der Fall ist. Wird die Beugungserscheinung aber durch eine Oeffnung mit einem Symmetriecentrum hervorgebracht, so sind diese Minima gleich Null.

Nehmen wir an, der Punkt O sei das Symmetriecentrum der Oeffnung, so muss das Integral

$$\int e^{i\alpha(lx + my)}\, d\omega,$$

das auf alle Punkte der Oeffnung zu erstrecken ist, denselben Werth beibehalten, wenn man x mit $-x$ und y mit $-y$ vertauscht. Bei dieser Vertauschung geht aber das Integral über in

$$\int e^{-i\alpha(lx + my)}\, d\omega.$$

Der imaginäre Theil dieses Integrals besitzt das entgegengesetzte Vorzeichen, wie der imaginäre Theil des vorhergehenden Integrals, und da sie beide denselben Werth haben, so ist der imaginäre Theil Null, und jedes der Integrale reducirt sich auf den reellen Theil

$$\int \cos \alpha\, (lx + my)\, d\omega\,.$$

Dies Integral ist reell und hat nicht immer das gleiche Vorzeichen; es kann also Null werden, und somit werden bei homogenem Lichte die Intensitätsminima streng Null sein.

107. Beugung durch ähnliche Oeffnungen. — Bezeichnen wir mit δ den Winkel, den die Richtung OP (Fig. 17) mit der in O auf der Ebene der Oeffnung errichteten Senkrechten einschliesst, dann können wir nachweisen, dass, wenn man die Oeffnung durch eine ähnliche ersetzt, deren Dimensionen zur ersteren im Verhältnisse K stehen, der Ablenkungswinkel δ, welcher einem und demselben Streifen entspricht, umgekehrt proportional zu K ist.

Sind x und y die Koordinaten eines Punktes der ersten Oeffnung, dann hat der entsprechende Punkt der ähnlichen Oeffnung die Koordinaten Kx und Ky. Die Lichtintensität in einem Punkte P, dem die Richtungskosinus l und m entsprechen, ist bei der ersten Oeffnung proportional dem Quadrat des Moduls von

$$\int e^{i\alpha(lx + my)}\, d\omega,$$

und bei der zweiten Oeffnung proportional dem Quadrate des Moduls von

$$\int e^{i\alpha K(lx+my)} K^2 \, d\omega.$$

Fassen wir nun einen Punkt P_1 in's Auge, der in der gleichen Entfernung von der Ebene R liegt, während die Kosinus der Winkel, welche OP_1 mit der X- und Y-Axe einschliesst, $\frac{l}{K}$ und $\frac{m}{K}$ sind, so wird bei Anwendung der zweiten Oeffnung die Lichtintensität in dem Punkte P proportional dem Quadrate des Moduls von

$$\int e^{i\alpha(lx+my)} K^2 \, d\omega$$

sein.

Diese Intensität wird proportional der Intensität im Punkte P sein, wenn derselbe durch den ersten Spalt erleuchtet wird, und die Maxima und Minima der Intensitäten werden gleichzeitig auftreten. Wir wollen nun den Sinus des zum Punkte P_1 gehörigen Ablenkungswinkels δ_1 bestimmen. Nennen wir φ den Winkel, welchen die Ebene POZ mit der XZ-Ebene einschliesst, so ist

$$l = \sin\delta \cos\varphi; \qquad m = \sin\delta \sin\varphi,$$

und in Folge dessen

$$\sin^2\delta = l^2 + m^2.$$

Für den Punkt P_1 erhalten wir

$$\sin^2\delta_1 = \frac{l^2}{K^2} + \frac{m^2}{K^2} = \frac{\sin^2\delta}{K^2}.$$

Ersetzen wir also eine Oeffnung durch eine andere, welche K Mal so gross ist, so haben wir den Sinus des Ablenkungswinkels, welcher einem und demselben Streifen entspricht, durch K zu dividiren; die Beugungsebene bleibt im Uebrigen dieselbe, da sich der Quotient $\frac{l}{m}$ nicht ändert.

Somit bringen ähnliche Oeffnungen auch ähnliche Beugungsfiguren hervor, aber die Dimensionen dieser Figuren sind umgekehrt proportional den Dimensionen der Oeffnungen.

108. Satz von Bridge. — Ist ein Schirm von mehreren identischen und ähnlich orientirten Oeffnungen durchbrochen, so ist die Intensität in einem Punkte gleich der von einer einzigen Oeffnung herrührenden Intensität, multiplicirt mit der Intensität, welche die Gesammtheit von Lichtpunkten hervorbringen würde, die ebenso in der Ebene vertheilt sind, wie die Oeffnungen.

Die Intensität in einem Punkte P ist proportional dem Quadrate des Moduls des Integrals

$$(1) \qquad \int e^{i\alpha(lx+my)}\,d\omega,$$

das auf alle erleuchteten Theile des Schirmes auszudehnen ist; dies Integral wird also aus einer Summe von Integralen derselben Form bestehen, von denen sich jedes über die Oberfläche einer Oeffnung erstreckt. Da diese Oeffnungen der Gestalt und Lage nach einander gleich sind, so entspricht immer einem Punkte x, y der einen ein Punkt $x+a$, $y+b$ einer anderen Oeffnung, und man erhält somit alle Punkte der letzteren, wenn man x und y alle Werthe annehmen lässt, welche diese Variabeln in der ersten Oeffnung annehmen können. Demnach ist der Theil des Integrals (1), welcher einer beliebigen Oeffnung entspricht, gleich

$$\int e^{i\alpha[l(a+x)+m(b+y)]}\,d\omega = e^{i\alpha(la+mb)}\int e^{i\alpha(lx+my)}\,d\omega,$$

wobei diese Integrale auf die ganze Oberfläche einer dieser Oeffnungen zu erstrecken sind. Der Werth des Integrals (1) ist also gegeben durch das Produkt

$$\left(1+e^{i\alpha(la+mb)}+\ldots\ldots\right)\int e^{i\alpha(lx+my)}\,d\omega,$$

das man auch schreiben kann

$$\sum e^{i\alpha(la+mb)}\int e^{i\alpha(lx+my)}\,d\omega.$$

Nun ist aber das Quadrat des Moduls des ersten Faktors proportional der Lichtintensität, welche von n Punkten herrührt, die ebenso über die Ebene vertheilt sind, wie die Oeffnungen des Schirmes, während das Quadrat des Moduls des Integrals proportional der Intensität ist, welche eine einzige Oeffnung liefert. Der Satz von Bridge ist somit bewiesen.

109. Satz von Babinet. — Zwei komplementäre Schirme, d. h. solche, bei denen die Oeffnungen des einen den Wandungen des anderen entsprechen, liefern für einen Punkt des Raumes die gleiche Beleuchtung, abgesehen von dem Falle, wo der Punkt auf der Geraden OZ liegt.

Wir wollen mit R den beleuchteten Theil des ersten Schirmes, mit R′ denjenigen des zweiten Schirmes bezeichnen. Da nun den nicht beleuchteten Theilen des ersten Schirmes die beleuchteten

Theile des zweiten entsprechen, so muss die Summe von R und R′ die ganze Ebene repräsentiren. Nun wird bei Anwendung des ersten Schirmes die Lichtintensität in einem Punkte des Raumes proportional dem Quadrate des Moduls vom Integral

$$\int e^{i\alpha(lx+my)}\,d\omega$$

sein, welches über den ganzen leuchtenden Theil des Schirmes auszudehnen ist. Bei Anwendung des zweiten Schirmes wird man, um die Intensität zu erhalten, das Integral auf alle Punkte des beleuchteten Theils R′ des Schirmes auszudehnen haben. Als Summe dieser beiden Integrale erhalten wir das Integral, das über die ganze Ebene zu erstrecken ist, d. h.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha(lx+my)}\,d\omega.$$

Das Quadrat des Moduls dieses Integrals gibt die Beleuchtung, die von einer sehr grossen Oeffnung herrührt; wie wir aber bei Besprechung der ähnlichen Oeffnungen sahen, sind die Ablenkungswinkel um so kleiner, je grösser die Dimensionen der Oeffnung sind. Bei einer sehr grossen Oeffnung werden die Ablenkungen sehr klein sein, d. h. wir erhalten kein merkbares Licht ausser in der Richtung der Z-Axe.

Unser Integral ist also Null für alle Punkte des Raumes, welche nicht der OZ-Axe benachbart sind. Demnach werden sich für alle diese Punkte die Integrale, welche zur Bestimmung der Lichtintensität in einem Punkte dienen, nur durch das Vorzeichen von einander unterscheiden und das Quadrat ihres Moduls wird in beiden Fällen denselben Werth haben; die Lichtintensität in diesen Punkten wird also die gleiche sein.

110. Beugung durch verlängerte Oeffnungen. — Nehmen wir an, wir ersetzten die Oeffnung in einem Schirm durch eine andere, welche wir aus der ersteren dadurch erhalten, dass wir die Ordinaten eines jeden Punktes der ersteren Oeffnung mit derselben Grösse K multipliciren, ohne gleichzeitig die Abscissen zu ändern, dann geht bei einer derartigen Umänderung ein Quadrat in ein Rechteck, ein Kreis in eine Ellipse über.

Die Lichtintensität in einem Punkte des Raumes ist bei der Anwendung der zweiten Oeffnung proportional dem Quadrate des Moduls vom Integral

$$\int e^{i\alpha(lx + m\mathrm{K}y)}\,\mathrm{K}\,d\omega.$$

Demnach wird die durch die zweite Oeffnung hervorgebrachte Lichtintensität in einem Punkte P_1, welchem die Kosinus l und $\frac{m}{K}$ entsprechen, Kmal so gross sein, als die durch die erste Oeffnung gelieferte Intensität in einem Punkte P, welcher durch die Richtungskosinus l und m von OP bestimmt ist.

Wenn wir in der durch P gehenden, zur Ebene R (Fig. 17) parallelen Ebene Koordinatenaxen legen, welche den in der Ebene R gezogenen Axen X und Y parallel sind, so sind die Koordinaten x_1 und y_1 von P in Bezug auf das neue Koordinatensystem gleich den Koordinaten der Projektion dieses Punktes auf die Ebene R. Die Richtungskosinus von OP sind l, m und $\cos\delta$; bezeichnen wir also mit z die Entfernung des Punktes P von der Ebene R, so haben wir

$$x_1 = \frac{lz}{\cos\delta}; \quad y_1 = \frac{mz}{\cos\delta},$$

oder, wenn wir $\cos\delta$ durch seinen Werth in Funktion von l und m ausdrücken:

$$x_1 = \frac{lz}{\sqrt{1 - l^2 - m^2}}; \quad y_1 = \frac{mz}{\sqrt{1 - l^2 - m^2}}.$$

Ersetzt man also eine Oeffnung durch eine andere, deren Ordinaten Kmal so gross sind, so werden die Koordinaten des Punktes, dessen Intensität Kmal so gross ist als diejenige, welche bei Anwendung der ursprünglichen Oeffnung im Punkte x_1, y_1 herrschte,

$$x_1' = \frac{lz}{\sqrt{1 - l^2 - \frac{m^2}{K^2}}}; \quad y_1' = \frac{mz}{K\sqrt{1 - l^2 - \frac{m^2}{K^2}}}.$$

Dieser Punkt hat sich also der Axe X_1 genähert.

Die Ablenkungen sind im Allgemeinen so klein, dass wir l^2 und m^2 vernachlässigen dürfen, somit wird

$$x_1 = lz; \quad y_1 = mz,$$

$$x_1' = lz; \quad y_1' = \frac{mz}{K},$$

also

$$x_1' = x_1; \quad y_1' = \frac{y_1}{K}.$$

Die Abscisse des Punktes, welche einem Maximum der Intensität entspricht, ist also ungeändert geblieben, während die Ordinate Kmal so klein geworden ist. Man kann somit die neuen Beugungsfiguren dadurch aus den alten herleiten, dass man die Ordinaten aller Punkte mit $\frac{1}{K}$ multiplicirt.

Nehmen wir, um einen speciellen Fall herauszugreifen, an, dass die ursprüngliche Oeffnung kreisförmig sei, so werden aus Gründen der Symmetrie auch die Beugungsstreifen Kreise sein. Multipliciren wir die Ordinaten der verschiedenen Punkte der Oeffnung mit K, dann geht die Gestalt dieser Oeffnung in eine Ellipse über; um nun die neuen Beugungsfiguren zu erhalten, haben wir die Ordinaten der alten Streifen mit $\frac{1}{K}$ zu multipliciren, die Streifen werden also ebenfalls zu Ellipsen.

Eine elliptische Oeffnung bringt somit auch elliptische Beugungsfiguren hervor, welche der Oeffnung ähnlich sind, aber umgekehrt liegen, und zwar so, dass die grosse Axe der Beugungsstreifen parallel der kleinen Axe der Oeffnung ist.

Bei Anwendung eines sehr langen Spalts werden die Punkte, in denen die Intensität Null ist, der Axe X_1 sehr nahe liegen, denn man kann sich denken, dass ein derartiger Spalt aus einem Quadrat entstanden ist, dessen zur Y-Axe parallele Seiten man mit einer sehr grossen Zahl K multiplicirt hat. Man wird daher Beugungserscheinungen hier nur in der XZ-Ebene beobachten, d. h. in einer zur Längsrichtung des Spalts senkrechten Ebene.

111. Beugung durch einen Spalt oder einen Schirm von rechteckiger Form. — Wir wollen die Dimensionen des Spalts mit 2a und 2b bezeichnen. Um nun die durch diese Oeffnung in einem Punkte P hervorgerufene Lichtintensität zu erhalten, haben wir das Integral

$$\int e^{i\,\alpha\,(l\,x\,+\,m\,y)}\,d\omega = \int e^{i\,\alpha\,(l\,x\,+\,m\,y)}\,dx\,dy$$

zu betrachten, das über den ganzen Spalt zu erstrecken ist. Nehmen wir nun an, der Koordinaten-Anfangspunkt falle mit dem Mittelpunkt des Spalts zusammen, dann erhalten wir für x die Integrationsgrenzen $-a$ und $+a$, für y die Grenzen $-b$ und $+b$. Da die Integrationsgrenzen konstant sind, so ist das obige Integral das Produkt aus zwei einfachen Integralen nach x bezw. nach y, wir müssen also den Modul des Produktes

$$\int_{-a}^{+a} e^{i\alpha l x}\,dx \int_{-b}^{+b} e^{i\alpha m y}\,dy$$

suchen. Zur Vereinfachung setzen wir

(1) $$\alpha l = u; \quad \alpha m = v;$$

dann erhalten wir

$$\int_{-a}^{+a} e^{i u x}\,dx \int_{-b}^{+b} e^{i v y}\,dy.$$

Das erste Integral dieses Produktes hat den Werth

$$\frac{e^{iau} - e^{-iau}}{iu} = \frac{2\sin au}{u},$$

das zweite wird

$$\frac{e^{ibv} - e^{-ibv}}{iv} = \frac{2\sin bv}{v},$$

und für das Produkt der beiden finden wir

$$4\,\frac{\sin au}{u} \cdot \frac{\sin bv}{v} = 4\,ab\,\frac{\sin au}{au} \cdot \frac{\sin bv}{bv}.$$

Die Lichtintensität wird also proportional sein der Grösse

(2) $$\left(\frac{\sin au}{au}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin bv}{bv}\right)^2.$$

Diese Intensität wird Null, wenn einer der Sinus Null wird, d. h. für

(3) $$au = K\pi \quad \text{oder} \quad bv = K'\pi,$$

wo K und K′ beliebige ganze Zahlen exklusive der Null bedeuten. Ist nämlich $K = 0$ oder $K' = 0$, so ist der Werth von $\frac{\sin au}{au}$ bezw. $\frac{\sin bv}{bv} = 1$, somit ist die Intensität nicht gleich Null, sondern ein Maximum, da 1 absolut genommen der grösste Werth ist, welchen jeder der Faktoren annehmen kann. Wenn aber K und K′ den Werth Null haben, so ist auch $u = v = 0$ und somit ebenfalls $l = m = 0$; dann aber liegt der Punkt, dessen Beleuchtung wir suchen, auf der Axe OZ (Fig. 17), d. h. auf einer Geraden, welche im Mittelpunkte des

Spalts auf der Ebene des Spalts senkrecht steht. In jedem Punkte dieser Geraden ist also die Lichtintensität ein Maximum.

112. Die Werthe von l und m, welche den Minima der Intensität entsprechen, erhalten wir, wenn wir in den Bedingungsgleichungen (3) u und v durch ihre Werthe (1) ersetzen; wir finden auf diese Weise

$$l = \frac{K\pi}{a\alpha}; \qquad m = \frac{K'\pi}{b\alpha}.$$

Wählt man in der Beobachtungsebene zwei Axen parallel zu den X- und Y-Axen, die sich auf OZ schneiden, so sind, wie wir in § 110 sahen, die Koordinaten x_1 und y_1 eines Punktes proportional l und m. Somit liegen die Punkte mit der Intensität Null auf äquidistanten Geraden, welche zu einer der Koordinatenaxen parallel sind. Wir erhalten also die Erscheinung eines Netzwerkes von rechtwinkeligen Maschen, in dessen Mittelpunkt die Lichtintensität ein Maximum ist. Die einzelnen Maxima nehmen mit der Entfernung von den Koordinatenaxen, d. h. mit der Zunahme von u und v ungemein rasch ab, da der Ausdruck (2), welchem die Intensität proportional ist, das Produkt $u^2 v^2$ im Nenner enthält. In der Richtung der Axen selbst, welche durch Punkte gebildet werden, die den Grössen $K = 0$ und $K' = 0$ entsprechen, erhält man ein helles Kreuz.

Nach dem Satze von Babinet finden wir dieselbe Erscheinung, wenn wir statt des rechteckigen Spaltes einen ebensolchen Schirm nehmen.

Hat eine der Dimensionen des Spalts eine beträchtliche Ausdehnung, so tritt nach § 110 die Erscheinung nur in der Ebene auf, welche auf der Längsrichtung des Spaltes senkrecht steht; man sieht dann eine Reihe von Streifen von der Intensität Null, welche durch Lichtstreifen getrennt sind, deren Helligkeit mit der Entfernung vom mittleren Streifen sehr rasch abnimmt. Die Rechnung zeigt, dass die Intensität des zweiten Maximum nur den zwanzigsten Theil von derjenigen des ersten beträgt.

Dieselben Erscheinungen lassen sich mit einem Faden hervorrufen.

113. Beugungserscheinungen bei n Lichtpunkten, die unregelmässig in einer Ebene vertheilt liegen. — Nennen wir a und b die Koordinaten eines dieser Punkte, welche alle die gleiche Intensität haben sollen, so ist die Lichtintensität in einem Punkte des Raumes proportional dem Quadrate des Moduls der Summe

$$\sum e^{i(ua+vb)}.$$

Nun ist das Produkt aus zwei konjugirten komplexen Grössen gleich dem Quadrate des Moduls der einen dieser komplexen Grössen; die Lichtintensität wird also proportional sein

$$\sum e^{i(ua+vb)} \sum e^{-i(ua+vb)} = \sum e^{i[u(a-a')+v(b-b')]},$$

wobei a' und b' die Koordinaten irgend eines zweiten der leuchtenden Punkte bezeichnen.

Sind n leuchtende Punkte vorhanden, so erhalten wir n^2 solcher Ausdrücke; bei n derselben ist $a = a'$, $b = b'$; der Werth einer solchen Grösse ist daher 1. Für die übrigen $n^2 - n$ Glieder ist der Modul 1 und das Argument $u(a-a') + v(b-b')$. Dies Argument kann alle möglichen Werthe annehmen, da die Punkte unregelmässig vertheilt liegen. Nun ist aber bekanntlich der Mittelwerth von $e^{i\varphi}$ Null, wenn φ alle möglichen Werthe annehmen kann, somit wird auch die Summe unserer $n^2 - n$ in Frage kommenden Glieder Null. Die Intensität in einem Punkte, der von den n Punkten gleicher Intensität beleuchtet wird, ist also konstant, und zwar n Mal so gross als diejenige Intensität, welche ein einziger leuchtender Punkt hervorrufen würde.

114. Beugungserscheinungen bei n Oeffnungen. — Wir wollen nun n Oeffnungen von gleicher Grösse und Gestalt betrachten, die gleich orientirt, aber unregelmässig über die Ebene vertheilt sind. Dann wird nach dem Satze von Bridge (§ 108) die Intensität durch das Produkt aus zwei Faktoren gegeben sein, von welchen der eine der von einer einzigen Oeffnung herrührenden Lichtintensität proportional ist, während der andere Faktor der Intensität von n leuchtenden Punkten proportional ist, welche ebenso über die Ebene vertheilt sind, wie die Oeffnungen. Ist die Vertheilung dieser Oeffnungen aber unregelmässig, so wird nach dem vorhergehenden Paragraphen der zweite Faktor gleich dem $n$fachen der Intensität sein, welche von einer einzigen Oeffnung herrührt.

Der Babinet'sche Satz sagt aus, dass dasselbe bei n Schirmen eintreten würde. Haben wir es im speciellen Falle mit n kleinen kreisrunden Schirmen zu thun, so müssen wir dieselbe Erscheinung erhalten, wie bei einem einzelnen Schirme, nur werden die Maxima der Lichtintensität n Mal so gross geworden sein. Diese Thatsache lässt sich experimentell dadurch nachweisen, dass man das Objektiv eines astronomischen Fernrohres mit Lycopodiumsamen bestäubt;

man erhält dann bei der Beobachtung mit homogenem Lichte dunkele und helle Streifen.

115. Erscheinung bei zwei Punkten von gleicher Intensität. — Wir wählen als X-Axe die durch beide Punkte gehende Gerade, und als Y-Axe die Senkrechte in der Mitte des Abstandes beider Punkte; dann sind die Koordinaten des einen Punktes a und 0, diejenigen des anderen Punktes $-a$ und 0. Die Lichtintensität in einem Punkte des Raumes wird proportional dem Quadrate des Moduls von

$$e^{iau} - e^{-iau}$$

sein, also proportional $\cos^2 au$. Die Intensitätsminima treten dann auf für

$$u = \frac{(2K+1)\pi}{2a},$$

sind regelmässig vertheilt und haben den Werth Null; sie rühren von der Interferenz der Strahlen her. Die Intensitätsmaxima sind ebenfalls regelmässig vertheilt, haben gleichen Werth und entsprechen den Punkten

$$u = \frac{K\pi}{a}.$$

116. Erscheinung bei zwei kreisrunden Oeffnungen oder Schirmen. — Bezeichnen wir die Lichtintensität in einem Punkte bei Vorhandensein einer einzigen Oeffnung mit J und den Abstand der Mittelpunkte beider Oeffnungen mit $2a$, so ist die von beiden Oeffnungen gelieferte Intensität proportional

$$J \cos^2 au.$$

Die Aenderungen des ersten Faktors bestimmen ein System von concentrischen Streifen, diejenigen des zweiten Faktors rufen geradlinige Streifen hervor.

117. Erscheinung bei zwei rechteckigen Spalten. — Nach § 111 ist die Intensität, welche von einem Spalte von der Breite $2b$, und einer verhältnissmässig grossen Höhe herrührt, proportional

$$\left(\frac{\sin bu}{bu}\right)^2.$$

Somit erhalten wir bei zwei gleichen Spalten, die sich in einem Abstande $2a$ von einander befinden,

$$\left(\frac{\sin bu}{bu}\right)^2 \cos^2 au.$$

Die Intensitätsminima, welche Null sind, treten ein für

$$u = \frac{K\pi}{b}; \qquad u = \frac{(2K+1)\pi}{2a}.$$

Den durch die erste Gleichung bestimmten Werthen von u entsprechen Beugungsstreifen, den durch die zweite Gleichung bestimmten Interferenzstreifen. Da a grösser ist als b, so liegen die Interferenzstreifen näher an einander, als die Beugungsstreifen, und zwischen je zweien der letzteren finden sich immer mehrere der ersteren Art.

118. Erscheinung bei n äquidistanten, in gerader Linie liegenden Punkten. — Wir bezeichnen mit $2a$ den Abstand zweier aufeinanderfolgender Punkte, und wählen als X-Axe die Gerade, welche alle Punkte verbindet. Der Koordinatenanfang möge mit dem ersten dieser Punkte zusammenfallen; dann sind die Abscissen der verschiedenen Punkte

$$0, \quad 2a, \quad 4a, \ldots\ldots 2(n-1)a,$$

und das Integral, von welchem das Quadrat des Moduls proportional der Intensität ist, wird

$$1) \qquad 1 + e^{2iau} + e^{4iau} + \ldots\ldots e^{2(n-1)au}.$$

Die Glieder dieser Summe bilden eine geometrische Reihe, deren Quotient e^{2iau} ist; als Werth der Summe erhalten wir somit

$$\frac{e^{2niau} - 1}{e^{2iau} - 1}.$$

Der Modul dieses Bruches ändert sich nicht, wenn man den Zähler oder den Nenner mit einer Grösse multiplicirt, deren Modul 1 ist. Multipliciren wir in unserem Falle den Zähler mit e^{-niau}, den Nenner mit e^{-iau}, so erhalten wir

$$\frac{e^{niau} - e^{-naiu}}{e^{iau} - e^{-iau}};$$

dieser Ausdruck lässt sich auch schreiben

$$\frac{\sin nau}{\sin au};$$

die Intensität in einem Punkte wird also dem Quadrate dieser Grösse, d. h.

$$\frac{\sin^2 n a u}{\sin^2 a u} \tag{2}$$

proportional sein.

Diese Funktion haben wir zu untersuchen. Sie ist periodisch, denn wenn wir u um $\frac{\pi}{a}$ wachsen lassen, nimmt au um π und nau um $n\pi$ zu; der absolute Werth der Sinus bleibt hierbei also ungeändert.

Für

$$u = \frac{K \pi}{n a}$$

wird der Zähler Null, und die Funktion selbst wird Null, wenn nicht auch gleichzeitig der Nenner Null ist; dies letztere tritt für diejenigen Werthe von K ein, welche ein Vielfaches von n darstellen. Um den Werth der Funktion in diesem letzteren Falle zu erhalten, genügt es, wegen der Periodicität der Funktion, zu untersuchen, welchen Werth sie für $K = 0$ erhält; dann aber wird

$$\frac{\sin^2 n a u}{\sin^2 a u} = \frac{n^2 a^2 u^2}{a^2 u^2} = n^2.$$

Die Intensität ist somit proportional n^2, und zwar ist dies ein absolutes Maximum der Intensität, denn da der Modul eines jeden Gliedes der Summe (1) höchstens gleich 1 sein kann, so ist der Modul der Summe höchstens gleich n und somit ist der Maximalwerth der Intensität proportional n^2. Diejenigen Maxima, welche einer Intensität entsprechen, die proportional n^2 ist, wollen wir Hauptmaxima nennen.

Zwischen zwei dieser Hauptmaxima wird die Funktion (2) $(n-1)$ Mal Null, und zwischen zwei aufeinanderfolgenden Werthen Null hat sie wenigstens ein Maximum; wir erhalten somit wenigstens $(n-2)$ sekundäre Maxima. Mehr können übrigens auch nicht vorhanden sein; die Funktion ist nämlich ein ganzes Polynom vom Grade $(n-1)$ in Bezug auf $\cos a u$; ihr Differentialquotient nach $\cos a u$ ist also vom $(n-2)$ten Grade und hat nur $(n-2)$ Wurzeln, deren jede einem Maximum oder Minimum entspricht.

Die sekundären Maxima sind sehr unbedeutend und um so weniger deutlich, je grösser n ist. Wir haben nämlich

$$\frac{\sin^2 n a u}{\sin^2 a u} < \frac{1}{\sin^2 a u};$$

hat $\sin a u$ einen endlichen Werth, dann ist die erste Seite der Ungleichung und demnach erst recht die linke Seite sehr klein im Verhältniss zu n^2.

Aber auch wenn $\sin au$ klein ist, d. h. für die Werthe von u, welche nahe an $\frac{K\pi}{a}$ liegen, sind die sekundären Maxima, die sich dann nahe an den Hauptmaxima befinden, nur schwer zu beobachten. Da in diesem Falle au nahezu gleich $K\pi$ ist, so können wir wegen der Periodicität der Funktion annehmen, dass au nur wenig von Null verschieden ist, und statt des $\sin au$ den entsprechenden Bogen setzen; für den Intensitätsfaktor erhalten wir dann

$$\frac{\sin^2 nau}{a^2 u^2}.$$

Eine Untersuchung dieses Faktors ergibt, dass das erste sekundäre Maximum nur den 20. Theil, das zweite nur den 60. Theil des Hauptmaximum beträgt.

119. Gitter. — Ein Gitter besteht aus n parallelen Spalten von gleicher Breite $2b$, deren Abstand von einander $2a$ beträgt. Der Intensitätsfaktor einer einzelnen Spalte ist

$$\frac{\sin^2 bu}{b^2 u^2}, \tag{1}$$

derjenige von n äquidistanten Punkten

$$\frac{\sin^2 nau}{\sin^2 au}; \tag{2}$$

somit wird die von einem Gitter gelieferte Intensität proportional dem Produkte dieser beiden Faktoren sein. Da die Spalten eine zu ihrer Breite verhältnissmässig grosse Höhe besitzen, so werden die Streifen nur in einer zur Längsrichtung der Spalten senkrechten Ebene auftreten.

Genau genommen müssten sich also die von den beiden Faktoren herrührenden Maxima einzeln beobachten lassen; da aber n im Allgemeinen sehr gross ist, so werden die vom Faktor (2) herrührenden Hauptmaxima allein sichtbar sein. Für diese ist

$$u = \frac{K\pi}{a},$$

und die Intensität ist proportional

$$n^2 \frac{\sin^2 \frac{K b \pi}{a}}{\frac{K^2 \pi^2 b^2}{a^2}}. \tag{3}$$

Da bei diesem Ausdruck K^2 im Nenner auftritt, so wird die Intensität der Hauptmaxima abnehmen, wenn man sich von der Normalen zur Gitterebene entfernt.

Ist $\frac{b}{a}$ sehr klein, so wird das Produkt $K \frac{b}{a}$ für eine grosse Anzahl von Werthen von K kleiner als $\frac{1}{2}$ sein. In diesem Falle wird der Zähler von (3) fortwährend abnehmen, und da man nicht mehr als 6 oder 7 Hauptmaxima beobachten kann, so wird die Intensität derselben abnehmen.

Ist b nicht sehr klein, dann kann das Produkt $K \frac{b}{a}$ für Werthe von K, die kleiner sind als 7, grösser werden als $\frac{1}{2}$, und dann nehmen die Hauptmaxima nicht regelmässig ab, da der Zähler von (3) zwischen 0 und 1 hin- und herschwankt.

Wenn b und a kommensurabele Grössen sind, so wird es einen Werth von K geben, für welchen $\sin \frac{K b \pi}{a}$ Null wird; demnach wird das entsprechende Hauptmaximum fehlen. Beispielsweise werden für $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ alle Hauptmaxima von gerader Ordnungszahl fehlen; in diesem speciellen Falle ist der absolute Werth von $\sin \frac{K b \pi}{a}$ gleich 1, wenn K eine ungerade Zahl bezeichnet; die Hauptmaxima von ungerader Ordnungszahl werden proportional $\frac{1}{K^2}$ sein, d. h. sie werden regelmässig abnehmen.

Der undurchsichtige Zwischenraum, welcher zwei Spalten trennt, hat die Grösse $(2a - 2b)$; setzen wir also in unseren Intensitätsformeln $(2a - 2b)$ statt $2b$ oder $a - b$ an Stelle von b, dann erhalten wir die Intensität eines neuen Gitters, welches sich von dem alten nur dadurch unterscheidet, dass die undurchsichtigen Zwischenräume an die Stelle der Spalten getreten sind und umgekehrt. Vertauschen wir in $\sin \frac{K b \pi}{a}$ die Grösse b mit $a - b$, so erhalten wir

$$\sin \frac{K (a - b) \pi}{a} = \sin \left(K \pi - \frac{K b \pi}{a} \right) = \pm \sin \frac{K b \pi}{a}.$$

Somit geht die Formel (3) über in

$$\frac{n^2 \sin^2 \frac{b K \pi}{a}}{\frac{K^2 \pi^2 (a-b)^2}{a^2}}.$$

Wir erhalten also für die Hauptmaxima das gleiche Gesetz der Abnahme, ein Resultat, das sich mit dem Satze von Babinet in vollständiger Uebereinstimmung befindet.

120. Beugungserscheinungen bei weissem Lichte. — Bei unserer Untersuchung hatten wir stets λ als konstant vorausgesetzt, d. h. wir hatten angenommen, dass nur homogenes Licht zur Verwendung gelange. Bei Anwendung von weissem Lichte wird die Lage der Intensitätsmaxima von λ abhängen, wir erhalten also farbige Streifen. Speciell bei den Gittern treten, da die Ablenkungen sehr beträchtlich sind, vollständige Spektra auf, die durch dunkele Zwischenräume von einander getrennt sind.

Kapitel V.

Drehung der Polarisationsebene. — Dispersion.

121. Um zu den Bewegungsgleichungen eines Moleküls in einem elastischen Medium

$$(1)\qquad \begin{aligned} -\varrho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= \sum\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi_x'}\right)\\ -\varrho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= \sum\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \eta_x'}\right)\\ -\varrho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= \sum\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \zeta_x'}\right)\end{aligned}$$

zu gelangen (§ 32), hatten wir angenommen (§ 14), dass in den Ausdrücken für $D\xi$, $D\eta$, $D\zeta$ die Glieder mit Dx^2, Dy^2, Dz^2 vernachlässigt werden dürften, da die Grössen Dx, Dy, Dz von der Grössenordnung des Radius der molekularen Wirkungssphäre sind. Hieraus ergab sich, dass $D\xi$, $D\eta$, $D\zeta$ lineare Funktionen der neun partiellen Differentialquotienten von ξ, η, ζ nach x, y, z waren, und W_2 eine homogene Funktion zweiten Grades von diesen neun Differentialquotienten.

Ferner untersuchten wir (§ 41), was aus den Gleichungen (1) wird, wenn wir es mit isotropen Medien zu thun haben, und fanden (§ 42), dass sich die Bewegung der Moleküle in einem derartigen Medium mit einer konstanten Geschwindigkeit

$$V = \sqrt{\frac{-2\mu}{\varrho}}$$

fortpflanzt.

Nun zeigt das Experiment, dass die Geschwindigkeit des Lichtes, wenn dasselbe ein anderes isotropes Medium als den Aether durchsetzt, von der Wellenlänge λ abhängt. Diese Thatsache legt die Vermuthung nahe, dass die in § 14 gemachte Annahme, welche durch keine theoretische Ueberlegung gerechtfertigt erscheint, verworfen werden muss, wenn es sich um die Fortpflanzung des Lichtes in einem ponderabelen Medium handelt. Verlassen wir diese Hypothese, dann werden die Grössen $D\xi$, $D\eta$, $D\zeta$ die Differentialquotienten verschiedener Ordnung von ξ, η, ζ nach x, y, z enthalten, und die Funktion W_2, welche homogen und vom zweiten Grade (§ 13) in Bezug auf $D\xi$, $D\eta$, $D\zeta$ ist, wird auch homogen und vom zweiten Grade in Bezug auf die partiellen Differentialquotienten verschiedener Ordnung von ξ, η, ζ sein. Wir wollen nachweisen, dass, wenn wir für W_2 eine derartige Funktion wählen, die Bewegungsgleichungen eines Moleküls die Erscheinung der Drehung der Polarisationsebene sowie der Dispersion zu erklären vermögen.

122. Wir bezeichneten mit U die Kräftefunktion der äusseren und inneren Kräfte, welche auf die Moleküle eines von der Oberfläche S (Fig. 18) begrenzten Volumens wirken; dann fanden wir (§ 29) mit Hülfe des Princips von d'Alembert die Gleichung

$$(2) \qquad \delta U = -\int \varrho\, d\tau \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\,\delta\xi + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\,\delta\eta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\,\delta\zeta\right) = 0,$$

welche für jeden beliebigen Werth von $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ erfüllt sein muss.

Der Theil der Funktion U, welcher den inneren Kräften entspricht, ist

$$\int \delta W\, d\tau,$$

derjenige, welcher sich auf die äusseren Kräfte bezieht, die auf die Trennungsfläche S wirken,

$$\int (P_x\,\delta\xi + P_y\,\delta\eta + P_z\,\delta\zeta)\, d\omega;$$

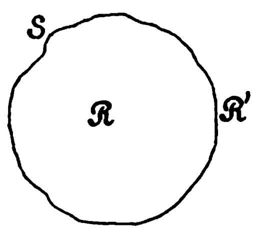

Fig. 18.

hierbei bedeuten P_x, P_y, P_z die Komponenten des Druckes, welcher auf ein Oberflächenelement $d\omega$ ausgeübt wird. Ersetzen wir δU durch die Summe dieser beiden Grössen, so geht die Gleichung (2) über in

$$\int (P_x\,\delta\xi + P_y\,\delta\eta + P_z\,\delta\zeta)\, d\omega$$
$$+ \int \delta W\, d\tau - \int \varrho\, d\tau \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\,\delta\xi + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\,\delta\eta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\,\delta\zeta\right) = 0.$$

Da diese Gleichung für jeden beliebigen Werth von $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$

9*

erfüllt sein muss, so können wir im Speciellen $\delta\eta = \delta\zeta = 0$ setzen, und gelangen somit zur Gleichung

$$\int P_x \delta\xi + \int \delta W \, d\tau - \int \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \delta\xi \varrho \, d\tau = 0, \tag{3}$$

welche für jeden beliebigen Werth von $\delta\xi$ erfüllt sein muss.

123. Das zweite Glied dieser Gleichung wollen wir nun umformen. Im Allgemeinen ist W eine Funktion der partiellen Differentialquotienten verschiedener Ordnung von ξ, η, ζ. Bei einer beliebigen virtuellen Verrückung, die man dem System ertheilt, ändert sich jede dieser Variabeln; ist dagegen, wie wir annahmen, $\delta\eta = \delta\zeta = 0$, so werden sich nur die partiellen Differentialquotienten von ξ ändern. Demnach wird der Zuwachs δW der Funktion W nur von den Zuwachsen abhängen, welche die verschiedenen partiellen Differentialquotienten von ξ erfahren. Zur Vereinfachung der Rechnung wollen wir vorläufig annehmen, dass die einzigen partiellen Differentialquotienten von ξ, welche in W vorkommen, $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$ sind; wir schreiben dieselben ξ' und ξ'' und erhalten somit

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial\xi'} \delta\xi' + \frac{\partial W}{\partial\xi''} \delta\xi'',$$

und demnach

$$\int \delta W \, d\tau = \int \frac{\partial W}{\partial\xi'} \delta\xi' \, d\tau + \int \frac{\partial W}{\partial\xi''} \delta\xi'' \, d\tau.$$

Bekanntlich ist, wie wir schon in § 30 erwähnten,

$$\int \frac{\partial W}{\partial\xi'} \delta\xi' \, d\tau = \int \alpha \frac{\partial W}{\partial\xi'} \delta\xi \, d\omega - \int \delta\xi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial\xi'}\right) d\tau, \tag{4}$$

und

$$\int \frac{\partial W}{\partial\xi''} \delta\xi'' \, d\tau = \int \alpha \frac{\partial W}{\partial\xi''} \delta\xi' \, d\omega - \int \delta\xi' \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial\xi''}\right) d\tau.$$

Führen wir beim zweiten Integral rechter Hand eine analoge Umformung aus, so folgt:

$$\int \frac{\partial W}{\partial\xi''} \delta\xi'' \, d\tau = \int \alpha \frac{\partial W}{\partial\xi''} \delta\xi' \, d\omega - \int \alpha \, \delta\xi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial\xi''}\right) d\omega + \int \delta\xi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial W}{\partial\xi''}\right) d\tau. \tag{5}$$

Addiren wir die rechten Seiten der Gleichungen (4) und (5) und ersetzen in (3) das zweite Integral durch diese Summe, so erhalten wir eine Gleichung mit Integralen, welche auf die Oberfläche S und auf das Volumen R zu erstrecken sind. Die Summe der Doppelintegrale wollen wir mit J bezeichnen; dann wird die Gleichung (3)

$$J - \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi'} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi''} \right) + \varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right] \delta \xi \, d\tau = 0,$$

und da dieselbe für jeden beliebigen Werth von $\delta\xi$ erfüllt sein muss, so muss der unter dem Integral stehende Klammerausdruck Null sein. Wir erhalten also

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi'} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi''} \right).$$

Bezeichnen wir mit W_1 das Glied ersten Grades und mit W_2 das Glied zweiten Grades in der Entwickelung von W nach wachsenden Potenzen von $D\xi$, $D\eta$, $D\zeta$, so können wir diese Gleichung schreiben

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W_1}{\partial \xi'} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial W_1}{\partial \xi''} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi'} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi''} \right).$$

Da nun $D\xi$, $D\eta$, $D\zeta$ vom ersten Grade in Bezug auf die partiellen Differentialquotienten von ξ, η, ζ sind (§ 14), so gilt dasselbe auch für W_1; die Differentialquotienten dieser Funktion nach ξ' und ξ'' werden also Konstanten sein, und die obige Gleichung reducirt sich deshalb auf

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi'} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi''} \right).$$

Dies ist die erste Bewegungsgleichung für ein Molekül; die beiden anderen würden sich auf dieselbe Weise finden lassen.

Die Summe der Integrale, die wir mit J bezeichnet haben, würde uns die Werthe für die Drucke liefern, welche auf die Oberfläche S wirken; wir wollen dieselben jedoch nicht bestimmen.

124. Bewegungsgleichungen. — Wir sind also zu folgender Regel gelangt:

Die Bewegungsgleichungen lassen sich schreiben

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = P; \qquad \varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = Q; \qquad \varrho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = R,$$

wobei P, Q, R lineare Polynome der Differentialquotienten verschiedener Ordnung von ξ, η, ζ bedeuten und folgendermaassen gebildet sind:

Um P zu erhalten, hat man W_2 nach jedem der darin auftretenden Differentialquotienten von ξ zu differentiiren. Der so gefundene Differentialquotient von W_2 ist sodann nach x, y und z zu differentiiren und zwar auf dieselbe Weise, wie der partielle Differentialquotient von ξ gebildet ist, der in Betracht kommt. Beispielsweise differentiirt man

$\frac{\partial W_2}{\partial \xi_x'}$ ein Mal nach x

$\frac{\partial W_2}{\partial \xi_{xx}''}$ zwei Mal nach x

$\frac{\partial W_2}{\partial \xi_{xy}''}$ ein Mal nach x und ein Mal nach y u. s. w.

Sodann versieht man die Differentialquotienten gerader Ordnung mit dem Zeichen $+$, diejenigen ungerader Ordnung mit dem Vorzeichen $-$ und addirt dieselben; man erhält in Folge dessen

$$P = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi_x'}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi_y'}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi_z'}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi_{xx}''}\right) + \cdots\cdots$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi_{xy}''}\right) + \cdots\cdots - \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi_{xxx}'''}\right) - \cdots\cdots$$

Auf dieselbe Weise bildet man das Polynom Q, indem man W_2 nach den partiellen Differentialquotienten von η differentiirt.

In einigen speciellen Fällen vereinfacht sich der Ausdruck des Polynoms P. So treten beispielsweise, wenn das elastische Medium isotrop ist, die Differentialquotienten ungerader Ordnung in P nicht auf. Bei einem derartigen Medium müssen nämlich die Bewegungsgleichungen ungeändert bleiben, wenn man gleichzeitig die Vorzeichen von x, y, z und von ξ, η, ζ ändert. Führt man diese Aenderung aus, so wechselt $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ sein Vorzeichen, demnach müssen auch die verschiedenen Glieder von P ihr Vorzeichen ändern. Dies ist nun zwar der Fall für alle Differentialquotienten gerader Ordnungszahl von ξ nach x, y, z, nicht aber für diejenigen ungerader Ordnung, wie $\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial y}$ etc., denn diese behalten ihren Werth bei, da Zähler und Nenner gleichzeitig ihr Vorzeichen wechseln. Somit dürfen diese Differentialquotienten in dem Ausdrucke des Polynoms P bei einem isotropen Medium nicht auftreten.

Ganz dasselbe tritt ein, wenn das elastische Medium ein Symmetriecentrum besitzt. Auch in diesem Falle darf somit das Polynom P nur die Differentialquotienten von gerader Ordnungszahl enthalten.

125. Drehung der Polarisationsebene durch den Quarz. — Da der Quarz in einer zum hexagonalen System gehörigen hemiedrischen Form krystallisirt, so besitzen seine Krystalle kein Symmetriecentrum.

Nehmen wir nun an, dass die Vertheilung des Lichtäthers in einem ponderabeln Körper identisch ist mit derjenigen der materiellen Moleküle, aus welchen der Körper besteht, so wird der im Quarz enthaltene Aether als ein elastisches Medium aufzufassen sein, das ebenfalls kein Symmetriecentrum besitzt.

Somit kann das Polynom P in den Bewegungsgleichungen für die Aethermoleküle, welche die Fortpflanzung des Lichtes im Quarze vermitteln, die partiellen Differentialquotienten ungerader Ordnungszahl von ξ, η, ζ enthalten. Um zu weitläufige Rechnungen zu vermeiden, nehmen wir noch speciellere Bedingungen an, und wollen nachweisen, dass das Vorhandensein der Differentialquotienten dritter Ordnung bereits genügt, um von der beim Quarz auftretenden Drehung der Polarisationsebene Rechenschaft zu geben.

Wir fassen eine Welle in's Auge, deren Ebene senkrecht zur Krystallaxe gerichtet ist. Wählen wir als XY-Ebene eine zur Wellenfläche parallele Ebene, so hängen die Verschiebungen ξ, η, ζ der Aethermoleküle nur von z und der Zeit t ab, und somit werden die partiellen Differentialquotienten verschiedener Ordnung von ξ, η, ζ nach x und y Null sein. Da ferner die Schwingungen transversal gerichtet sind, so erfordert die Bedingung hierfür auch noch, dass $\zeta_z' = 0$ ist. W_2 wird demnach eine homogene Funktion zweiten Grades von den partiellen Differentialquotienten erster Ordnung ξ_z', η_z' und von den partiellen Differentialquotienten höherer Ordnung von ξ, η, ζ nach z sein. Wir bezeichnen mit W_2' die Gesammtheit derjenigen Glieder von W_2, welche homogen sind in Bezug auf die partiellen Differentialquotienten erster Ordnung, und nehmen der Einfachheit halber an[1]), dass die übrigen Glieder von W_2 Null seien, mit Ausnahme des folgenden:

$$a \frac{\partial \eta}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \,.$$

Durch Anwendung der Regel, welche wir für die Bildung der

[1]) Vgl. das später folgende Kapitel über Doppelbrechung in hemiedrischen Medien, in welchem wir auf diesen Punkt eingehender zurückkommen werden.

rechten Seiten der Bewegungsgleichung aufgestellt hatten (§ 124), erhalten wir die folgenden Gleichungen

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \sum \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W_2'}{\partial \xi_x'} \right) + a \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^3}$$

$$\varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = - \sum \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W_2'}{\partial \eta_x'} \right) - a \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3}.$$

Die von W_2' herrührenden Glieder rechter Hand werden partielle Differentialquotienten zweiter Ordnung von ξ, η, ζ sein, multiplicirt mit einem konstanten Faktor. Unter der Annahme, dass sich diese in der ersten Gleichung auf $\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$, in der zweiten auf $\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}$ reduciren, gehen diese Bewegungsgleichungen über in

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + a \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^3} \tag{1}$$

$$\varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - a \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3}. \tag{2}$$

Diesen Gleichungen wollen wir dadurch zu genügen suchen, dass wir setzen

$$\xi = A e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(z - Vt)}$$

$$\eta = B e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(z - Vt)};$$

die in den Bewegungsgleichungen vorkommenden partiellen Differentialquotienten von ξ und η werden dann

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = A \left(\frac{2\pi i}{\lambda} \right)^2 V^2 e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(z - Vt)}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = B \left(\frac{2\pi i}{\lambda} \right)^2 V^2 e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(z - Vt)}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = A \left(\frac{2\pi i}{\lambda} \right)^2 e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(z - Vt)}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = B \left(\frac{2\pi i}{\lambda} \right)^2 e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(z - Vt)}$$

$$\frac{\partial^3 \eta}{\partial z^3} = \mathrm{B} \left(\frac{2\pi i}{\lambda}\right)^3 e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(z - \mathrm{V}t)}$$

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3} = \mathrm{A} \left(\frac{2\pi i}{\lambda}\right)^3 e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(z - \mathrm{V}t)} .$$

Führt man diese Werthe in die Gleichungen (1) und (2) ein, so erhält man nach Beseitigung der gemeinschaftlichen Faktoren

$$\mathrm{A}(\varrho \mathrm{V}^2 - 1) = a \mathrm{B} \frac{2\pi i}{\lambda} \tag{3}$$

$$\mathrm{B}(\varrho \mathrm{V}^2 - 1) = - a \mathrm{A} \frac{2\pi i}{\lambda} . \tag{4}$$

Eine Division der Gleichung (3) durch die Gleichung (4) ergibt

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = -\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}},$$

oder

$$\mathrm{A}^2 = -\mathrm{B}^2,$$

$$\mathrm{A} = \pm \mathrm{B} i .$$

Wir werden also den Bewegungsgleichungen genügen können, wenn wir für ξ und η die reellen Theile von

$$\xi_1 = \mathrm{B} i e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(z - \mathrm{V}t)}$$

$$\eta_1 = \mathrm{B}\, e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(z - \mathrm{V}t)} ,$$

oder von

$$\xi_2 = -\mathrm{B} i e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(z - \mathrm{V}t)}$$

$$\eta_2 = \mathrm{B}\, e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(z - \mathrm{V}t)}$$

wählen.

Das erste System von Lösungen liefert uns für die Verschiebungen des Aethermoleküls in der Ebene $z = 0$ Ausdrücke von der Form

$$\xi_1 = r \cos(\alpha t + \varphi)$$

$$\eta_1 = r \sin(\alpha t + \varphi) ,$$

das zweite solche von der Form

$$\xi_2 = -r\cos(\alpha t + \varphi)$$

$$\eta_2 = r\sin(\alpha t + \varphi).$$

Um die von dem Molekül in der XY-Ebene beschriebene Kurve zu erhalten, haben wir t aus den Werthen für ξ und η zu eliminiren. Addiren wir die Quadrate von ξ_1 und η_1, sowie diejenigen von ξ_2 und η_2, so finden wir

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = r^2$$

$$\xi_2^2 + \eta_2^2 = r^2.$$

Wie diese beiden Gleichungen zeigen, ist in beiden Fällen die Bahn des Moleküls ein Kreis; da jedoch die Werthe von ξ_1 und von ξ_2 entgegengesetztes Vorzeichen besitzen, so werden die Kreise in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. Wir können also den Vorgang so auffassen, dass sich eine ebene Welle beim Eintritt in den Quarzkrystall in zwei ebene Wellen spaltet, von welchen die eine im einen, die andere im entgegengesetzten Sinne cirkular polarisirt ist. Um die Drehung der Polarisationsebene zu erklären, haben wir nur noch nachzuweisen, dass die Fortpflanzung dieser Wellen mit verschiedener Geschwindigkeit erfolgt.

Setzen wir zu diesem Zwecke in einer der Gleichungen (3) oder (4) $A = Bi$ und $A = -Bi$, so erhalten wir

$$\varrho V^2 - 1 = -a\frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\varrho V^2 - 1 = +a\frac{2\pi}{\lambda}$$

und somit

$$V_1^2 = \frac{1}{\varrho} - \frac{a}{\varrho}\frac{2\pi}{\lambda} \tag{5}$$

$$V_2^2 = \frac{1}{\varrho} + \frac{a}{\varrho}\frac{2\pi}{\lambda}. \tag{6}$$

Da die Grösse a von Null verschieden ist, so erhalten wir für V_1 und V_2 verschiedene Werthe; demnach muss die Polarisationsebene einer ebenen polarisirten Welle bei ihrer Fortpflanzung im Quarze eine Drehung erleiden.

126. Aus den soeben entwickelten Werthen für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der cirkular polarisirten Wellen lässt sich nun leicht das Biot'sche Gesetz über das Drehungsvermögen des Quarzes ableiten, d. h. wir können nachweisen, dass sich das

Drehungsvermögen umgekehrt proportional dem Quadrate der Wellenlänge ändert.

Bezeichnen wir die Dicke der von den Lichtstrahlen durchsetzten Quarzplatte mit e, so wird der Gangunterschied der beiden Strahlen beim Austritte aus der Platte gegeben sein durch

$$\frac{e}{V_1} V - \frac{e}{V_2} V,$$

wobei V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im leeren Raume bedeutet.

Nun wird aber bekanntlich die Drehung der Polarisationsebene 360^0, wenn der Gangunterschied gleich einer Wellenlänge ist. Somit ist die Dicke einer Quarzplatte, welche die Polarisationsebene um 360^0 dreht, gegeben durch die Formel

$$V\left(\frac{e}{V_1} - \frac{e}{V_2}\right) = \lambda,$$

oder

$$e = \frac{\lambda}{V} \cdot \frac{V_1 V_2}{V_2 - V_1}.$$

Subtrahiren wir die Gleichung (6) von der Gleichung (5), so finden wir

$$V_2^2 - V_1^2 = \frac{4\pi}{\lambda} \frac{a}{\varrho},$$

und hieraus folgt:

$$\frac{1}{V_2 - V_1} = \frac{(V_1 + V_2)}{4\pi} \frac{\lambda \varrho}{a}.$$

Durch Einsetzen dieses Werthes in die Gleichung für e folgt aber

$$e = \frac{\lambda^2 V_1 V_2 (V_1 + V_2)}{4\pi V} \frac{\varrho}{a}.$$

Da nun a sehr klein ist, so dürfen wir annäherungsweise in den Werthen für V_1^2 und V_2^2 das zweite Glied rechter Hand gegenüber dem ersten vernachlässigen und erhalten damit

$$V_1 = V_2 = \frac{1}{\sqrt{\varrho}};$$

ersetzen wir V_1 und V_2 durch diesen Werth, so geht der oben gefundene Ausdruck für e über in

$$e = \frac{\lambda^2}{2\pi a V \sqrt{\varrho}}.$$

Die Dicke der Quarzplatte, welche eine Drehung der Polarisationsebene um 360^0 hervorruft, ist also proportional λ^2; hieraus ergibt sich unmittelbar, dass die Drehung, welche eine Platte von der Dicke 1 hervorbringt, umgekehrt proportional dem Quadrate der Wellenlänge ist.

Genauere Experimente haben gezeigt, dass dies Gesetz nicht streng richtig ist; doch darf uns das nicht überraschen, da wir uns bei unseren Rechnungen mit Annäherungen begnügten.

127. Drehung der Polarisationsebene durch Krystalle und Lösungen. — Es gibt eine ganze Anzahl von krystallisirten Substanzen, welche, wenn auch in geringerem Maasse als der Quarz, die Eigenschaft besitzen, die Polarisationsebene des Lichtes zu drehen. Da alle bis jetzt bekannten Krystalle dieser Art Hemiëder sind, so lässt sich die Erklärung, welche wir für das Drehungsvermögen des Quarzes gaben, auch auf sie anwenden. Dagegen kennen wir eine grosse Anzahl von organischen Substanzen, deren Lösungen ebenfalls die Polarisationsebene drehen, und für diese ist die Erklärung der Erscheinung mit mehr Schwierigkeiten verknüpft, da sich die Flüssigkeiten im Allgemeinen wie isotrope Körper verhalten. So hat man denn auch bis jetzt eine völlig befriedigende Erklärung noch nicht gefunden, und wir müssen annehmen, dass diese organischen Substanzen die Isotropie der Flüssigkeiten zerstören, und dass ihre Lösungen, welche eine unendlich grosse Zahl von Symmetrieaxen besitzen, doch kein Symmetriecentrum aufzuweisen haben.

128. Erklärung der Dispersion. — Zunächst wollen wir uns nur mit isotropen Körpern beschäftigen, und mit solchen, welche ein Symmetriecentrum besitzen. Im letzteren Falle wählen wir das Symmetriecentrum zum Koordinatenanfangspunkt, dann werden die rechten Seiten der Bewegungsgleichungen nur partielle Differentialquotienten gerader Ordnungszahl der ξ, η, ζ nach x, y, z enthalten.

Wir betrachten nun eine ebene Welle, die sich in einem derartigen Medium fortpflanzt und wählen als XY-Ebene eine zur Wellenfläche parallele Ebene; dann hängen die Verschiebungen ξ, η, ζ nur von z und t ab, während die einzigen partiellen Differentialquotienten dieser Grössen, welche auf den rechten Seiten der Bewegungsgleichungen auftreten, die partiellen Differentialquotienten gerader Ordnung nach z sind. Die Bedingung dafür, dass die Schwingungen transversal gerichtet sind, nämlich die Gleichung $\Theta = 0$, liefert uns ferner die Identität $\zeta' = 0$; somit sind die partiellen Differentialquotienten von ζ identisch Null, und die rechten Seiten der Bewegungsgleichungen können nur die Grössen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}, \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4}, \frac{\partial^6 \xi}{\partial z^6}, \ldots ; \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}, \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4}, \frac{\partial^6 \eta}{\partial z^6}, \ldots$$

enthalten.

Die erste Bewegungsgleichung

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathrm{P}$$

darf sich nicht ändern, wenn man an Stelle von y setzt $-y$, und an Stelle von η: $-\eta$, vorausgesetzt, dass man es, wie hier, mit einem isotropen Körper zu thun hat, oder mit einem Körper, der ein Symmetriecentrum besitzt, das man als Koordinatenanfangspunkt wählt. Da nun die linke Seite der Gleichung durch eine derartige Substitution ihr Vorzeichen nicht ändert, so können die partiellen Differentialquotienten von η, nämlich $\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}, \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} \ldots$, deren Vorzeichen sich ändern würde, in dem Polynom überhaupt nicht vorkommen; die rechte Seite der Gleichung darf also nur die Differentialquotienten von ξ enthalten. Beschränken wir uns auf die Differentialquotienten unterhalb des achten, so wird unsere Gleichung

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + b \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} + c \frac{\partial^6 \xi}{\partial z^6}.$$

Eine analoge Ueberlegung würde uns als zweite Bewegungsgleichung liefern

$$\varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + b \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} + c \frac{\partial^6 \eta}{\partial z^6}.$$

Wenn wir diesen Gleichungen durch Ausdrücke der Form

$$\xi = \mathrm{A}\, e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(z - \mathrm{V}t)}$$

$$\eta = \mathrm{B}\, e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(z - \mathrm{V}t)}$$

zu genügen suchen, so erhalten wir zwei Bedingungsgleichungen, welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V enthalten. Zum Nachweise dafür, dass diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge λ abhängt, haben wir nur die Differentialquotienten dieser Ausdrücke nach z und t zu bilden und sie in eine der Bewegungsgleichungen einzusetzen; dann finden wir, wenn wir noch den gemeinschaftlichen Faktor

$$\left(\frac{2\pi i}{\lambda}\right)^2 A\, e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(z - Vt)}$$

fortlassen, die Gleichung

$$\varrho V^2 = a + b\left(\frac{2\pi i}{\lambda}\right)^2 + c\left(\frac{2\pi i}{\lambda}\right)^4$$

oder

$$\varrho V^2 = a - \frac{4\pi^2 b}{\lambda^2} + \frac{16\pi^4 c}{\lambda^4}.$$

Da der Brechungsexponent n umgekehrt proportional der Geschwindigkeit ist, so werden wir eine dem Brechungsexponent n proportionale Grösse erhalten, wenn wir die $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\text{te}}$ Potenz der rechten Seite dieser Gleichung bilden; wir können also setzen:

$$n = A_0 + \frac{B_0}{\lambda^2} + \frac{C_0}{\lambda^4}.$$

Diese von Cauchy gefundene Formel drückt aus, dass sich der Brechungsexponent mit der Wellenlänge ändert, und dass demnach die verschiedenen Strahlen eines zusammengesetzten Lichtes verschieden stark abgelenkt werden. Die Vergleichung der mit Hülfe dieser Formel berechneten Werthe von n mit den durch das Experiment gelieferten zeigt für alle verschiedenen Strahlengattungen eine vorzügliche Uebereinstimmung, ja die experimentellen Resultate werden bereits genügend dargestellt, wenn man nur die beiden ersten Glieder der Formel beibehält.

129. Verschiedene Dispersionstheorien. — Die eben entwickelte Dispersionstheorie nimmt an, dass, wenn das Licht ein ponderabeles Medium durchsetzt, die Grössen von der Ordnung des Quadrates vom Radius der molekularen Wirkungssphäre nicht mehr vernachlässigt werden dürfen. Da wir diese Grössen in dem Falle unberücksichtigt lassen konnten, wo wir uns, wie in den früheren Kapiteln, nur mit der Fortpflanzung des Lichtes im leeren Raume beschäftigten und nur die Wirkung des Aethers auf sich selbst in Betracht zogen, so werden wir hieraus schliessen müssen, dass die Materie eine Einwirkung auf die Aethermoleküle ausübt, und dass der Radius der Wirkungssphäre der materiellen Moleküle unvergleichlich viel grösser ist, als derjenige der Aethermoleküle. Diese Einwirkung der Materie auf den Aether hatte schon Fresnel angenommen, welcher die Hypothese aufstellte, dass der in den ponderabeln Medien eingeschlossene Aether eine konstante, aber grössere

Dichtigkeit besitze als der Aether des leeren Raumes Später nahm Cauchy zum Zwecke der Erklärung der Dispersion implicite an, dass die materiellen Moleküle von den Aethermolekülen in Bewegung gesetzt würden und mit derselben Amplitude oscillirten, wie diese. Wenngleich es scheinen könnte, dass diese letztere Hypothese wenig Wahrscheinlichkeit besitze, so darf man sie doch nicht ohne Weiteres verwerfen; nimmt doch auch ein auf der Oberfläche einer Flüssigkeit schwimmender Körper an deren Bewegungen Theil. Gerade diese Hypothese ist es, die Cauchy zu der im § 128 durchgeführten Analyse veranlasste, welche, wie wir sahen, mit dem Experimente im Einklange steht.

Nach Cauchy nahm Briot das Studium der Dispersion wieder auf. In einer ersten Theorie stellte er die Hypothese auf, dass die Materie vom Aether in Bewegung gesetzt werde, aber er setzte dabei voraus, dass die Schwingungsamplituden der materiellen Moleküle unvergleichlich viel kleiner seien, als die Amplituden der Aethermoleküle. Aus dieser Annahme folgte, dass man bei den Rechnungen die materiellen Moleküle als im Raume fest ansehen konnte im Vergleich mit den Aethermolekülen. Unter diesen Bedingungen enthielten die rechten Seiten der Bewegungsgleichungen eines Aethermoleküls ausser den zweiten Differentialquotienten von ξ, η, ζ noch diese Grössen selbst. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingungsbewegung hing dann von der Wellenlänge ab, und der Brechungsindex war gegeben durch eine Formel von der Form

$$n = \mathrm{A} + \mathrm{B}\,\lambda^2.$$

Da jedoch diese Formel mit den Resultaten des Experiments im Widerspruch stand, verwarf Briot diese Theorie wieder und schlug eine andere vor, die wir nun ausführen wollen.

130. Theorie von Briot[1]). In dieser Theorie nimmt Briot an, dass die ponderabeln Medien aus materiellen Molekülen gebildet werden, welche durch Zwischenräume von einander getrennt sind, und dass die Dichte des in diesem Medium eingeschlossenen Aethers um so grösser ist, je näher das Aethermolekül dem materiellen Molekül liegt. Hieraus folgt, dass diese Dichtigkeit ϱ eine Funktion der Koordinaten des betreffenden Moleküls ist.

---

[1]) Wir haben dieser Theorie den Namen der Briot'schen beigelegt, weil Briot zuerst eine vollständige Dispersionstheorie auf die Annahme von der Periodicität des Aethers zu gründen suchte. Der Gang der Entwickelung jedoch, den wir hier verfolgen werden, weicht vollständig von dem Briot'schen ab und nähert sich vielmehr den Ideen von Sarrau.

Bisher hatten wir die Dichte des Aethers als konstant angesehen und gezeigt (§ 33), dass bei Vernachlässigung der Grössen von der Ordnung des Quadrates vom Radius der molekularen Wirkungssphäre die Bewegung eines Aethermoleküls durch drei Gleichungen von der Form

$$-\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 2\mu \Delta \xi + 2\nu \frac{\partial \Theta}{\partial x}$$

gegeben ist.

Setzt man (§ 46) $\nu = -\mu$, so reducirt sich diese Gleichung auf

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -2\mu \left(\Delta \xi - \frac{\partial \Theta}{\partial x}\right).$$

Der Koefficient -2μ ist positiv, denn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Transversalwellen ist reell, und zwar sahen wir, dass diese Geschwindigkeit durch die Formel

$$V^2 = \frac{-2\mu}{\varrho}$$

bestimmt wird.

Somit wird man durch passende Wahl der Krafteinheit bewirken können, dass $-2\mu = +1$ wird; die erste Bewegungsgleichung geht dadurch über in

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \Delta \xi - \frac{\partial \Theta}{\partial x}. \tag{1}$$

Ist ϱ eine konstante Grösse, so ist es bekanntlich leicht, eine Lösung dieser Gleichung zu finden, aber die Verwickelung des Problems wird wesentlich erhöht, wenn ϱ von den Koordinaten des schwingenden Moleküls abhängt. Um nun die fundamentale Annahme von der veränderlichen Dichtigkeit des Aethers mit den Erfordernissen der Rechnung in Einklang zu bringen, wollen wir ausserdem noch annehmen, dass der Radius der Wirkungssphäre des Aethers sehr klein sei, und dass die Dichte im Innern einer Kugel, deren Radius gleich dem der molekularen Wirkungssphäre ist, als konstant betrachtet werden dürfe. Hieraus wird dann folgen, dass innerhalb einer solchen Kugel die Bewegung eines Moleküls durch drei Gleichungen bestimmt ist, welche der Gleichung (1) analog sind. Ohne uns an den Gang der Untersuchung bei Briot zu binden, wollen wir nun zusehen, wie diese Hypothesen die Dispersion bei krystallisirten und amorphen Körpern zu erklären vermögen.

131. Krystallisirte Körper. — Nach einer Theorie, deren Grundlage von Bravais herrührt, kann man annehmen, dass die krystallisirten Körper aus materiellen Molekülen bestehen, welche die Ecken von gleichen und nebeneinanderliegenden Parallelepipeda einnehmen. Die Seitenflächen dieser Parallelepipeda werden dann drei Systeme von Ebenen bilden, welche wir durch die Gleichungen

$$ax + by + cz = dm \tag{1}$$

$$a'x + b'y + c'z = d'm' \tag{2}$$

$$a''x + b''y + c''z = d''m'' \tag{3}$$

darstellen können; darin bedeuten die m, m', m'' ganze Zahlen, die zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegen. Die Werthe von x, y, z, welche diesen drei Gleichungen gleichzeitig genügen, werden die Koordinaten einer Ecke eines Parallelepipedons sein. Einer dieser Punkte sei P; ertheilen wir seinen Koordinaten Zuwachse α, β, γ, welche durch die folgenden Gleichungen

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = d \tag{4}$$

$$a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = 0 \tag{5}$$

$$a''\alpha + b''\beta + c''\gamma = 0 \tag{6}$$

bestimmt sind, dann zeigen die beiden letzten Gleichungen, dass der Punkt P′ mit den Koordinaten $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\gamma$ in den Ebenen der Systeme (2) und (3) liegt, welche durch den Punkt x, y, z gehen. Aus der Gleichung (4) folgt, dass die Koordinaten des Punktes P′ der Gleichung

$$a(x+\alpha) + b(y+\beta) + c(z+\gamma) = d(m+1)$$

genügen.

Somit wird sich der Punkt P′ in derjenigen Ebene des Systems (1) befinden, welche der durch den Punkt P gehenden Ebene dieses selben Systems am nächsten liegt. Die Punkte P und P′ bilden also die Endpunkte einer Kante eines Parallelepipeds, und daher werden die Grössen α, β, γ die Projektionen dieser Kante auf die drei Axen sein.

Auf dieselbe Weise lässt sich zeigen, dass die Projektionen α', β', γ' und α'', β'', γ'' der beiden anderen Kanten des Parallelepipeds durch Gleichungen gegeben sind, welche leicht aus den Gleichungen (4), (5), (6) abgeleitet werden können.

132. Wir wollen nunmehr zur Theorie von Briot zurückkehren. Die Koordinaten irgend eines Punktes im Raume seien x, y, z; dann ist die Dichte des Aethers in diesem Punkte eine bestimmte Funktion von x, y, z, die wir mit $F(x, y, z)$ bezeichnen wollen. Ertheilen wir den Koordinaten die Zuwachse α, β, γ, so erhalten wir einen neuen Punkt, der offenbar in Bezug auf die Ecken eines bestimmten Parallelepipedons ebenso liegt, wie der Punkt x, y, z in Bezug auf die Ecken eines der anstossenden Parallelepipeda. Da nun die Lage dieser beiden Punkte in Bezug auf die materiellen Moleküle die gleiche ist, so muss die Dichte des Aethers in diesen Punkten denselben Werth besitzen. Es gilt also

$$\varrho = \mathrm{F}(x, y, z) = \mathrm{F}(x + \alpha,\ y + \beta,\ z + \gamma),$$

d. h. die Dichte ist eine periodische Funktion der Koordinaten.

Ertheilt man den Koordinaten x, y, z Zuwachse, welche gleich den Projektionen der beiden anderen Kanten der Parallelepipeda sind, so erhält man zwei neue Punkte, wo der Aether die gleiche Dichte besitzt; somit ist

$$\varrho = \mathrm{F}(x, y, z) = \mathrm{F}(x + \alpha',\ y + \beta',\ z + \gamma')$$
$$\varrho = \mathrm{F}(x, y, z) = \mathrm{F}(x + \alpha'',\ y + \beta'',\ z + \gamma'').$$

Die Dichte ϱ des Aethers in einem krystallisirten Medium ist also eine dreifach periodische Funktion der Koordinaten.

133. Wir wollen nun eine ebene Welle in's Auge fassen, die sich in einem krystallisirten Medium fortpflanzt, und als XY-Ebene eine zur Wellenebene parallele Ebene wählen. Wie wir bereits wissen, hängen dann die Verschiebungen ξ, η, ζ nur von z und t ab, und aus der Bedingung dafür, dass die Wellen transversal sind, folgt, dass ξ_z' identisch Null ist. Unserer Annahme nach sollte die Dichtigkeit im Innern einer Kugel, deren Radius gleich demjenigen der molekularen Wirkungssphäre ist, konstant sein, deshalb wird ϱ nicht von den Verschiebungen ξ, η, ζ abhängen, sondern nur eine Funktion der Koordinaten der Gleichgewichtslage des betreffenden Moleküls sein. Da wir nun hier nur den Einfluss der Periodicität nachweisen und zeigen wollen, dass dieselbe zur Erklärung der Dispersion ausreicht, so nehmen wir der Einfachheit halber noch an, dass die Grösse ϱ nur eine Funktion von z ist und dass man dieselbe somit in eine trigonometrische Reihe entwickeln kann. Wir setzen

$$\varrho = \mathrm{L}_0 + \mathrm{L}_1 \cos z + \cdots + \mathrm{M}_1 \sin z + \mathrm{M}_2 \sin 2z + \cdots$$

Wir wollen nun Folgendes beweisen: Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine periodische Funktion φ der Differentialquotient einer periodischen Funktion ψ ist, besteht darin, dass der Mittelwerth von φ Null ist. Entwickeln wir zu diesem Zwecke φ in eine trigonometrische Reihe, so erhalten wir

$$\varphi = a_0 + a_1 \cos z + a_2 \cos 2z + \cdots b_1 \sin z + b_2 \sin 2z + \cdots$$

Ertheilen wir nun dem z alle möglichen Werthe, so werden die Funktionen sinus und cosinus, welche in dieser Entwickelung auftreten, unendlich viele Werthe zwischen ± 1 annehmen; der Mittelwerth dieser Funktionen wird also Null sein, und somit reducirt sich der Mittelwerth von φ auf a_0. Das unbestimmte Integral von φ ist aber

$$\psi = c + a_0 z + a_1 \sin z + a_2 \sin 2z + \cdots - b_1 \cos z - b_2 \cos 2z - \cdots$$

Wenn nun der Mittelwerth a_0 von φ Null ist, so ist auch dies Integral eine periodische Funktion von z. Die oben ausgesprochene Bedingung ist also nothwendig; dass sie auch hinreichend ist, liegt auf der Hand. Von dieser Eigenschaft der periodischen Funktionen werden wir im Folgenden Anwendung zu machen haben.

134. Wir kommen nun zu den Bewegungsgleichungen. Da die Schwingungen transversal gerichtet sind, so wird die Gleichung (1) des § 130, wenn wir es mit einer zur XY-Ebene parallelen Welle zu thun haben,

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}.$$

Dieser Gleichung wollen wir dadurch zu genügen suchen, dass wir setzen

$$\xi = e^{i\mu t + \int v\,dz},$$

worin $\mu = -\frac{2\pi}{\lambda}$ und v eine periodische Funktion von z ist. Für die Differentialquotienten von ξ nach t und z erhalten wir dann

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = i\mu\xi \qquad \frac{\partial \xi}{\partial z} = v\xi$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\mu^2\xi \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = v^2\xi + \xi\frac{\partial v}{\partial z}.$$

Durch Einführung dieser Werthe für die zweiten Differentialquotienten in die Bewegungsgleichung finden wir

$$\frac{\partial v}{\partial z} + v^2 + \varrho\mu^2 = 0, \tag{1}$$

eine Differentialgleichung, welche uns den Werth von v als Funktion von z und μ liefert. Die Grösse μ ist in Folge der Wahl unserer Längeneinheit sehr klein. Wir hatten nämlich diese Längeneinheit so gewählt, dass die Periode der periodischen Funktion ϱ endlich ist und in Folge dessen mit den Dimensionen des Elementarparallelepipedon vergleichbar, d. h. im Verhältniss zu λ sehr klein ist. In

Folge dessen ist λ, in diesem Maassstabe ausgedrückt, sehr gross, und μ, als der reciproke Werth von λ, eine sehr kleine Zahl. Entwickeln wir also v nach wachsenden Potenzen von μ, so erhalten wir eine Reihe, deren einzelne Glieder ungemein rasch abnehmen; es wird dann genügen, die Koefficienten der ersten Glieder dieser Reihe zu bestimmen, um einen hinreichend angenäherten Werth von v zu erhalten.

135. Wir gehen nun zur Bestimmung dieser Koefficienten über.

Die Entwickelung von v lässt sich in der Form schreiben:

$$v = \mu v_1 + \mu^2 v_2 + \mu^3 v_3 + \mu^4 v_4 + \cdots\cdots,$$

wobei v_1, v_2, v_3, ebenso wie v selbst, periodische Funktionen von z sind. Hieraus finden wir

$$v^2 = \mu^2 v_1^2 + 2\mu^3 v_1 v_2 + \mu^4 (v_2^2 + 2 v_1 v_3) + \mu^5 (2 v_1 v_4 + v_2 v_3) + \cdots\cdots$$

und

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \mu \frac{\partial v_1}{\partial z} + \mu^2 \frac{\partial v_2}{\partial z} + \mu^3 \frac{\partial v_3}{\partial z} + \mu^4 \frac{\partial v_4}{\partial z} + \cdots\cdots$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung (1) ein, so erhalten wir auf der linken Seite eine nach wachsenden Potenzen von μ geordnete Entwickelung; da diese für jeden beliebigen Werth von μ Null sein muss, so müssen die Koefficienten der verschiedenen Potenzen von μ Null sein; es ist also

$$\frac{\partial v_1}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial z} + v_1^2 + \varrho = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial z} + 2 v_1 v_2 = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial v_4}{\partial z} + v_2^2 + 2 v_1 v_3 = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial v_5}{\partial z} + 2 (v_1 v_4 + v_2 v_3) = 0\,. \tag{6}$$

Die Gleichung (2) liefert uns

$$v_1 = \text{Const.}$$

Hieraus und aus Gleichung (3) folgt, dass $\frac{\partial v_2}{\partial z}$ eine periodische Funktion von z sein muss, da nach unserer Annahme ϱ eine solche periodische Funktion ist. Damit nun auch v_2 eine periodische Funktion sein kann, muss zufolge der oben bewiesenen Eigenschaft der periodischen Funktionen der Mittelwerth von $\frac{\partial v_2}{\partial z}$ Null sein. Demnach ist der Werth von v_1 gleich der Quadratwurzel aus dem mit dem umgekehrten Zeichen versehenen Mittelwerthe von ϱ. Ist nun der Werth von v_1 auf diese Weise bestimmt, so liefert die Integration der Gleichung (3) den Werth von v_2.

In diesem Ausdrucke ist die Integrationskonstante willkürlich. Um ihren Werth zu finden, der mit dem Mittelwerthe von v_2 zusammenfällt, nehmen wir die Gleichung (4) zu Hülfe. Damit v_3 eine periodische Funktion sein kann, muss der Mittelwerth von $\frac{\partial v_3}{\partial z}$ Null sein; demnach muss auch der Mittelwerth des Produktes $v_1 v_2$ Null sein. Da nun v_1 eine von Null verschiedene Konstante ist, so muss der Mittelwerth von v_2 Null sein; demnach reducirt sich die im Ausdrucke v_2 auftretende Integrationskonstante auf Null. Nunmehr gestattet die Gleichung (4), den Werth von v_3 zu bestimmen; hierbei würde sich die Integrationskonstante mit Hülfe der Gleichung (5) ermitteln lassen. Auf diese Weise kann man also die Werthe der verschiedenen Funktionen $v_1, v_2, v_3 \ldots.$ bestimmen, die in der Entwickelung der Funktion v auftreten.

136. Wir wollen nun die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der betreffenden ebenen Welle bestimmen.

Bezeichnen wir mit v^0 den Mittelwerth von v, so haben wir

$$\int v\,dz = v^0 z + u ,$$

wobei u eine periodische Funktion ist. Demnach wird der Ausdruck für die Komponente ξ der Verschiebung des Aethermoleküls

$$\xi = e^{i\mu t + v^0 z + u} = e^{i\mu t + v^0 z}\, e^u .$$

Der Faktor e^u ist eine periodische Funktion von z, von der wir nur das eine wissen, dass ihre Periode sehr klein ist, denn sie ist von derselben Grössenordnung, wie die Kanten des elementaren Parallelepipedon. Daraus ergibt sich, dass sich der Faktor e^u ungemein rasch ändert; jedenfalls wird also nur der Mittelwerth der Verschiebung bei den experimentellen Untersuchungen eine Rolle spielen. Somit dürfen wir auch die Funktion e^u in dem vorhergehenden Ausdrucke für ξ durch ihren Mittelwerth C ersetzen, und erhalten dann

$$\xi = C\, e^{i\mu t + v^0 z} .$$

Als Werth für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ergibt sich in Folge dessen

$$\mathrm{V} = -\frac{i\mu}{v^0}.$$

Da der Brechungsexponent n der Fortpflanzungsgeschwindigkeit umgekehrt proportional ist, so wird er proportional dem Quotienten $-\frac{v^0}{i\mu}$ sein. Bezeichnen wir also mit $v_1{}^0$, $v_2{}^0$, $v_3{}^0 \ldots\ldots$ die Mittelwerthe der Funktionen v_1, v_2, $v_3 \ldots\ldots$, welche in der Entwickelung von v nach Potenzen von μ auftreten, so ist der Brechungsexponent proportional

$$i v_1{}^0 + i\mu v_2{}^0 + i\mu^2 v_3{}^0 + i\mu^3 v_4{}^0 + \cdots\cdots$$

Es lässt sich nun nachweisen, dass dies ein reeller Ausdruck ist. Die Gleichung (3) liefert als Werth von v_1 die Quadratwurzel aus dem Mittelwerthe von $-\varrho$, dies ist also eine imaginäre Grösse, die wir mit $-ia$ bezeichnen wollen. Der Mittelwerth von v_2 ist, wie wir sahen, Null. Gleichung (5) zeigt, dass der Mittelwerth des Produktes $v_1 v_3$ bis auf das Vorzeichen gleich dem Mittelwerthe von $v_2{}^2$ sein muss; da nun $v_2{}^2$ positiv ist, so muss dies auch mit dem Mittelwerthe von $v_2{}^2$ der Fall sein; somit ist auch der Mittelwerth von $v_1 v_3$ positiv, und diese Grösse, dividirt durch den Werth $-ia$ von v_1 liefert für $v_3{}^0$ eine rein imaginäre Grösse $-ib$. Um $v_4{}^0$ zu erhalten, benutzen wir die Gleichung (6). Aus dieser ergibt sich, dass $v_1{}^0 v_4{}^0$ bis auf das Vorzeichen gleich dem Mittelwerthe von $v_2 v_3$ ist. Multiplicirt man nun die linke Seite der Gleichung (4) mit v_3, so erhält man

$$2 v_1 v_2 v_3 = -v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} = -\frac{1}{2}\frac{\partial (v_3{}^2)}{\partial z}.$$

Da die rechte Seite dieser neuen Gleichung der Differentialquotient einer periodischen Funktion ist, so ist der Mittelwerth derselben Null; v_1 ist aber eine Konstante, also ist der Mittelwerth von $v_2 v_3$ Null, dasselbe gilt somit auch für den Mittelwerth von $v_1 v_4$ und daher auch von $v_4{}^0$. Ebenso lässt sich nachweisen, dass der Werth von $v_5{}^0$ eine rein imaginäre Grösse $-ic$ ist, u. s. w.

Der Brechungsexponent wird also proportional sein dem Ausdrucke

$$a + b\mu^2 + c\mu^4 + \cdots\cdots,$$

und da μ umgekehrt proportional λ ist, so erhalten wir als Werth des Brechungsindex einen Ausdruck von der Form

$$n = \mathrm{A}_0 + \frac{\mathrm{B}_0}{\lambda^2} + \frac{\mathrm{C}_0}{\lambda^4} + \cdots\cdots,$$

der durch das Experiment bestätigt wird.

137. Wollte man an Stelle einer ebenen Welle den allgemeinen Fall behandeln, wo ϱ eine periodische Funktion von x, y, z ist, so würde die Integration der Bewegungsgleichungen bedeutende Schwierigkeiten darbieten. Bei Gelegenheit der Doppelbrechung werden wir zeigen, wie es Sarrau gelang, Funktionen zu finden, welche den Bewegungsgleichungen für den Fall annähernd genügten, dass ϱ eine periodische Funktion der Koordinaten ist. Diese Funktionen haben die Form

$$\xi = \mathrm{A}\, e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z - \mathrm{V} t)}$$

$$\eta = \mathrm{B}\, e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z - \mathrm{V} t)}$$

$$\zeta = \mathrm{C}\, e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z - \mathrm{V} t)}.$$

In dem Falle, wo die Dichte konstant ist, hat man den Grössen A, B, C, α, β, γ konstante Werthe beizulegen. Wählt man für A, B, C periodische Funktionen der Koordinaten, so gelingt es durch successive Annäherung, die Bewegungsgleichungen in dem Falle zu integriren, dass ϱ variabel ist. Durch eine erste Annäherung gelangt man zur Erklärung der Doppelbrechung, durch eine zweite zu derjenigen der Drehung der Polarisationsebene, durch eine dritte zur Erklärung der Dispersion.

138. Amorphe Körper. — In den amorphen Medien sind die materiellen Moleküle unregelmässig vertheilt, und die Dichte des Aethers ist eine Funktion der Koordinaten, welche unregelmässig um einen Mittelwerth schwankt. Diese Funktion ist beliebig; um also die Bewegungsgleichungen integriren zu können, muss man eine Hypothese über ihre Form machen. Die einfachste Annahme besteht darin, dass ϱ eine Funktion von derselben Art ist, wie bei den krystallinischen Medien, dass sie aber nicht periodisch ist.

Wir wollen voraussetzen, bei den amorphen Medien sei ϱ durch eine Funktion von der Form:

$$\varrho = \sum \mathrm{R} \sin (a x + b y + c z + d)$$

gegeben, wo a, b, c beliebige, aber nicht ganze Zahlen sind, und d ebenfalls eine beliebige Konstante bedeutet. Der Mittelwerth von ϱ, um welchen die Werthe der Funktion schwanken, ist nichts anderes, als das Glied der Reihe, bei welchem $a = b = c = 0$ ist, es ist also gleich

$$\mathrm{R} \sin d.$$

Die Anwendung der Sarrau'schen Methode auf die Bestimmung der Integrale der Bewegungsgleichungen würde in diesem Falle mit grossen Schwierigkeiten verknüpft sein. Nichtsdestoweniger lassen sich Mittelwerthe dieser Integrale finden, und wir haben schon gezeigt, dass diese Mittelwerthe allein bei den experimentellen Resultaten eine Rolle spielen. Die Integration würde übrigens, wie bei den krystallinischen Medien, durch successive Annäherungen durchzuführen sein.

139. Ohne die Untersuchung vollständig zu erledigen, können wir doch nachweisen, dass in dem speciellen Falle, wo eine zur XY-Ebene parallele ebene Welle in Betracht kommt, der Werth des Brechungsexponenten von der Wellenlänge abhängt.

Die erste der Bewegungsgleichungen ist

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}.$$

Wie wir in § 134 sahen, kann man dieser Gleichung für den Fall, dass ϱ eine periodische Funktion von z ist, dadurch genügen, dass man setzt

$$\xi = e^{i\mu t + \int v\,dz};$$

hierbei soll v eine periodische Funktion von z sein, und die Koefficienten ihrer Entwickelung nach wachsenden Potenzen von μ sollen durch eine Reihe von Rekursionsgleichungen gegeben sein. Da wir angenommen hatten, dass bei den amorphen Körpern ϱ dieselbe Form besitze, wie bei den krystallinischen Körpern, so können wir den Bewegungsgleichungen für den Fall der amorphen Körper dadurch genügen, dass wir für v eine nicht periodische Funktion wählen, deren Koefficienten in der Entwickelung nach wachsenden Potenzen von μ durch dieselbe Reihe von Rekursionsgleichungen geliefert werden.

Wir wollen nun den Mittelwerth der Koefficienten der Entwickelung suchen, um sodann den Mittelwerth von ξ zu erhalten. Die Gleichung (2) des § 135 zeigt uns, dass v_1 sich auf eine Konstante reducirt; der Werth dieser Konstanten lässt sich unmittelbar aus der Gleichung (3) ableiten, denn die Funktion v_2, obschon keine periodische Funktion, unterscheidet sich doch von einer solchen nur durch den Werth der Koefficienten, welche unter den Zeichen sinus und cosinus bei der Entwickelung in eine trigonometrische Reihe auftreten. Da bei ϱ das Gleiche der Fall ist, so muss der Mittelwerth von $\frac{\partial v_2}{\partial z}$ Null sein. Bezeichnen wir die negative Wurzel des

Mittelwerthes von ϱ mit $-a$, so erhalten wir also für v_1 den Werth $-ia$. Dieselbe Gleichung (3) zeigt uns, dass der Mittelwerth von v_2 eine reelle Grösse ist. Durch successive Diskussion der verschiedenen Gleichungen würden wir finden, dass die ungeraden Koefficienten v_1, v_3.... rein imaginär, die geraden Koefficienten v_2, v_4.... dagegen reell sind; die letzteren sind, wie sich zeigen lässt, Null.

In der Forderung der Homogenität nämlich ist es begründet, dass bei den amorphen Medien die materiellen Moleküle in Bezug auf ein beliebiges derselben überall in der gleichen Weise vertheilt sind; jedes Molekül bildet also ein Symmetriecentrum, und wenn wir ein solches Molekül zum Koordinatenanfang wählen, so ist ϱ eine gerade Funktion, d. h. sie darf ihr Vorzeichen nicht wechseln, wenn man z mit $-z$ vertauscht. Aus der Gleichung (3) folgt dann, dass auch $\frac{\partial v_2}{\partial z}$ eine gerade Funktion ist, somit ist v_2 eine ungerade Funktion. Aus den folgenden Gleichungen ergibt sich, dass v_3 eine gerade, v_4 eine ungerade Funktion ist, die Koefficienten v_2, v_4, v_6... sind also ungerade Funktionen, deren Mittelwerth Null ist.

Der Mittelwerth von v_3 wird durch die Gleichung (5) gegeben. v_3 ist, wie bereits erwähnt, eine rein imaginäre Grösse, die wir mit $-ib$ bezeichnen wollen. Brechen wir also beim Gliede μ^4 ab, so finden wir für den Mittelwerth von v

$$v^0 = -ia\mu - ib\mu^3.$$

Demnach wird der Mittelwerth der Fortpflanzungsgeschwindigkeit gegeben durch

$$V = -\frac{i\mu}{-ia\mu - ib\mu^3} = \frac{1}{a + b\mu^2},$$

und der Brechungsexponent, der umgekehrt proportional der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist, hat die Form

$$n = a_0 + b\mu^2.$$

Da nun μ umgekehrt proportional der Wellenlänge ist, so erhält man schliesslich

$$n = A_0 + \frac{B_0}{\lambda^2}.$$

Wir kommen also wieder zu dem Ausdrucke für den Brechungsexponenten, der mit den experimentellen Ergebnissen im Einklang steht.

140. Theorie von Boussinesq. — Boussinesq nimmt nicht wie Briot an, dass die Dichte des in einem ponderabelen Medium befindlichen Aethers von der Lage des betreffenden Moleküls abhänge, sondern er setzt voraus, dass diese Dichte gleichförmig sei. Um nun aber der Wirkung der Materie auf den Aether Rechnung zu tragen und zur Erklärung der Dispersion zu gelangen, führt er in die Bewegungsgleichungen des Aethers ein Zusatzglied F ein, welches die elastischen Kräfte darstellt, die durch diese Wirkung der Materie in Thätigkeit treten. Er nimmt ausserdem an, dass die zwischen den Aethermolekülen wirksamen elastischen Kräfte dieselben sind, wie bei dem im leeren Raume befindlichen Aether. In Folge dieser Hypothesen wird die erste der Bewegungsgleichungen:

$$(1) \qquad \varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \Delta \xi - \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mathrm{F}.$$

Aber wenn die Aethermoleküle der aus der Wirkung der Materie herrührenden Kraft F unterworfen sind, so üben sie auch umgekehrt wieder eine gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft auf die materiellen Moleküle aus. Ausserdem sind die materiellen Moleküle noch elastischen Kräften F_1 unterworfen, die von ihrer Wirkung auf einander herrühren. Somit erhalten wir, wenn wir mit ϱ_1 die Dichte der Materie und mit ξ_1 die Verschiebung eines materiellen Moleküls bezeichnen

$$\varrho_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = -\mathrm{F} + \mathrm{F}_1.$$

Die elastischen Kräfte F_1, welche von der Wirkung der materiellen Moleküle auf einander herrühren, müssen sehr viel geringer sein, als diejenigen, welche zwischen den Aethermolekülen auftreten, da sich der Schall, der durch Schwingungen der Materie erzeugt wird, mit unverhältnissmässig geringerer Geschwindigkeit fortpflanzt, als das Licht. Deshalb nimmt Boussinesq an, dass man F_1 gegenüber F vernachlässigen dürfe. Die Bewegungsgleichung eines materiellen Moleküls wird dadurch

$$(2) \qquad \varrho_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = -\mathrm{F}.$$

Ersetzt man in der Gleichung (1) F durch den aus dieser letzten Gleichung folgenden Werth, so erhält man

$$(3) \qquad \varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \Delta \xi - \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \varrho_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2}.$$

Die Verschiebung ξ_1 der materiellen Moleküle muss von den Verschiebungen ξ, η, ζ des Aethers und deren Differentialquotienten abhängen. Da aber diese Verschiebungen nur sehr klein sind, so darf man ξ_1 auf das erste Glied seiner Entwickelung nach diesen Grössen, d. h. auf eine lineare Funktion von ξ, η, ζ und deren Derivirten beschränken.

In bestimmten Fällen wird sich diese Funktion noch vereinfachen. Wählen wir beispielsweise die Wellenebene als XY-Ebene, so werden bei isotropen Medien nur die Differentialquotienten nach z auftreten. Ferner enthält ξ_1 weder η noch ζ. Die Bewegungsgleichungen dürfen sich nämlich nicht ändern, wenn man y und η durch $-y$ und $-\eta$ ersetzt. Führt man diese Substitution in Gleichung (3) durch, so bleibt die linke Seite ungeändert, ebenso die beiden ersten Glieder rechter Hand, somit darf sich auch $\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2}$ nicht ändern, d. h. dieser Differentialquotient, und folglich auch ξ_1, dürfen η, $\frac{\partial \eta}{\partial z} \cdots\cdots$ nicht enthalten. Eine analoge Betrachtung würde ergeben, dass ξ_1 auch ζ nicht enthalten darf. Demnach reducirt sich ξ_1 auf eine lineare Funktion von ξ und dessen Differentialquotienten. Uebrigens treten die letzteren auch nicht alle auf; da nämlich der Koordinatenanfangspunkt ein Symmetriecentrum ist, so dürfen sich die Gleichungen nicht ändern, wenn man die Vorzeichen von x, y, z, ξ, η, ζ ändert, und dies hat zur Folge, dass die Differentialquotienten ungerader Ordnungszahl aus $\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2}$ und somit aus ξ_1 verschwinden.

141. Wir wollen nun das Integral der Gleichung (3) für den Fall suchen, dass eine ebene Welle sich in einem isotropen Medium fortpflanzt. Da dann die Differentialquotienten von ξ, η, ζ nach x und y Null sind, so reducirt sich ξ_1 auf eine lineare Funktion von ξ und den Differentialquotienten gerader Ordnungszahl von ξ nach z. Lassen wir die Differentialquotienten von höherer Ordnung als der dritten unberücksichtigt, so haben wir

$$\xi_1 = a\,\xi + b\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2},$$

und durch Einsetzen dieses Werthes von ξ_1 in die Gleichung (3) erhalten wir unter der Annahme transversaler Schwingungen

$$(4) \qquad \varrho\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \varrho_1\, a\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \varrho_1\, b\,\frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2\,\partial t^2}.$$

Dieser Gleichung wollen wir dadurch zu genügen suchen, dass wir setzen

$$\xi = \mathrm{A}\, e^{i\alpha(z - \mathrm{V}t)};$$

bilden wir dann die betreffenden Differentialquotienten und setzen dieselben in (4) ein, so ergibt sich als Bedingungsgleichung

$$\varrho\, V^2 = 1 - \varrho_1\, a\, V^2 + \varrho_1\, b\, \alpha^2\, V^2,$$

und hieraus

$$V^2 = \frac{1}{\varrho + \varrho_1\, a - \varrho_1\, b\, \alpha^2}.$$

Somit wird der Brechungsexponent proportional der Quadratwurzel aus

$$\varrho + a\, \varrho_1 - b\, \varrho_1\, \alpha^2$$

sein, und da a umgekehrt proportional λ ist, so hat n die Form

$$n = A_0 + \frac{C_0}{\lambda^2}.$$

Der Brechungsexponent hängt also von der Wellenlänge ab.

142. Die Theorie von Boussinesq[1]) lässt noch eine andere Darstellungsform zu, wenn es sich um isotrope Körper handelt.

Da eine Einwirkung der Materie auf den Aether stattfindet, so muss man derselben dadurch Rechnung tragen, dass man die daraus entspringenden elastischen Kräfte in die Bewegungsgleichungen einführt. Nun besteht die einfachste Hypothese, die man über die Natur dieser elastischen Kräfte machen kann, in der Annahme, dass dieselben der Grösse $\xi_1 - \xi_0$, d. h. der Differenz der Verschiebungen von Materie und Aether proportional sind. Bezeichnet man mit M den Proportionalitätsfaktor, so lässt sich die erste dieser Bewegungsgleichungen des Aethers schreiben

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \varDelta \xi - \frac{\partial \Theta}{\partial x} + M(\xi_1 - \xi).$$

Für eine ebene transversale Welle geht dieselbe über in

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + M(\xi_1 - \xi).$$

Wir suchen dieser Gleichung dadurch zu genügen, dass wir setzen

[1]) In dieser Form nähert sich die Theorie von Boussinesq einer Theorie von v. Helmholtz, durch welche dieser Gelehrte nicht nur die gewöhnliche, sondern auch die anomale Dispersion erklärt. Zu meinem Bedauern hatte ich nicht Zeit, diese Helmholtz'sche Theorie in den Vorlesungen dieses Semesters zu erörtern.

$$\xi = A\, e^{i\alpha(z - Vt)}$$

$$\xi_1 = B\, e^{i\alpha(z - Vt)},$$

wobei A und B Konstanten bezeichnen, und α den Werth $\frac{2\pi}{\lambda}$ besitzt; führt man diese Grössen in die obige Gleichung ein, so erhält man die Bedingungsgleichung

$$(5) \qquad -\varrho\,\alpha^2 A V^2 = -\alpha^2 A + M(B - A).$$

Die Gleichung für die Bewegung des materiellen Moleküls ist

$$\varrho_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = M(\xi - \xi_1).$$

Ersetzt man darin ξ_1 durch seinen oben angenommenen Ausdruck, so folgt:

$$(6) \qquad -\varrho_1\,\alpha^2 B V^2 = M(A - B).$$

Um die Geschwindigkeit als Funktion von α zu erhalten, eliminiren wir A und B aus den Gleichungen (5) und (6), die wir zu diesem Zwecke in die Form

$$A\left[M - \alpha^2(\varrho V^2 - 1)\right] = M B$$

$$B(M - \alpha^2 \varrho_1 V^2) = M A$$

bringen und mit einander multipliciren; wir erhalten dann

$$-\alpha^2 M(\varrho_1 V^2 + \varrho V^2 - 1) + \alpha^4 \varrho_1 V^2(\varrho V^2 - 1) = 0,$$

oder

$$M(\varrho + \varrho_1)\left[V^2 - \frac{1}{\varrho + \varrho_1}\right] = \alpha^2 \varrho_1 V^2(\varrho V^2 - 1).$$

In Folge der von uns gewählten Längeneinheit ist α sehr klein. Daher erhalten wir als ersten Näherungswerth für die obige Gleichung, die sich in der Form

$$(7) \qquad V^2 = \frac{1}{\varrho + \varrho_1} + \frac{\alpha^2}{M(\varrho + \varrho_1)}\varrho_1 V^2(\varrho V^2 - 1)$$

schreiben lässt,

$$V^2 = \frac{1}{\varrho + \varrho_1}.$$

Durch Einführung dieses Werthes in die rechte Seite der Gleichung (7) ergibt sich nun als zweite Annäherung

$$V^2 = \frac{1}{\varrho + \varrho_1} + \frac{\alpha^2}{M(\varrho + \varrho_1)} \cdot \frac{\varrho_1}{(\varrho + \varrho_1)} \cdot \left(\frac{\varrho}{\varrho + \varrho_1} - 1\right),$$

oder

$$V^2 = \frac{1}{\varrho + \varrho_1} - \frac{a^2 \varrho_1^2}{M(\varrho + \varrho_1)^3}.$$

Wir erhalten also auch hier für die Geschwindigkeit einen Werth, der von a und somit auch von λ abhängt.

143. Wir wollen nun noch nachweisen, dass die Theorie von Boussinesq auch die Drehung der Polarisationsebene durch Medien zu erklären vermag, welche, wie gewisse Lösungen von organischen Verbindungen, kein Symmetriecentrum besitzen, bei welchen aber eine beliebige Richtung als Symmetrieaxe aufzufassen ist.

Da ein Symmetriecentrum nicht vorhanden ist, so hängt die Funktion ξ_1 gleichzeitig von den Differentialquotienten gerader und ungerader Ordnung der Aetherverschiebungen ξ, η, ζ ab; in Folge des Vorhandenseins von Symmetrieaxen vereinfacht sich jedoch diese Funktion. Drücken wir die Thatsache aus, dass die Bewegungsgleichungen sich nicht ändern, wenn man zwei der Koordinatenaxen um die dritte Axe um einen gewissen Winkel dreht, und vernachlässigen wir die Differentialquotienten von einer höheren Ordnung, als die erste, so finden wir für ξ_1

$$\xi_1 = a\xi + b\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right),$$

und entsprechend für die Verschiebungskomponenten η_1 und ζ_1 der Materie

$$\eta_1 = a\eta + b\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)$$

$$\zeta_1 = a\zeta + b\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right).$$

Bei einer Ebene, welche der XY-Ebene parallel ist, sind die Differentialquotienten nach x und y Null, und wir erhalten

$$\xi_1 = a\xi + b\frac{\partial \eta}{\partial z}$$

$$\eta_1 = a\eta - b\frac{\partial \xi}{\partial z};$$

somit gehen die Differentialgleichungen der Aetherbewegung über in

$$\varrho\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - a\varrho_1\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - b\varrho_1\frac{\partial^3 \eta}{\partial z\,\partial t^2}$$

$$\varrho\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - a\varrho_1\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + b\varrho_1\frac{\partial^3 \xi}{\partial z\,\partial t^2}.$$

Suchen wir diesen Gleichungen durch Werthe für ξ und η von der Form

$$\xi = A\, e^{i\alpha(z - Vt)}$$

$$\eta = B\, e^{i\alpha(z - Vt)}$$

zu genügen, so finden wir als Bedingungsgleichungen:

$$-\varrho A V^2 = -A + a \varrho_1 A V^2 + b i \alpha \varrho_1 B V^2$$

$$-\varrho B V^2 = -B + a \varrho_1 B V^2 - b i \alpha \varrho_1 A V^2,$$

die sich auch in der Form

$$A(1 - \varrho V^2 - a \varrho_1 V^2) = b i \alpha \varrho_1 B V^2$$

$$B(1 - \varrho V^2 - a \varrho_1 V^2) = -b i \alpha \varrho_1 A V^2$$

schreiben lassen. Wenn wir die erste Gleichung durch die zweite dividiren, so finden wir

$$\frac{A}{B} = -\frac{B}{A} \qquad \text{oder} \qquad A^2 = -B^2.$$

Wir erhalten also zwei Systeme von Werthen für ξ und η, welche die Bewegungsgleichungen befriedigen; diese beiden Systeme entsprechen den Werthen $A = +Bi$ und $A = -Bi$. Wir könnten somit, wie in § 125 nachweisen, dass die ebene Welle zwei andere ebene Wellen hervorruft, welche im entgegengesetzten Sinne circular polarisirt sind und sich mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen. Hieraus aber lässt sich unmittelbar schliessen, dass die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes beim Durchgange durch das Medium eine Drehung um einen gewissen Winkel erfahren muss.

Kapitel VI.

Doppelbrechung.

144. Die Erscheinung der Doppelbrechung wurde zuerst gegen die Mitte des siebzehnten Jahrhunderts bei dem Isländischen Kalkspath beobachtet und fand sich später bei allen Krystallen, die nicht zum kubischen System gehören. Biot, welcher die Doppelbrechung besonders vom experimentellen Standpunkt aus untersuchte, theilte die doppelbrechenden Krystalle in zwei Klassen, je nachdem die Erscheinungen ganz symmetrisch zu einer Axe angeordnet waren oder sich nach zwei Axen anzuordnen schienen. Die Krystalle der ersten Gruppe (einaxige Krystalle) gehören zu dem hexagonalen oder quadratischen Krystallsysteme, deren krystallographische Symmetrieaxe mit der optischen Axe des Krystalls identisch ist. Die Krystalle der zweiten Gruppe (zweiaxige Krystalle) sind orthorhombisch, klinorhombisch oder anorthisch (triklinisch); die Richtungen ihrer optischen Axen stehen in keiner unmittelbaren Beziehung zu den Symmetrieelementen des Krystallaufbaues. Haüy hat zuerst diese wichtigen Beziehungen zwischen der Krystallform und der Eigenschaft der Doppelbrechung festgestellt.

Die ersten theoretischen Versuche, die zur Erklärung des Strahlenganges in den doppelbrechenden Medien angestellt wurden, rühren von Huyghens her; sie liessen sich indess nur auf einaxige Krystalle anwenden. Young nahm dieselben sodann wieder auf, gelangte aber ebenso wenig wie Huyghens zu einer wahren Erklärung der Erscheinung. Erst Fresnel gebührt der Ruhm, die mathematische Erklärung der für die Doppelbrechung in einaxigen und zweiaxigen Krystallen geltenden Gesetze gefunden zu haben.

Die Arbeiten Fresnel's eröffneten den Untersuchungen der Mathematiker neue Bahnen. Cauchy, Lamé, Neumann, MacCullagh und neuerdings Sarrau und Boussinesq stellten eine Anzahl neuer Theorien auf, wobei sie von verschiedenen Gesichtspunkten ausgingen.

Wir werden diese verschiedenen Theorien nach einander betrachten, zuvor aber wollen wir aus den Gleichungen für die kleinen Bewegungen in einem elastischen Medium das Vorhandensein einer Fläche zweiten Grades ableiten, die bei diesem Studium eine Hauptrolle spielt und die von Cauchy in die Wissenschaft eingeführt wurde; es ist dies das Polarisations-Ellipsoïd.

145. Umformung der Bewegungsgleichungen. — Bei passender Wahl der Masseneinheit kann man die Dichte ϱ eines Moleküls des elastischen Mediums gleich Eins setzen. Dann lauten die in § 32 aufgestellten allgemeinen Bewegungsgleichungen:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= -\sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi_x'}\right), \\ \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= -\sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \eta_x'}\right), \\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= -\sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \zeta_x'}\right). \end{aligned}\right.$$

Um diesen Gleichungen zu genügen, geben wir ξ, η, ζ die Form

$$(2)\qquad \xi = A\,e^P, \qquad \eta = B\,e^P, \qquad \zeta = C\,e^P,$$

wobei:

$$P = \frac{2i\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z - Vt).$$

Die auf diese Weise erhaltene Bewegung pflanzt sich in ebenen Wellen fort, deren Normale die Richtungskosinus α, β, γ besitzt. Ersetzen wir in den Bewegungsgleichungen die partiellen Differentialquotienten von ξ, η, ζ durch ihre aus den Gleichungen (2) abgeleiteten Werthe, so erhalten wir drei Bedingungsgleichungen zwischen den Grössen A, B, C und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit V der Bewegung. Diese Gleichungen lassen sich in eine einfache Form bringen.

Die partiellen Differentialquotienten erster Ordnung von ξ, η, ζ nach den Koordinaten x, y, z enthalten alle die Grösse $\frac{2i\pi}{\lambda}e^P$ als Faktor. So ist z. B.

$$\xi_x' = \frac{2i\pi}{\lambda}\alpha A\,e^P, \qquad \xi_y' = \frac{2i\pi}{\lambda}\beta A\,e^P \ldots.$$

Demnach wird W_2, eine Funktion zweiten Grades dieser partiellen Differentialquotienten, als Faktor die Grösse $\left(\frac{2i\pi}{\lambda}\right)^2 e^{2P}$ enthalten. Setzen wir also

$$W_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{2i\pi}{\lambda}\right)^2 e^{2P}\,\Pi,$$

so ist Π ein homogenes Polynom zweiten Grades in Bezug auf A, B, C und α, β, γ.

Durch Differentiation dieser Funktion W_2 nach A erhalten wir

$$\frac{\partial W_2}{\partial A} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2i\pi}{\lambda}\right)^2 e^{2P}\frac{\partial \Pi}{\partial A}. \tag{3}$$

Andererseits lässt sich der Differentialquotient von W_2 nach A auch schreiben

$$\frac{\partial W_2}{\partial A} = \sum \frac{\partial W_2}{\partial \xi'_x}\cdot\frac{\partial \xi'_x}{\partial A},$$

und wenn man in diesem Ausdruck die nach A genommenen Differentialquotienten der verschiedenen partiellen Derivirten von ξ, η, ζ durch ihre Werthe ersetzt, so erhält man

$$\frac{\partial W_2}{\partial A} = \frac{2i\pi}{\lambda} e^{P}\sum \alpha\frac{\partial W_2}{\partial \xi'_x}.$$

Durch Vergleichung dieses Werthes von $\frac{\partial W_2}{\partial A}$ mit (3) findet man

$$\sum \alpha\frac{\partial W_2}{\partial \xi'_x} = -\frac{1}{2}\,\frac{2i\pi}{\lambda}\,e^{P}\frac{\partial \Pi}{\partial A}. \tag{4}$$

Aus dieser Gleichung wollen wir einen neuen Ausdruck für die rechte Seite der Bewegungsgleichungen (1) ableiten. Der Differentialquotient $\frac{\partial W_2}{\partial \xi'_x}$ ist eine homogene lineare Funktion der partiellen Differentialquotienten der Grössen ξ; wenn man also diese partiellen Differentialquotienten durch ihre aus den Gleichungen (2) abgeleiteten Werthe ersetzt, so tritt die Grösse $\frac{2i\pi}{\lambda}e^{P}$ als Faktor auf. Wir können demnach schreiben:

$$\frac{\partial W_2}{\partial \xi'_x} = \frac{2i\pi}{\lambda} e^{P}\varphi,$$

wo φ eine lineare homogene Funktion von A, B, C und α, β, γ darstellt, die aber nicht von x, y, z abhängt. Folglich erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi'_x}\right) = \frac{2i\pi}{\lambda} e^{P}\varphi\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{2i\pi}{\lambda} e^{P}\varphi\frac{2i\pi\alpha}{\lambda},$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi_x'}\right) = \frac{2 i \pi}{\lambda} \alpha \frac{\partial W_2}{\partial \xi_x'};$$

und schliesslich

$$\sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi_x'}\right) = \frac{2 i \pi}{\lambda} \sum \alpha \frac{\partial W_2}{\partial \xi_x'}.$$

Ersetzt man auf der rechten Seite dieser Gleichung die unter dem Summenzeichen stehende Grösse durch ihren Werth (4), so findet man

$$\sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi_x'}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{2 i \pi}{\lambda}\right)^2 e^{P} \frac{\partial \Pi}{\partial A};$$

dies ist, bis auf das Vorzeichen, der Werth der rechten Seite von der ersten der Gleichungen (1).

Andererseits liefert uns die erste der Gleichungen (2) die Beziehung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = A e^{P} V^2 \left(\frac{2 i \pi}{\lambda}\right)^2;$$

demnach führt die erste der Bewegungsgleichungen zu der Relation

$$A e^{P} V^2 \left(\frac{2 i \pi}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2 i \pi}{\lambda}\right)^2 e^{P} \frac{\partial \Pi}{\partial A},$$

oder

$$A V^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial A}.$$

Die beiden anderen Bewegungsgleichungen würden uns analoge Beziehungen liefern, so dass wir die Gleichungen (1) ersetzen können durch die Gruppe

$$(5) \qquad \begin{aligned} A V^2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial A}, \\ B V^2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial B}, \\ C V^2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial C}. \end{aligned}$$

Das System dieser drei Gleichungen könnte man analytisch auflösen; man würde dann die Werthe von V und von A, B, C erhalten, welche für gegebene Werthe α, β, γ die den Bewegungsgleichungen genügenden Verschiebungen ξ, η, ζ ergeben würden. Ebenso kann man aber auch die von Cauchy angegebene geometrische Methode wählen, und diesen Weg wollen wir nun einschlagen.

146. Polarisations-Ellipsoïd. Wenn wir die Grössen A, B, C als Koordinaten eines Punktes betrachten, so stellt die Gleichung $\Pi = 1$, deren linke Seite für A, B, C homogen und vom zweiten Grad ist, eine auf ihren Mittelpunkt bezogene Fläche zweiten Grades dar; diese heisst das Polarisations-Ellipsoïd.

Die Koordinaten A, B, C des Endes einer Axe dieser Oberfläche sind dadurch bestimmt, dass an diesem Punkt der Radiusvektor senkrecht zur Fläche steht. Die Richtungskosinus der Normale sind proportional $\frac{\partial \Pi}{\partial A}$, $\frac{\partial \Pi}{\partial B}$, $\frac{\partial \Pi}{\partial C}$ und diejenigen des Radiusvektor am Punkt A, B, C sind den Koordinaten dieses Punktes proportional, so dass die Grössen A, B, C den Gleichungen

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} AS &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial A}, \\ BS &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial B}, \\ CS &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial C} \end{aligned}$$

genügen müssen.

Die Elimination von A, B, C aus diesen drei Gleichungen, die linear und homogen für diese Grössen sind, führt bekanntlich für S zu einer Gleichung dritten Grades. Jeder Wurzel dieser Gleichung entspricht ein Werthsystem der A, B, C, das man erhält, wenn man den Werth von S in die Gleichungen (6) einsetzt. Nun unterscheiden sich diese Gleichungen von (5) nur dadurch, dass V^2 durch S ersetzt ist. Demnach führt auch die Auflösung der Gleichungen (5) auf drei Werthe von V und auf drei Werthsysteme von A, B, C. Durch Einsetzen dieser Werthe in die Gleichungen (2) erhalten wir drei Werthsysteme von ξ, η, ζ, welche den Bewegungsgleichungen genügen.

Die so gefundenen Werthe von ξ, η, ζ entsprechen drei Verschiebungsrichtungen, deren Richtungskosinus den Grössen ξ, η, ζ und demnach auch den drei Werthsystemen von A, B, C proportional sind. Diese Werthe, welche Lösungen der Gleichungen (6) darstellen, sind also den Richtungskosinus der Axen des Polarisations-Ellipsoïds proportional; demnach stehen die entsprechenden Verschiebungsrichtungen senkrecht zu einander.

Es folgt hieraus: *die Schwingung verläuft parallel zu einer der Axen des Polarisations-Ellipsoïds, und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit* $V = \sqrt{S}$ *ist umgekehrt proportional der Länge dieser Axe.*

147. Soll also eine ebene Welle, die sich in einem anisotropen elastischen Medium fortpflanzt, eben und zur Richtung α, β, γ stets senkrecht bleiben, so müssen, wie sich aus dem Vorhergehenden ergibt, die Verschiebungen der Moleküle der Wellenebene parallel zu einer der Axen des Polarisations-Ellipsoïds erfolgen. Geht die Schwingung der Moleküle nicht in einer dieser Richtungen vor sich, so wird man nach dem Princip der Superposition kleiner Bewegungen die Verschiebung jedes Moleküls nach den Axen des Ellipsoïds in drei Komponenten zerlegen und annehmen können, dass die gegebene Welle aus drei ebenen Wellen zusammengesetzt ist, deren Schwingungen parallel zu den Axen verlaufen. Jede dieser ebenen Wellen wird sich ungestört fortpflanzen, und da ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeiten (die Quadratwurzeln aus den Wurzeln der Gleichung für S) im Allgemeinen verschieden sind, so werden sich diese Wellen trennen. Nach der Elasticitätstheorie wird demnach ein Lichtstrahl, der ein anisotropes Medium durchsetzt, sich in drei Strahlen zerlegen, d. h. man müsste eine dreifache Brechung erhalten.

Diese Folgerung steht aber mit der Erfahrung in Widerspruch, da man bis jetzt nur eine doppelte Brechung beobachtet hat. Um nun die Elasticitätstheorie mit der Erfahrung in Uebereinstimmung zu bringen, kann man über die Zusammensetzung des Medium, das die Lichtschwingungen fortpflanzt, verschiedene Hypothesen aufstellen.

Man kann nämlich annehmen:

1. Dass der Aether inkompressibel ist (Fresnel);

2. dass einer der von der Theorie geforderten Strahlen nicht wahrnehmbar ist, da er eine zu geringe Intensität besitzt (Cauchy);

3. dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einer Richtung Null ist. Das Polarisations-Ellipsoïd, dessen Axen den Geschwindigkeiten umgekehrt proportional sind, wird dann ein Cylinder (Neumann, Lamé, Mac-Cullagh);

4. dass eine der Axen des Polarisations-Ellipsoïds, das damit zu einem Hyperboloïd wird, imaginär ist. Der in dieser Richtung schwingende Lichtstrahl verschwindet dann.

Das Studium der verschiedenen Hypothesen über die Doppelbrechung wird uns zeigen, dass diese Grundannahmen nach Ergänzung durch einige Hülfshypothesen die Erscheinung der Doppelbrechung zu erklären gestatten.

148. In isotropen Medien entsteht durch Brechung nur ein einziger gebrochener Strahl; wir wollen nun untersuchen, was in diesem besonderen Fall aus dem Polarisations-Ellipsoïd wird.

Wir haben gesehen (§ 24), dass sich die Funktion W_2 in isotropen Medien reducirt auf

$$W_2 = \lambda K + \mu H + \nu \Theta^2.$$

Da das Polynom K aus den Bewegungsgleichungen (§ 33) verschwindet, so können wir ohne Aenderung des Resultats annehmen, dass K nicht in den Ausdruck von W_2 eingeht. Wir setzen also $\lambda = 0$ und ausserdem, um der Transversalität der Schwingungen Rechnung zu tragen (§ 46),

$$\mu + \nu = 0.$$

Dann wird die Funktion W_2

$$W_2 = \mu (H - \Theta^2),$$

oder wenn man in diesem Ausdruck H und θ durch ihre in § 19 und § 20 gefundenen Werthe ersetzt,

$$W_2 = \mu \left[\sum \xi_x'^2 - (\xi_x' + \eta_y' + \zeta_z')^2\right].$$

Aus dieser neuen Gleichung lässt sich leicht der folgende Ausdruck für das Polarisations-Ellipsoïd ableiten:

$$\Pi = \mu \left[(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(A^2 + B^2 + C^2) - (A\alpha + B\beta + C\gamma)^2\right] = 1.$$

Dies ist die Gleichung eines Kreiscylinders, der die Kugel

$$A^2 + B^2 + C^2 = \frac{1}{\mu}$$

in einem Kreis berührt; der letztere stellt den Schnitt der Kugel mit der Ebene

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$$

dar.

Da sich das Polarisations-Ellipsoïd somit auf einen Kreiscylinder reducirt, so wird eine Axe des Ellipsoïds unendlich und die entsprechende Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die der Länge dieser Axe umgekehrt proportional ist, wird demnach Null; die beiden anderen Axen sind gleich dem Kugelhalbmesser. Es gibt somit nur einen Werth für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in einem isotropen Medium, ein Resultat, das mit der Erfahrung vollständig übereinstimmt.

Theorie von Fresnel.

149. Durch das Studium der Interferenz bei polarisirtem Licht hatte Fresnel die Ueberzeugung gewonnen, dass die Lichtschwingungen transversal gerichtet seien; er versuchte deshalb im Anschluss an dieses experimentelle Resultat die Erscheinungen der Doppelbrechung in ein- und zweiaxigen Krystallen zu erklären. Unter der Annahme, dass diese Schwingungen senkrecht zur Polarisationsebene stehen, fand er bald eine Erklärung für die Fortpflanzung des Lichtes in einaxigen Krystallen, die mit den bekannten Experimentalgesetzen, besonders mit dem Gesetz von Malus, in Uebereinstimmung war. Durch eine Reihe glücklicher Schlussfolgerungen, die wir in seiner ersten Abhandlung über die Doppelbrechung[1]) angedeutet finden, gelang es ihm, sich auch von dem Strahlengang in zweiaxigen Krystallen Rechenschaft zu geben.

Als Fresnel durch zahlreiche Experimente die Vorstellung bestätigt fand, welche er sich von der Erscheinung der Doppelbrechung gebildet hatte, suchte er auch nach einer mechanischen Erklärung derselben. Er gelangte hierzu mit Hülfe von zwei Hypothesen, die wir später betrachten wollen; wir werden dann auch sehen, wie man aus ihnen strenge die wirklichen Gesetze der Doppelbrechung ableiten kann. Zunächst aber wollen wir kurz den Gedankengang Fresnel's in's Auge fassen; in Betreff der Einzelheiten muss auf die gesammelten Werke desselben verwiesen werden.

150. Mechanische Erklärung der Doppelbrechung. — Wenn man einem Molekül eines elastischen Medium gleiche Verschiebungen nach allen Richtungen ertheilt, so ruft jede derselben eine elastische Kraft hervor. Diese ist dem Quadrat des in die Verschiebungsrichtung fallenden Radiusvektors eines bestimmten Ellipsoïds umgekehrt proportional, und parallel zu der auf dem Ellipsoïd am Ende des Radiusvektors errichteten Normalen. Dies Ellipsoïd nennt man das inverse Elasticitäts-Ellipsoïd (Ovaloïd) oder oft auch nur das Elasticitäts-Ellipsoïd. Die Axen dieses Ellipsoïds sind also so beschaffen, dass einer Verschiebung in der Richtung einer derselben eine elastische Kraft von derselben Richtung und von umgekehrtem Sinn entspricht; es sind dies die Elasticitäts-Axen des Medium.

Der Schnitt des Elasticitäts-Ellipsoïds durch eine Ebene ist eine Ellipse, die wir mit E bezeichnen wollen; eine Verschiebung in einer der Axen dieser Ellipse ruft eine elastische Kraft hervor, die im Allgemeinen nicht in der Ebene der Ellipse E liegen wird, aber deren Projektion auf diese Ebene mit der Axe zusammenfallen wird. Wenn man mit Fresnel annimmt, dass diese Komponente der elastischen Kraft allein wirksam ist, so wird die von der Verschiebung herrührende Schwingung in dem Medium immer in derselben Rich-

[1]) Fresnel, Oeuvres complètes, **2**, S. 261.

tung erfolgen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die im Allgemeinen der Quadratwurzel aus der wirksamen Kraft proportional ist, wird der in die Verschiebungsrichtung fallenden Ellipsenaxe umgekehrt proportional sein. In dem Fall, wo die betrachtete Verschiebung in der Ellipsenebene beliebig verläuft, kann man sie als aus zwei nach den Axen gerichteten Verschiebungen zusammengesetzt betrachten; sind die Axen verschieden, so ist dies auch bei den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Fall.

Wir wollen jetzt eine ebene Welle betrachten und mit Fresnel annehmen, dass die durch die Schwingungen der Moleküle dieser Welle hervorgebrachte elastische Kraft der elastischen Kraft proportional ist, die von der Verschiebung eines einzigen Moleküls herrührt. Wenn wir uns diese Welle durch die Superposition zweier ebenen Wellen entstanden denken, deren Schwingungsrichtungen mit den Ellipsenaxen zusammenfallen, so haben diese Wellen verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit und die zu ihnen gehörigen Schwingungen stehen senkrecht aufeinander. Dieser Schluss steht also mit der Erfahrung im Einklang, nach der sich eine in beliebigem Azimuth polarisirte ebene Welle in einem doppelbrechenden Krystall in zwei verschiedene, rechtwinkelig zu einander polarisirte Wellen theilt.

In dem Fall, wo die einfallende Welle mit einem Kreisquerschnitt des Elasticitäts-Ellipsoïds zusammenfällt, sind die beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten gleich, und die Welle theilt sich nicht; die austretende Welle muss vielmehr ihre ursprüngliche Polarisationsebene beibehalten. Da ein Ellipsoïd mit drei ungleichen Axen zwei Schaaren von Kreisebenen besitzt, so wird man im Allgemeinen zwei Fortpflanzungsrichtungen von der angegebenen Eigenschaft haben; diese Richtungen heissen die optischen Axen des Krystalls. Wird das Elasticitäts-Ellipsoïd ein Rotationskörper, so gibt es nur eine Schaar von Kreisschnitten und demnach nur eine optische Axe; dies ist bei den einaxigen Krystallen der Fall.

151. Hypothesen von Fresnel. — Dies ist in kurzen Zügen die Theorie von Fresnel; dieselbe befindet sich in allen Punkten mit den experimentellen Thatsachen in Uebereinstimmung; indessen beruht sie offenbar auf zwei Hypothesen, die noch genauer geprüft werden müssen. Diese beiden Hypothesen lassen sich folgendermaassen aussprechen:

1. Die durch die Bewegung einer ebenen Welle hervorgerufene elastische Kraft ist von der Richtung der Wellenebene unabhängig; sie hängt nur von der Schwingungsrichtung der Moleküle ab und ist der elastischen Kraft proportional, die durch ein isolirtes Molekül

erzeugt wird, während die anderen Moleküle der Wellenebene in Ruhe bleiben.

2. Die einzige wirksame Komponente der elastischen Kraft ist diejenige, welche der Wellenebene parallel gerichtet ist.

Die erste dieser Hypothesen, welche Fresnel vergebens zu rechtfertigen suchte, ist vollständig willkürlich; aber ihrer Annahme steht nichts im Wege. Es genügt hierzu die Voraussetzung, dass das Polarisations-Ellipsoïd von Cauchy unveränderlich und von der Richtung der Wellenebene, d. h. von α, β und γ unabhängig ist. Dies tritt ein, wenn das Polynom Π sich auf ein Polynom zweiten Grades von A, B, C, multiplicirt mit

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

reducirt.

Dieses feste Polarisations-Ellipsoïd ist, wie wir später sehen werden, nichts anderes als das Elasticitäts-Ellipsoïd von Fresnel.

Die zweite Hypothese ist eine unmittelbare Folge der Inkompressibilität des Aethers. Wie wir schon in § 48 bemerkten, nimmt Fresnel in seinen Berechnungen oft stillschweigend an, dass der Widerstand des Aethers gegen die Kompression Null ist, oder auch, dass er unendlich gross ist. Bei unseren bisherigen Ableitungen hatten wir den Standpunkt der ersten Hypothese eingenommen; wir wollen jetzt untersuchen, was aus den Bewegungsgleichungen bei Annahme der Hypothese wird, dass der Widerstand gegen die Kompression unendlich ist, d. h. dass das elastische Medium inkompressibel ist.

152. Bewegungsgleichungen in einem inkompressiblen Medium. — Die Inkompressibilität des Aethers setzt Verbindungen zwischen den Molekülen desselben voraus; wir müssen also die Theorie materieller starrer Systeme anwenden.

Die Gleichung, welche ausdrückt, dass der Aether inkompressibel ist, lautet $\theta = 0$. Wenn wir ein bestimmtes, von einer Fläche S begrenztes Volumen R des Aethers betrachten, und mit U das Potential der inneren und äusseren Kräfte von R bezeichnen, so erhalten wir unter Anwendung des Princips von d'Alembert die Gleichung

$$\delta U - \int \varrho \, d\tau \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \delta \xi + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \delta \eta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \delta \zeta \right) + \int \Delta \, \delta \Theta \, d\tau = 0,$$

die bei passender Wahl der willkürlichen Funktion Δ für jede beliebige virtuelle Verrückung $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ identisch erfüllt sein muss. Man kann also $\delta\eta = \delta\zeta = 0$ setzen und dann, wie wir bereits (§ 29) gesehen haben, δU durch die Summe

$$\delta U = \int P_x \, \delta\xi \, d\omega + \int \delta W \, d\tau$$

ersetzen, wo P_x die X-Komponente des Druckes darstellt, der auf ein Element $d\omega$ der Fläche S ausgeübt wird und der von der Wirkung der Moleküle von R' auf R herrührt. Die vorhergehende Gleichung wird dann, wenn man noch beachtet, dass

$$\Theta = \xi_x' + \eta_y' + \zeta_z'$$

ist,

$$(1) \qquad \int P_x \, \delta\xi \, d\omega + \int \delta W \, d\tau - \int \varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \delta\xi \, d\tau + \int \Delta \, \delta\xi_x' \, d\tau = 0.$$

Die vorstehenden Integrale müssen wir, wie in § 30, so umformen, dass sie die Glieder mit $\delta\xi_x'$ nicht mehr enthalten. Hierbei treten Doppelintegrale auf, die über die Oberfläche S auszudehnen sind, und dreifache, die sich auf den Raum R erstrecken. Da die zweifachen Integrale nicht in die Bewegungsgleichungen eingehen, so können wir die Untersuchung dieser Gleichungen dadurch vereinfachen, dass wir diese Integrale in unsere Rechnung nicht einführen. Dies kommt auf die Annahme hinaus, dass die dreifachen Integrale über den ganzen Raum ausgedehnt werden, und dass die elastischen Kräfte im Unendlichen Null sind.

Unter diesen Bedingungen verschwindet das erste Integral der vorhergehenden Gleichung, und wir erhalten als Werth des zweiten

$$\int \delta W \, d\tau = - \int \delta\xi \, d\tau \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial \xi_x'}\right).$$

Das letzte Integral formen wir ebenfalls um, indem wir die bekannte Gleichung

$$\iiint \frac{\partial F}{\partial x} \, d\tau = \iint \alpha \, F \, d\omega$$

benutzen, und

$$F = \Delta \, \delta\xi$$

setzen.

Wir finden dann

$$\iiint \Delta \frac{\partial (\delta\xi)}{\partial x} \, d\tau = \iint \alpha \, \Delta \, \delta\xi \, d\omega - \iiint \frac{\partial \Delta}{\partial x} \delta\xi \, d\tau,$$

oder, da nach unserer Uebereinkunft das zweifache Integral Null ist,

$$\int \Delta \, \delta\xi_x' \, d\tau = - \int \frac{\partial \Delta}{\partial x} \delta\xi \, d\tau.$$

Demnach kann die Gleichung (1) geschrieben werden

$$\int \delta\xi \, d\tau \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial \xi'_x}\right) + \int \varrho \, \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \, \delta\xi \, d\tau + \int \frac{\partial \Delta}{\partial x} \, \delta\xi \, d\tau = 0 ,$$

oder

$$\int \left(\varrho \, \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial \xi'_x}\right) + \frac{\partial \Delta}{\partial x} \right) \delta\xi \, d\tau = 0 .$$

Da diese Gleichung für alle Werthe von $\delta\xi$ erfüllt sein muss, so muss der Koefficient dieser Grösse in dem Differential Null sein. Man erhält so eine der Bewegungsgleichungen. Setzen wir $\varrho = 1$ und erinnern uns der bereits in § 32 gefundenen Gleichung

$$\sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial \xi'_x}\right) = \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi'_x}\right) ,$$

so gelangen wir zu folgendem Resultat

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi'_x}\right) - \frac{\partial \Delta}{\partial x} ,$$

(2)
$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = - \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \eta'_x}\right) - \frac{\partial \Delta}{\partial y} ,$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = - \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \zeta'_x}\right) - \frac{\partial \Delta}{\partial z} .$$

153. Fortpflanzung einer ebenen Welle. — Wir betrachten eine ebene Welle, die der Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

parallel ist. Die Verschiebungskomponenten der Moleküle dieser Welle besitzen dann die Form

$$\xi = A e^P , \qquad \eta = B e^P , \qquad \zeta = C e^P ,$$

worin

$$P = \frac{2 i \pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y + \gamma z - V t) .$$

Im Vorhergehenden (vgl. § 145) haben wir gesehen, dass man unter dieser Annahme für ξ, η, ζ erhält

$$W_2 = - \frac{1}{2} \left(\frac{2 i \pi}{\lambda}\right)^2 e^{2P} \Pi ,$$

$$\sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi'_x}\right) = - \frac{1}{2} \left(\frac{2 i \pi}{\lambda}\right)^2 e^P \frac{\partial \Pi}{\partial A} ,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathrm{A}\, e^{\mathrm{P}}\, \mathrm{V}^2 \left(\frac{2 i \pi}{\lambda}\right)^2 .$$

Um die Bewegungsgleichungen (2) zu erfüllen, wollen wir setzen

$$\varDelta = \mathrm{H}\, \frac{2 i \pi}{\lambda}\, e^{\mathrm{P}},$$

wo H eine von x, y, z und t unabhängige Konstante darstellt; aus dieser Gleichung folgt dann

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial x} = \alpha \mathrm{H} \left(\frac{2 i \pi}{\lambda}\right)^2 e^{\mathrm{P}} .$$

Wenn man die Werthe dieser verschiedenen Grössen in die Gleichungen (2) einsetzt, erhält man:

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} \mathrm{A}\,\mathrm{V}^2 &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{A}} - \alpha\,\mathrm{H}, \\ \mathrm{B}\,\mathrm{V}^2 &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{B}} - \beta\,\mathrm{H}, \\ \mathrm{C}\,\mathrm{V}^2 &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{C}} - \gamma\,\mathrm{H}. \end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser drei Gleichungen in Verbindung mit der Bedingungsgleichung $\theta = 0$ kann man H und die zu A, B, C proportionalen Grössen bestimmen.

Die Bedingungsgleichung wird nach Einsetzen der Werthe für die partiellen Differentialquotienten von ξ, η, ζ

$$\Theta = \frac{2 i \pi}{\lambda}\, e^{\mathrm{P}} (\mathrm{A}\,\alpha + \mathrm{B}\,\beta + \mathrm{C}\,\gamma) = 0;$$

hieraus erhält man die Gleichung

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{A}\,\alpha + \mathrm{B}\,\beta + \mathrm{C}\,\gamma = 0,$$

welche ausdrückt, dass die Schwingungen in der Wellenebene vor sich gehen. Dies Resultat liess sich übrigens erwarten, da die Transversalität der Schwingungen durch die identische Gleichung $\theta = 0$ ausgedrückt wird.

Vergleicht man die Bedingungsgleichungen (3) mit den Gleichungen (5) von § 145, so sieht man, dass sie sich von diesen nur durch die Einführung der drei Grössen αH, βH, γH unterscheiden. Diese Grössen sind also bis auf einen konstanten Faktor die Komponenten der Verbindungskraft, folglich sind die Richtungskosinus dieser Kraft proportional zu α, β, γ, mit anderen Worten, die Verbindungskraft steht senkrecht zur Wellenebene. Diese mathematische Folgerung aus der Inkompressibilität des Aethers würde an die Stelle der zweiten Hypothese von Fresnel treten können.

154. Die Werthe für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der ebenen Welle erhält man durch Elimination von A, B, C, H aus den Gleichungen (3) und der Gleichung (4). Wenn wir mit Fresnel annehmen, dass die von der Verschiebung einer ebenen Welle herrührende elastische Kraft unabhängig von der Richtung der Welle ist, so kann die Kräftefunktion W_2 nicht von α, β, γ abhängen, und das Polynom Π muss sich somit auf ein homogenes Polynom zweiten Grades für A, B, C reduciren, das mit einem konstanten homogenen Polynom zweiten Grades für α, β, γ multiplicirt ist; dies letztere Polynom kann nur $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ sein. Wählt man die Koordinatenaxen parallel zu den Axen des Polarisations-Ellipsoïds $\Pi = 1$, so erhält man

$$\Pi = (a\mathrm{A}^2 + b\mathrm{B}^2 + c\mathrm{C}^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = a\mathrm{A}^2 + b\mathrm{B}^2 + c\mathrm{C}^2,$$

und folglich

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{A}} = a\mathrm{A}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{B}} = b\mathrm{B}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{C}} = c\mathrm{C}.$$

Durch Einsetzen dieser Werthe in Gleichung (3) ergibt sich

$$(5) \qquad \begin{aligned} \mathrm{A}\,\mathrm{V}^2 &= a\mathrm{A} - \alpha\mathrm{H}, \\ \mathrm{B}\,\mathrm{V}^2 &= b\mathrm{B} - \beta\mathrm{H}, \\ \mathrm{C}\,\mathrm{V}^2 &= c\mathrm{C} - \gamma\mathrm{H}; \end{aligned}$$

und hieraus

$$\mathrm{A} = -\frac{\alpha\mathrm{H}}{\mathrm{V}^2 - a}, \quad \mathrm{B} = -\frac{\beta\mathrm{H}}{\mathrm{V}^2 - b}, \quad \mathrm{C} = -\frac{\gamma\mathrm{H}}{\mathrm{V}^2 - c}.$$

Wenn wir diese letzteren Grössen resp. mit α, β, γ multipliciren und dann addiren, so finden wir unter Berücksichtigung der Bedingungsgleichung (4)

$$\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \mathrm{C}\gamma = -\mathrm{H}\left(\frac{\alpha^2}{\mathrm{V}^2 - a} + \frac{\beta^2}{\mathrm{V}^2 - b} + \frac{\gamma^2}{\mathrm{V}^2 - c}\right) = 0,$$

also:

$$\frac{\alpha^2}{\mathrm{V}^2 - a} + \frac{\beta^2}{\mathrm{V}^2 - b} + \frac{\gamma^2}{\mathrm{V}^2 - c} = 0.$$

Diese Gleichung dient zur Bestimmung von V; man erhält also zwei Werthe für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

155. Die Grösse V kann leicht als Funktion von A, B, C dargestellt werden; man braucht zu diesem Zwecke nur die Gleichungen (5) mit resp. A, B, C zu multipliciren und sie dann zu addiren. Auf diese Weise erhält man

$$(A^2 + B^2 + C^2) V^2 = a A^2 + b B^2 + c C^2.$$

Nun bestimmen die Gleichungen (5) in Verbindung mit (4) nur Grössen, die A, B, C proportional sind; man kann also diese Gleichungen und folglich auch die Bewegungsgleichungen erfüllen durch Werthe von A, B, C, die der Gleichung

$$(6) \qquad \Pi = a A^2 + b B^2 + c C^2 = 1$$

genügen.

Es ist dann

$$V = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

Die geometrische Deutung dieses Ausdrucks liegt auf der Hand; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist umgekehrt proportional der Länge des in die Verschiebungsrichtung fallenden Radiusvektor des Ellipsoïds $\Pi = 1$. Hieraus folgt, dass das Ellipsoïd

$$a A^2 + b B^2 + c C^2 = 1$$

nichts anderes als das Fresnel'sche Elasticitäts-Ellipsoïd ist.

156. Wir schliessen die Betrachtung der Fresnel'schen Theorie mit der Bemerkung, dass es nicht nothwendig ist, den Aether als inkompressibel anzunehmen, sondern dass man auch auf andere Weise zu denselben Folgerungen gelangen kann. Man braucht nämlich nur vorauszusetzen, dass die Gleichung des Polarisations-Ellipsoïds eine besondere Form hat.

Wenn wir die erste der Gleichungen (5) mit α, die zweite mit β, die dritte mit γ multipliciren und dann addiren, so finden wir

$$V^2 (A \alpha + B \beta + C \gamma) = A a \alpha + B b \beta + C c \gamma - H;$$

und da nach (4) die linke Seite dieser Gleichung Null ist, so erhalten wir daraus

$$H = A a \alpha + B b \beta + C c \gamma .$$

Schreiben wir die Gleichung des Polarisations-Ellipsoïds

$$(7) \qquad \Pi = (a A^2 + b B^2 + c C^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2 H (A \alpha + B \beta + C \gamma) = 1 ,$$

wo H den obigen Werth besitzt, und setzen dies in die Gleichungen (5) des § 145 ein, die aus den Bewegungsgleichungen in einem von Verbindungen vollständig freien Medium abgeleitet sind, so finden wir

$$
\begin{aligned}
&A V^2 = a A - \alpha H - \frac{\partial H}{\partial A}(A\alpha + B\beta + C\gamma), \\
(8) \qquad &B V^2 = b B - \beta H - \frac{\partial H}{\partial B}(A\alpha + B\beta + C\gamma), \\
&C V^2 = c C - \gamma H - \frac{\partial H}{\partial C}(A\alpha + B\beta + C\gamma).
\end{aligned}
$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Addition derselben nach Multiplikation mit resp. α, β, γ:

$$
V^2(A\alpha + B\beta + C\gamma) = A a \alpha + B b \beta + C c \gamma
$$

$$
-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) H - (A\alpha + B\beta + C\gamma)\left(\alpha\frac{\partial H}{\partial A} + \beta\frac{\partial H}{\partial B} + \gamma\frac{\partial H}{\partial C}\right),
$$

oder, wenn man H durch seinen Werth ersetzt

$$
V^2(A\alpha + B\beta + C\gamma) = -(A\alpha + B\beta + C\gamma)\left(\alpha\frac{\partial H}{\partial A} + \beta\frac{\partial H}{\partial B} + \gamma\frac{\partial H}{\partial C}\right).
$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist

$$
(9) \qquad A\alpha + B\beta + C\gamma = 0,
$$

also dieselbe Beziehung, die wir aus der Inkompressibilität des Aethers mit Hülfe der Gleichung $\theta = 0$ abgeleitet haben. Wenn diese Gleichung erfüllt ist, reduciren sich die Ausdrücke (8) auf die Gleichungen (5). Auf diese Weise gelangen wir also wieder zu den Gleichungen (4) und (5), welche die Inkompressibilität des Aethers ausdrücken.

Eine andere Folgerung aus (9) ist die, dass die Normale zur Wellenebene senkrecht zu den Schwingungsrichtungen steht, die den Bewegungsgleichungen genügen. Da diese Schwingungen im Allgemeinen in die Richtung der Axen des Polarisations-Ellipsoïds fallen, so ist die Wellenebene eine Symmetrieebene des durch Gleichung (7) bestimmten Polarisations-Ellipsoïds.

Theorie von Cauchy.

157. Optische Symmetrieebenen der doppelbrechenden Krystalle. — Cauchy nimmt an, dass bei jedem anisotropen Medium der in demselben enthaltene Aether drei rechtwinklig zu einander stehende Symmetrieebenen zulässt. Die äussere Form einer Anzahl krystallisirter Substanzen zeigt uns, dass eine solche Symmetrie für die materiellen Moleküle in den Krystallen des kubischen, hexagonalen, quadratischen und orthorhombischen Systemes existirt; man kann also annehmen, dass in diesen Substanzen für die Moleküle des Aethers dieselbe Symmetrie stattfindet. Aber bei den zwei letzten Krystallsystemen, dem klinorhombischen und dem anorthischen (triklinischen) System sind keine drei Symmetrieebenen mehr vorhanden, und nichts berechtigt uns a priori dazu, die Existenz dieser drei Ebenen im Aether anzunehmen. In Wirklichkeit zeigt die Erfahrung, dass vom optischen Standpunkt aus die klinorhombischen und anorthischen Krystalle drei Symmetrieebenen besitzen; aber diese Ebenen haben keine feste Lage zu den Elementen des Krystallsystems, sondern ihre Richtungen ändern sich mit der Schwingungsdauer, d. h. mit der Wellenlänge des Lichtes. Wenn wir also mit Cauchy in jedem anisotropen Medium drei rechtwinklige Symmetrieebenen annehmen, müssen wir immer voraussetzen, dass das Licht homogen ist. Auf diese Weise nehmen wir auf die Erscheinungen der Dispersion ebensowenig Rücksicht, wie bei der Betrachtung der Fresnel'schen Theorie, bei der die Hauptebenen des Elasticitäts-Ellipsoïds mit den optischen Symmetrieebenen zusammenfielen.

Diese drei Symmetrieebenen wollen wir zu Koordinatenebenen wählen; aus Gründen der Symmetrie kann sich dann die linke Seite Π des Polarisations-Ellipsoïds nicht ändern, wenn man α mit $-\alpha$ und A mit $-$ A, oder β mit $-\beta$ und B mit $-$ B, oder endlich γ mit $-\gamma$ und C mit $-$ C vertauscht. Es folgt daraus, dass Π nur Glieder der folgenden Form enthalten darf

$$\begin{array}{cccc} \alpha^2 A^2, & \beta^2 A^2, & \gamma^2 A^2, & \beta\gamma BC, \\ \alpha^2 B^2, & \beta^2 B^2, & \gamma^2 B^2, & \alpha\gamma AC, \\ \alpha^2 C^2, & \beta^2 C^2, & \gamma^2 C^2, & \alpha\beta AB. \end{array}$$

Da dies zwölf Glieder sind, so kann Π zwölf beliebige numerische Koefficienten enthalten, und die Gleichung des Polarisations-Ellipsoïds erhält demnach die Form

$$(1) \qquad A^2(\lambda\alpha^2 + \mu\beta^2 + \nu\gamma^2) + B^2(\lambda'\alpha^2 + \mu'\beta^2 + \nu'\gamma^2)$$
$$+ C^2(\lambda''\alpha^2 + \mu''\beta^2 + \nu''\gamma^2) + 2p\beta\gamma BC + 2q\gamma\alpha CA + 2r\alpha\beta AB = 1.$$

158. Folgerungen aus der Hypothese der Centralkräfte. — Bei Cauchy sind alle Kräfte Centralkräfte; auch bei der Theorie der Doppelbrechung nimmt er an, dass dies der Fall ist. Nun hatten wir in § 17 gefunden, dass die Zahl der numerischen Koefficienten in der Funktion W_2 bei Annahme centraler Kräfte sich verringert; wir müssen also in diesem Fall erwarten, eine Anzahl Beziehungen zwischen den zwölf numerischen Koefficienten des Polarisations-Ellipsoïds zu finden; diese wollen wir jetzt aufsuchen.

Wie wir im ersten Kapitel sahen, besteht bei centralen Kräften die Beziehung

$$W_2 = \sum \frac{\partial F}{\partial R} \varrho_2 + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 F}{\partial R^2} \varrho_1^2 ,$$

worin

$$\varrho_1 = 2 (Dx\, D\xi + Dy\, D\eta + Dz\, D\zeta) ,$$

$$\varrho_2 = D\xi^2 + D\eta^2 + D\zeta^2 ,$$

und

$$D\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} Dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} Dy + \frac{\partial \xi}{\partial z} Dz ,$$

$$D\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} Dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} Dy + \frac{\partial \eta}{\partial z} Dz ,$$

$$D\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial x} Dx + \frac{\partial \zeta}{\partial y} Dy + \frac{\partial \zeta}{\partial z} Dz .$$

Für eine ebene Welle haben die Grössen ξ, η, ζ die Form

$$\xi = A\, e^P , \qquad \eta = B\, e^P , \qquad \zeta = C\, e^P ,$$

so dass wir erhalten

$$D\xi = \frac{2 i \pi}{\lambda} A\, e^P (\alpha\, Dx + \beta\, Dy + \gamma\, Dz) ,$$

$$D\eta = \frac{2 i \pi}{\lambda} B\, e^P (\alpha\, Dx + \beta\, Dy + \gamma\, Dz) ,$$

$$D\zeta = \frac{2 i \pi}{\lambda} C\, e^P (\alpha\, Dx + \beta\, Dy + \gamma\, Dz) ;$$

und folglich

$$\varrho_1 = 2 \sum Dx\, D\xi = \frac{4 i \pi}{\lambda} e^P \sum A\, Dx \sum \alpha\, Dx ,$$

$$\varrho_2 = \sum D\xi^2 = \left(\frac{2 i \pi}{\lambda}\right)^2 e^{2P} \; (A^2 + B^2 + C^2) \left(\sum \alpha\, Dx\right)^2 ,$$

$$\varrho_1^2 = 4 \left(\frac{2 i \pi}{\lambda}\right)^2 e^{2P} \left(\sum A\, Dx \sum \alpha\, Dx\right)^2 .$$

Es ist nun leicht einzusehen, dass in ϱ_1^2 der

Koeff. von $\alpha^2 B^2$ — Koeff. von $4 \alpha \beta A B$ =

$$4 \left(\frac{2 i \pi}{\lambda}\right)^2 e^{2P} (Dx^2\, Dy^2 - Dx\, Dy\, Dx\, Dy),$$

Koeff. von $\alpha^2 C^2$ — Koeff. von $4 \alpha \gamma A C$ =

$$4 \left(\frac{2 i \pi}{\lambda}\right)^2 e^{2P} (Dx^2\, Dz^2 - Dx\, Dz\, Dx\, Dz) ,$$

und dass in ϱ_2 der

$$\text{Koeff. von } \alpha^2 B^2 - \text{Koeff. von } 4\alpha\beta A B = \left(\frac{2 i \pi}{\lambda}\right)^2 e^{2P} D x^2,$$

$$\text{Koeff. von } \alpha^2 C^2 - \text{Koeff. von } 4\alpha\gamma A C = \left(\frac{2 i \pi}{\lambda}\right)^2 e^{2P} D x^2.$$

In ϱ_1^2 und ϱ_2 ist also die Beziehung

$$\text{Koeff. von } \alpha^2 B^2 - \text{Koeff. von } 4\alpha\beta A B = \text{Koeff. von } \alpha^2 C^2 - \text{Koeff. von } 4\alpha\gamma A C$$

erfüllt; folglich ist dies auch bei W_2 und Π der Fall. Durch cyklische Vertauschung können wir daraus zwei andere Beziehungen ableiten; die zwölf numerischen Koefficienten der linken Seite in der Gleichung für das Polarisations-Ellipsoïd sind also durch drei Beziehungen verbunden, sodass nur noch neun Koefficienten willkürlich bleiben. Die drei Relationen zwischen den Koefficienten von Gleichung (1) lauten:

$$\begin{aligned} \lambda' - \frac{r}{2} &= \lambda'' - \frac{q}{2}, \\ \mu'' - \frac{p}{2} &= \mu - \frac{r}{2}, \qquad (2) \\ \nu - \frac{q}{2} &= \nu' - \frac{p}{2}. \end{aligned}$$

159. Quasi-transversale und quasi-longitudinale Schwingungen. — Da die in einem anisotropen Medium sich fortpflanzenden Schwingungen einer Wellenebene nach den Axen des Polarisations-Ellipsoïds gerichtet sein müssen (§ 147), so ist erforderlich, dass die Wellenebene mit einer der Hauptebenen des Polarisations-Ellipsoïds zusammenfällt, damit die Schwingungen genau transversal oder longitudinal zur Wellenebene verlaufen. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn die Normale zur Wellenebene mit einer der Axen des Ellipsoïds zusammenfällt, d. h. wenn α, β, γ den Gleichungen

$$A S = \frac{1}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial A}, \qquad B S = \frac{1}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial B}, \qquad C S = \frac{1}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial C}$$

genügen. Leitet man aus den Gleichungen (1) des Polarisations-Ellipsoïds von Cauchy die Werthe der rechten Seiten dieser letzten Gleichungen ab und ersetzt dann A durch α, B durch β, C durch γ, so erhält man

$$\begin{aligned} S &= \lambda \alpha^2 + \mu \beta^2 + \nu \gamma^2 + q \gamma^2 + r \beta^2, \\ S &= \lambda' \alpha^2 + \mu' \beta^2 + \nu' \gamma^2 + r \alpha^2 + p \gamma^2, \\ S &= \lambda'' \alpha^2 + \mu'' \beta^2 + \nu'' \gamma^2 + p \beta^2 + q \alpha^2. \end{aligned}$$

Damit diese Gleichungen für beliebige Werthe von α, β, γ erfüllt sind, müssen die Koefficienten von α^2, β^2, γ^2 für die drei Gleichungen dieselben sein; man hat also

$$\lambda = \lambda' + r = \lambda'' + q ,$$
$$\mu + r = \mu' = \mu'' + p ,$$
$$\nu + q = \nu' + p = \nu'' .$$

Aus diesen Gleichungen folgt in Verbindung mit den aus der Hypothese der Centralkräfte abgeleiteten Beziehungen (2)

$$p = q = r ;$$

dadurch erhalten die obigen Gleichungen die Form

$$\begin{array}{ll} \lambda = \lambda' + p , & \lambda' = \lambda'' \\ \mu = \mu' - p , & \mu' = \mu'' + p , \\ \nu = \nu' , & \nu' = \nu'' - p . \end{array}$$

Diese Beziehungen führen zu den Gleichungen

$$\lambda \alpha^2 + \mu \beta^2 + \nu \gamma^2 - p \alpha^2 = \lambda' \alpha^2 + \mu' \beta^2 + \nu' \gamma^2 - p \beta^2$$
$$= \lambda'' \alpha^2 + \mu'' \beta^2 + \nu'' \gamma^2 - p \gamma^2 .$$

Durch diese Bedingung wird ausgedrückt, dass das durch Gleichung (1) dargestellte Ellipsoïd ein Rotationskörper ist, dessen Axe die Richtungskosinus α, β, γ besitzt. Die Schwingungen können also nur dann streng longitudinal oder transversal verlaufen, wenn das Polarisations-Ellipsoïd ein Rotations-Ellipsoïd ist, dessen Axe mit der Normalen zur Wellenebene zusammenfällt. Eine derartige Folgerung ist aber unzulässig, da die zwei rechtwinklig zu einander stehenden transversalen Schwingungsebenen, welche durch die einfallende Ebene entstehen, dieselbe Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzen müssten, so dass keine Doppelbrechung auftreten könnte.

So führt die Hypothese von Cauchy zu der Annahme, dass eine in einem anisotropen Medium sich fortpflanzende Welle drei ebene Wellen erzeugt, deren Schwingungen weder senkrecht zur Wellenebene gerichtet sind, noch in derselben liegen. Da aber die Doppelbrechung in allen doppelbrechenden Substanzen sehr schwach ist, so werden die Schwingungen zweier Ebenen quasi-transversal und die der dritten quasi-longitudinal sein.

Das Vorhandensein quasi-transversaler Schwingungen widerspricht nicht vollkommen unserer Kenntniss über die Lichtschwingungen, denn wenn auch die Erfahrung zeigt, dass die Schwingungen in der Luft streng transversal sein müssen, so ist es doch durch nichts bewiesen, dass dies auch im Innern der Krystalle stattfinden muss. Aus welchem Grund der Strahl, dessen Schwingungen quasi-longitudinal verlaufen, in Wirklichkeit nicht zu Stande kommt, konnte Cauchy nicht erklären.

160. Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Wellen. — Da die Fresnel'sche Theorie durch die feinsten Messungen bestätigt wird, so muss jede Theorie der Doppelbrechung zu denselben Folgerungen führen, wie diejenige von Fresnel; besonders muss man zu denselben Werthen für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der reellen Wellen gelangen. Diese Geschwindigkeiten sind in der Theorie von Cauchy den Axen des Polarisations-Ellipsoïds umgekehrt proportional und bei Fresnel den Axen der Ellipse E, die durch den Schnitt der Wellenebene mit dem Elasticitäts-Ellipsoïd entsteht; damit beide also denselben Werth haben, müsste die Ellipse E mit einem der Hauptschnitte des Polarisations-Ellipsoïds übereinstimmen. Dann würde jedoch die Wellenebene, welche die Ellipse E enthält, ein Hauptschnitt des Polarisations-Ellipsoïds von Cauchy sein; dies kann aber, wie wir eben gezeigt haben, nicht der Fall sein. Die theoretischen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Wellen können also in beiden Theorien nicht dieselben Werthe besitzen. Wenn man jedoch, wie es Cauchy thut, das Polarisations-Ellipsoïd durch die Ellipse E gehen lässt, so werden die Differenzen zwischen diesen Werthen von der Ordnung der Beobachtungsfehler.

Ist nämlich

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 = 1$$

die Gleichung des Polarisations-Ellipsoïds von Cauchy in Bezug auf seine Axen, so macht die Wellenebene in Folge der schwachen Doppelbrechung der Krystalle einen unendlich kleinen Winkel mit einer der Hauptebenen dieses Ellipsoïds, z. B. mit der Ebene $z = 0$. Bezeichnet man mit α, β, γ die Richtungskosinus der Normale zur Wellenebene, so werden α und β unendlich klein. Nach unserer Uebereinkunft schneidet nun die Wellenebene das Ellipsoïd in der Ellipse E; die reciproken Quadrate der Axen dieses Schnittes sind gegeben durch die Wurzeln R der folgenden Gleichung:

$$\alpha^2 (b - \mathrm{R})(c - \mathrm{R}) + \beta^2 (c - \mathrm{R})(a - \mathrm{R}) + \gamma^2 (a - \mathrm{R})(b - \mathrm{R}) = 0.$$

Vernachlässigt man die Quadrate von α und β, so reducirt sich diese Gleichung auf

$$(a - \mathrm{R})(b - \mathrm{R}) = 0;$$

die Wurzeln a und b dieser Gleichung sind aber gerade die reciproken Quadrate der beiden Hauptaxen des Polarisations-Ellipsoïds, welche in der Ebene $z=0$ liegen. Demnach unterscheiden sich diese Axen von denen der Ellipse E nur um unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung; dasselbe wird für die Reciproken dieser Grössen und folglich auch für die Werthe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Fall sein.

161. Gleichung des Polarisations-Ellipsoïds von Cauchy. — Um also das Vorhergehende kurz zusammenzufassen, so nimmt Cauchy das Vorhandensein dreier optischen Symmetrieebenen an, setzt ferner Centralkräfte voraus und lässt sein Polarisations-Ellipsoïd durch die Ellipse gehen, welche durch den Schnitt der Wellenebene mit dem Elasticitäts-Ellipsoïd von Fresnel entsteht. Mit Hülfe dieser letzten Hypothese kann man leicht die Gleichung des Polarisations-Ellipsoïds finden.

Die Gleichung des Elasticitäts-Ellipsoïds lautet

$$a\,\mathrm{A}^2 + b\,\mathrm{B}^2 + c\,\mathrm{C}^2 = 1,$$

und diejenige der Wellenebene

$$\alpha\,\mathrm{A} + \beta\,\mathrm{B} + \gamma\,\mathrm{C} = 0;$$

die Gleichung eines Ellipsoïds, welches durch den Schnitt der beiden Flächen geht, hat demnach die Form

$$\Pi = (a\,\mathrm{A}^2 + b\,\mathrm{B}^2 + c\,\mathrm{C}^2) + (\alpha\,\mathrm{A} + \beta\,\mathrm{B} + \gamma\,\mathrm{C})\,(\alpha_1\,\mathrm{A} + \beta_1\,\mathrm{B} + \gamma_1\,\mathrm{C}) = 1.$$

Diese Gleichung wird homogen und vom zweiten Grad für α, β, γ und für A, B, C, wenn man sie schreibt

$$\Pi = (a\,\mathrm{A}^2 + b\,\mathrm{B}^2 + c\,\mathrm{C}^2)\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$
$$+ (\alpha\,\mathrm{A} + \beta\,\mathrm{B} + \gamma\,\mathrm{C})\,(\alpha_1\,\mathrm{A} + \beta_1\,\mathrm{B} + \gamma_1\,\mathrm{C}) = 1,$$

und wenn man annimmt, dass α_1, β_1, γ_1 lineare homogene Funktionen von α, β, γ sind. Da die Koordinatenebenen mit den optischen Symmetrieebenen zusammenfallen, so darf sich die vorhergehende Gleichung nicht ändern, wenn man gleichzeitig die Zeichen von α und A, oder von β und B, oder endlich von γ und C umkehrt. Die linearen Funktionen α_1, β_1, γ_1 müssen sich also reduciren auf

$$\alpha_1 = a_1\,\alpha, \quad \beta_1 = b_1\,\beta, \quad \gamma_1 = c_1\,\gamma;$$

setzt man diese Werthe in die Gleichung des Polarisations-Ellipsoïds ein, so erhält man

$$(1) \qquad \Pi = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\,(a\,\mathrm{A}^2 + b\,\mathrm{B}^2 + c\,\mathrm{C}^2)$$
$$+ (\alpha\,\mathrm{A} + \beta\,\mathrm{B} + \gamma\,\mathrm{C})\,(a_1\,\alpha\,\mathrm{A} + b_1\,\beta\,\mathrm{B} + c_1\,\gamma\,\mathrm{C}) = 1.$$

Wenn wir jetzt annehmen, dass die Kräfte Centralkräfte sind, so werden zwischen den Koefficienten dieser Gleichung drei Beziehungen bestehen, deren erste lautet (§ 158)

$$\text{Koeff. von } \alpha^2 B^2 - \text{Koeff. von } 4\alpha\beta A B = \text{Koeff. von } \alpha^2 C^2 - \text{Koeff. von } 4\alpha\gamma A C;$$

daraus ergibt sich

$$b - 4(a_1 + b_1) = c - 4(a_1 + c_1).$$

Die beiden anderen Beziehungen führen zu

$$c - 4(b_1 + c_1) = a - 4(b_1 + a_1),$$
$$a - 4(c_1 + a_1) = b - 4(c_1 + b_1).$$

Diese drei Gleichungen können übrigens geschrieben werden

$$a - 4a_1 = b - 4b_1 = c - 4c_1.$$

Dies sind die Bedingungen, welche durch die Hypothese von den Centralkräften eingeführt werden; wenn diese erfüllt werden, ist, wie leicht nachzuweisen, die Wellenebene keine Symmetrieebene des Ellipsoïds.

162. Lassen wir dagegen die Hypothese von den Centralkräften fallen, so wird die Wellenebene eine Symmetrieebene des Polarisations-Ellipsoïds werden können. In diesem Fall muss die Senkrechte zur Wellenebene eine Hauptaxe sein, d. h. die Richtungskosinus α, β, γ müssen den Gleichungen für die Hauptrichtungen des Ellipsoïd (1) im vorhergehenden Paragraphen genügen. Die erste dieser Gleichungen lautet

$$A S = \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial A} = a A(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \frac{1}{2}\alpha(a_1 \alpha A + b_1 \beta B + c_1 \gamma C) + \frac{1}{2} a_1 \alpha(\alpha A + \beta B + \gamma C);$$

ersetzt man hierin A, B, C durch α, β, γ, so erhält man

$$S = \left(a + \frac{a_1}{2}\right)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \frac{1}{2}(a_1 \alpha^2 + b_1 \beta^2 + c_1 \gamma^2).$$

Aus den beiden anderen Gleichungen würde folgen

$$S = \left(b + \frac{b_1}{2}\right)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \frac{1}{2}(a_1 \alpha^2 + b_1 \beta^2 + c_1 \gamma^2),$$
$$S = \left(c + \frac{c_1}{2}\right)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \frac{1}{2}(a_1 \alpha^2 + b_1 \beta^2 + c_1 \gamma^2).$$

Damit diese drei Gleichungen sich auf eine reduciren, ist es nöthig und hinreichend, dass

$$a + \frac{a_1}{2} = b + \frac{b_1}{2} = c + \frac{c_1}{2}.$$

Hat man den speciellen Fall

$$a + \frac{a_1}{2} = b + \frac{b_1}{2} = c + \frac{c_1}{2} = 0, \tag{2}$$

so ist die Wellenebene eine Hauptebene des Polarisations-Ellipsoïds und die Schwingungen sind streng transversal und longitudinal gerichtet. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten derjenigen Wellen, deren Schwingungen transversal verlaufen, sind den Axen des durch den Schnitt entstandenen Ellipsoïds umgekehrt proportional; diejenige der Welle mit longitudinalen Schwingungen ist umgekehrt proportional der zur Welle senkrechten Axe, d. h. der Quadratwurzel von

$$S = \left(c + \frac{c_1}{2}\right)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \frac{1}{2}(a_1 \alpha^2 + b_1 \beta^2 + c_1 \gamma^2);$$

dieser Ausdruck reducirt sich in Folge der Beziehungen (2) auf

$$S = \frac{1}{2}(a_1 \alpha^2 + b_1 \beta^2 + c_1 \gamma^2).$$

Da die Grössen a, b, c positiv sind, so folgt aus den Gleichungen (2), dass a_1, b_1, c_1 negativ sein müssen; dann wird S negativ, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen imaginär und der longitudinale Strahl verschwindet.

Man findet also auf diese Weise sehr leicht alle Folgerungen der Theorie von Fresnel wieder.

Theorie von Neumann.

163. Hypothesen von Neumann. — Die besonderen Hypothesen dieser Theorie, die fast gleichzeitig von Neumann, Lamé und Mac-Cullagh aufgestellt wurde, sind folgende:

1. Die Wellenebene ist eine Symmetrieebene des Polarisations-Ellipsoïds.

2. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des longitudinalen Strahls ist Null.

Es folgt aus diesen Hypothesen, dass das Polarisations-Ellipsoïd sich auf einen Cylinder reducirt, dessen Erzeugende senkrecht zur

Wellenebene stehen. Wenn wir mit A′, B′, C′ die den Richtungskosinus der Schwingungen proportionalen Grössen bezeichnen, die wir in den vorangegangenen Hypothesen A, B, C genannt hatten, und wenn ferner die Richtungskosinus der Normale zur Wellenebene die Werthe α, β, γ haben, so wird die linke Seite Π der Gleichung für das Polarisations-Ellipsoïd eine homogene Funktion zweiten Grades für A′, B′, C′ und für α, β, γ. Dies Ellipsoïd reducirt sich auf einen Cylinder, dessen Erzeugende senkrecht zur Wellenebene stehen, wenn die Gleichungen

$$(1) \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial A'} = 0, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial B'} = 0, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial C'} = 0,$$

welche ausdrücken, dass eine der Axen des Ellipsoïds Null ist, für $A' = \alpha$, $B' = \beta$, $C' = \gamma$ erfüllt sind.

164. Gleichung des Polarisationscylinders. — Setzen wir

$$(2) \qquad \begin{aligned} A &= C'\beta - B'\gamma, \\ B &= A'\gamma - C'\alpha, \\ C &= B'\alpha - A'\beta, \end{aligned}$$

so wird die linke Seite der Gleichung

$$(3) \qquad \Pi = a\,A^2 + b\,B^2 + c\,C^2 + 2\,d\,B\,C + 2\,e\,C\,A + 2\,f\,A\,B = 1$$

homogen vom zweiten Grad für A′, B′, C′ und für α, β, γ. Wir wollen nun nachweisen, dass dies die Gleichung des Polarisationscylinders von Neumann darstellt.

Zunächst zeigen wir, dass die Gleichungen (1) erfüllt sind, wenn das Polynom Π diese Form besitzt und wenn man A′, B′, C′ in demselben durch α, β, γ ersetzt. Dann erhält man nämlich

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial A'} = (a\,A + e\,C + f\,B)\frac{\partial A}{\partial A'} + (b\,B + d\,C + f\,A)\frac{\partial B}{\partial A'} + (c\,C + d\,B + e\,A)\frac{\partial C}{\partial A'}.$$

Setzt man nun in den Gleichungen (2) $A' = \alpha$, $B' = \beta$, $C' = \gamma$, so findet man $A = B = C = 0$; durch diese Substitution werden also in der vorhergehenden Gleichung die Koefficienten der Differentialquotienten auf der rechten Seite Null, und man erhält $\frac{\partial \Pi}{\partial A'} = 0$. In analoger Weise ergibt sich, dass auch die beiden letzten der Gleichungen (1) erfüllt sind. Gleichung (3) stellt demnach in der That einen Cylinder dar, dessen Erzeugende der Richtung α, β, γ parallel sind.

Um den Beweis zu vervollständigen, hätte man noch zu zeigen, dass, wenn $\Pi = 1$ die Gleichung eines Cylinders ist, dessen Erzeugende senkrecht zur Wellenebene stehen, diese Gleichung in die Form (3) gebracht werden kann, wenn gleichzeitig A, B, C durch die Beziehungen (2) definirt sind. Diesen Nachweis wollen wir jedoch hier übergehen.

Wir können nun die Koordinatenaxen derart wählen, dass die doppelten Produkte der Gleichung (3) verschwinden; diese reducirt sich dann auf

$$\Pi = a\,\mathrm{A}^2 + b\,\mathrm{B}^2 + c\,\mathrm{C}^2 = 1. \tag{4}$$

Die neuen Koordinatenebenen sind dann die optischen Symmetrieebenen des Medium. Wenn man nämlich Gleichung (2) betrachtet, so sieht man, dass die Vertauschung von A′ mit $-$A′ und von α mit $-\alpha$ den Werth von A nicht verändert und nur die Zeichen von B und C umkehrt; da diese Grössen aber nur mit dem Quadrat in den Ausdruck für Π eingehen, so wird dies Polynom denselben Werth behalten, wenn man gleichzeitig die Zeichen von A′ und von α ändert; folglich ist die yz-Ebene eine optische Symmetrieebene. Eine analoge Ueberlegung würde zeigen, dass die beiden anderen Koordinatenebenen gleichfalls mit den optischen Symmetrieebenen zusammenfallen. Es sind dies also dieselben Ebenen, die wir bei den Theorien von Fresnel und von Cauchy angenommen haben.

165. Fortpflanzung einer ebenen Welle. — Die Gleichungen, aus denen man die Schwingungsrichtungen und die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten einer ebenen Welle findet, lauten für diesen Fall

$$\mathrm{A}'\,\mathrm{V}^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial\Pi}{\partial\mathrm{A}'} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\mathrm{A}}\cdot\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial\mathrm{A}'} + \frac{\partial\Pi}{\partial\mathrm{B}}\cdot\frac{\partial\mathrm{B}}{\partial\mathrm{A}'} + \frac{\partial\Pi}{\partial\mathrm{C}}\cdot\frac{\partial\mathrm{C}}{\partial\mathrm{A}'}\right),$$

oder

$$\mathrm{A}'\,\mathrm{V}^2 = b\,\gamma\,\mathrm{B} - c\,\beta\,\mathrm{C},$$
$$\mathrm{B}'\,\mathrm{V}^2 = c\,\alpha\,\mathrm{C} - a\,\gamma\,\mathrm{A},$$
$$\mathrm{C}'\,\mathrm{V}^2 = a\,\beta\,\mathrm{A} - b\,\alpha\,\mathrm{B}.$$

Diese Gleichungen können durch ein System von drei anderen ersetzt werden, die A′, B′, C′ nicht mehr enthalten. Zu diesem Zweck multipliciren wir die dritte mit β, die zweite mit γ und ziehen das letztere Produkt von dem ersteren ab; wir erhalten so

$$(\mathrm{C}'\,\beta - \mathrm{B}'\,\gamma)\,\mathrm{V}^2 = a\,\mathrm{A}\,(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha\,(b\,\beta\,\mathrm{B} + c\,\gamma\,\mathrm{C}).$$

Hierin ersetzen wir $\mathrm{C}'\beta - \mathrm{B}'\gamma$ durch A, indem wir gleichzeitig die identische Gleichung

$$0 = a\,A\,\alpha^2 - \alpha\,(a\,\alpha\,A)$$

zufügen; dies ergibt

$$A\,V^2 = a\,A\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \alpha\,(a\,\alpha\,A + b\,\beta\,B + c\,\gamma\,C)\,.$$

Setzen wir ferner

$$H = a\,\alpha\,A + b\,\beta\,B + c\,\gamma\,C\,,$$

so erhalten wir aus der vorhergehenden Gleichung und aus den beiden analogen, die durch cyklische Vertauschung entstehen,

$$\begin{aligned} A\,V^2 &= a\,A - \alpha\,H\,,\\ B\,V^2 &= b\,B - \beta\,H\,,\\ C\,V^2 &= c\,C - \gamma\,H\,. \end{aligned}$$

Dies sind aber dieselben Gleichungen, zu denen wir bereits in § 154 bei Betrachtung der Fresnel'schen Theorie geführt wurden; sie zeigen uns also, dass die Grössen A, B, C den Richtungskosinus der Schwingung bei Fresnel proportional sind, und dass ausserdem die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in beiden Theorien dieselben Werthe besitzen.

Bei diesen beiden Theorien gehen die Schwingungen in der Wellenebene vor sich, und es ist leicht einzusehen, dass sie rechtwinklig zu einander stehen. Wenn wir nämlich die Gleichungen (2) resp. mit A′, B′, C′ multipliciren und addiren, so erhalten wir

$$\begin{aligned} A\,A' + B\,B' + C\,C' = A'\,C'\,\beta - A'\,B'\,\gamma + A'\,B'\,\gamma - B'\,C'\,\alpha \\ + B'\,C'\,\alpha - A'\,C'\,\beta = 0. \end{aligned}$$

Die Neumann'sche Theorie unterscheidet sich also von der Fresnel'schen nur dadurch, dass die Schwingungen nicht senkrecht zur Polarisationsebene, sondern parallel zu dieser Ebene verlaufen; beide erklären daher die experimentellen Thatsachen gleich gut, da man durch die Beobachtungen nicht feststellen kann, ob die Schwingungsrichtung parallel oder senkrecht zur Polarisationsebene steht.

166. Gleichungen von Lamé. — Die Bewegungsgleichungen für ein Molekül einer ebenen Welle in einem elastischen Medium, die den Hypothesen von Neumann genügen, können in eine interessante Form gebracht werden. Durch die Bedingungsgleichungen

$$u = \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z},$$

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y},$$

führen wir die Grössen u, v, w ein; diese erhalten nach Einsetzen der Werthe für ξ, η, ζ:

$$\xi = A' e^P, \qquad \eta = B' e^P \qquad \zeta = C' e^P,$$

die Form

(5)
$$u = \frac{2 i \pi}{\lambda} e^P (C' \beta - B' \gamma) = \frac{2 i \pi}{\lambda} A e^P,$$

$$v = \frac{2 i \pi}{\lambda} e^P (A' \gamma - C' \alpha) = \frac{2 i \pi}{\lambda} B e^P,$$

$$w = \frac{2 i \pi}{\lambda} e^P (B' \alpha - A' \beta) = \frac{2 i \pi}{\lambda} C e^P.$$

Andererseits gilt

(6)
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \left(\frac{2 i \pi}{\lambda}\right)^2 e^P A' V^2,$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \left(\frac{2 i \pi}{\lambda}\right)^2 e^P B' V^2,$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \left(\frac{2 i \pi}{\lambda}\right)^2 e^P C' V^2.$$

Nun liefert die erste der im vorigen Paragraphen gefundenen Bedingungsgleichungen nach Multiplikation beider Seiten mit $\left(\frac{2 i \pi}{\lambda}\right)^2 e^P$,

$$\left(\frac{2 i \pi}{\lambda}\right)^2 e^P A' V^2 = \left(\frac{2 i \pi}{\lambda}\right)^2 b \gamma B e^P - \left(\frac{2 i \pi}{\lambda}\right)^2 c \beta C e^P ;$$

durch Berechnung der partiellen Differentialquotienten von u, v, w nach x, y, z kann diese Gleichung, wie leicht ersichtlich, in folgende Form gebracht werden

$$\left(\frac{2 i \pi}{\lambda}\right)^2 e^P A' V^2 = b \frac{\partial v}{\partial z} - c \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (6) geht diese und die analogen Gleichungen über in

$$(7)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= b\frac{\partial v}{\partial z} - c\frac{\partial w}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= c\frac{\partial w}{\partial x} - a\frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= a\frac{\partial u}{\partial y} - b\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen werden für die Verschiebungen ξ, η, ζ der Moleküle einer ebenen Welle erfüllt, die nach der Annahme Neumann's schwingen. In dieser Form wurden die Bewegungsgleichungen von Lamé aufgestellt.

Wir bemerken noch, dass die Grössen u, v, w nach den Gleichungen (5) die Komponenten der Verschiebung eines Moleküls einer ebenen Welle in der Theorie von Fresnel darstellen, wenn die Grössen ξ, η, ζ den Gleichungen (7) genügen und die Komponenten für die Verschiebung in der Neumann'schen Theorie sind. Hieraus ergibt sich eine bequeme Methode zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen eines Moleküls in der Fresnel'schen Theorie. Wenn man nämlich von dem nach y genommenen Differentialquotienten der dritten Gleichung (7) den nach z genommenen Differentialquotienten der zweiten abzieht, erhält man

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right) = a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - b\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - c\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z} + a\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

oder

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\right) = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - c\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z},$$

oder in anderer Schreibweise

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\,\Delta\,u - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - c\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}.$$

Auf analoge Weise würde man zwei andere Gleichungen finden, durch welche mit der vorhergehenden zusammen die Werthe von u, v, w für ein Molekül einer Wellenebene bestimmt sind. Die Substitution von $u = A\,e^P$, $v = B\,e^P$, $w = C\,e^P$ in diese Gleichungen muss, wie leicht einzusehen ist, zu den Gleichungen führen, die wir aus der Hypothese von Fresnel in § 154 abgeleitet und im Vorhergehenden (§ 165) wiedergefunden hatten.

Theorie von Sarrau.

167. Bewegungsgleichungen. — Sarrau ging von denselben Hypothesen aus, wie Briot in seiner Theorie der Dispersion; diese Theorien haben wir bereits im vorhergehenden Kapitel (§ 130) ausgeführt. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \Delta \xi - \frac{\partial \Theta}{\partial x},$$

(1)
$$\varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \Delta \eta - \frac{\partial \Theta}{\partial y},$$

$$\varrho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \Delta \zeta - \frac{\partial \Theta}{\partial z}.$$

Hierbei ist ϱ eine periodische Funktion der Koordinaten, die man in eine trigonometrische Reihe entwickeln und dann schreiben kann:

$$\varrho = \Sigma \, \mathrm{R} \sin(a x + b y + c z + d).$$

Der Mittelwerth aller Glieder dieser Reihe ist Null mit Ausnahme des Gliedes, bei dem $a = b = c = 0$; folglich ist der Mittelwerth von ϱ gleich R sin d. In Folge der für die Dichte angenommenen Periodicität erfordert die Auflösung der Bewegungsgleichungen umständliche Rechnungen, die trotz der von Potier eingeführten Vereinfachungen noch langwierig sind.

168. Fortpflanzung einer ebenen Welle. — Setzen wir

(2)
$$\xi = \mathrm{L}\, e^{\mathrm{P}}, \qquad \eta = \mathrm{M}\, e^{\mathrm{P}}, \qquad \zeta = \mathrm{N}\, e^{\mathrm{P}},$$

worin

$$\mathrm{P} = 2 \frac{i \pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y + \gamma z - \mathrm{V} t)$$

ist und wo α, β, γ und λ Konstanten bedeuten, so stellen die Grössen ξ, η, ζ die Komponenten für die Verschiebung eines Moleküls der ebenen Welle

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

dar.

Wählt man als Längeneinheit eine sehr kleine Grösse von der Ordnung des Abstandes zwischen den Molekülen, so wird λ durch eine sehr grosse Zahl ausgedrückt, und $\frac{2\pi}{\lambda}$, das wir mit μ bezeichneten, wird eine sehr kleine Grösse. Man kann also in den Rechnungen die Grössen, welche μ^n als Faktor enthalten, vernachlässigen, wobei über die Wahl des Exponenten n in jedem einzelnen Falle besondere Bestimmungen zu treffen sind. So findet man unter Beibehaltung der Glieder ersten Grades eine Erklärung für die Drehung der Polarisationsebene; behält man auch die Glieder zweiten Grades bei, so lässt sich die Erscheinung der Dispersion erklären. In der Theorie der Doppelbrechung kann man alle Potenzen von μ vernachlässigen. Wir wollen nun zusehen, was in dieser Hypothese aus den Gleichungen (1) wird, wenn man darin die Grössen ξ, η, ζ durch ihre Werthe (2) ersetzt und, da ϱ eine periodische Funktion der Koordinaten ist, annimmt, dass L, M, N gleichfalls periodische Funktionen sind.

Wir erhalten für Θ:

$$\Theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = e^{P}\left[\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} + i\mu\,(\alpha L + \beta M + \gamma N)\right];$$

und wenn wir zur Vereinfachung setzen:

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = T, \tag{3}$$

$$\alpha L + \beta M + \gamma N = Q, \tag{4}$$

so folgt

$$\Theta = e^{P}(T + i\mu Q).$$

Aus diesem Ausdruck kann man ableiten:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = e^{P}\left[\frac{\partial T}{\partial x} + i\mu\left(\alpha T + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) - \mu^2 \alpha Q\right].$$

Die Berechnung des zweiten Differentialquotienten $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ ergibt

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = e^{P}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + 2 i\mu\alpha\,\frac{\partial L}{\partial x} - \mu^2\alpha^2 L\right);,$$

durch Einführung von:

$$\frac{\partial L}{\partial n} = \alpha\,\frac{\partial L}{\partial x} + \beta\,\frac{\partial M}{\partial y} + \gamma\,\frac{\partial N}{\partial z}$$

finden wir demnach für $\Delta\,\xi$:

$$\Delta\,\xi = e^{P}\left(\Delta L + 2 i\mu\,\frac{\partial L}{\partial n} - \mu^2 L\right).$$

Für $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ erhalten wir schliesslich

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\mu^2 V^2 L e^P .$$

Trägt man die Werthe von $\frac{\partial \Theta}{\partial x}$, $\varDelta \xi$, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ in die erste der Gleichungen (1) ein, so folgt:

$$(5) \quad -\mu^2 V^2 \varrho L = \varDelta L - \frac{\partial T}{\partial x} + i \mu \left(2 \frac{\partial L}{\partial n} - \alpha T - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) - \mu^2 (L - \alpha Q).$$

Vernachlässigt man die Glieder, welche μ enthalten, so reducirt sich diese Gleichung auf:

$$(6) \qquad \varDelta L - \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

169. Diese Gleichung und die beiden analogen kann man in eine andere Form bringen, wenn man die durch folgende Beziehungen definirten Grössen l, m, n einführt.

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{\begin{aligned} l &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \\ m &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \\ n &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}. \end{aligned}\right.$$

Entwickeln wir nämlich Gleichung (6), so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial z} = 0,$$

oder

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial z} = 0.$$

In dieser Form ist die Gleichung, wie leicht ersichtlich, mit der folgenden identisch:

$$-\frac{\partial n}{\partial y} + \frac{\partial m}{\partial z} = 0.$$

Die drei Bewegungsgleichungen liefern uns also die Gruppe von Gleichungen:

$$
\text{(II)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial z} = 0\,, \\
&\frac{\partial l}{\partial z} - \frac{\partial n}{\partial x} = 0\,, \\
&\frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial y} = 0\,,
\end{aligned}
\right.
$$

deren jede mit l, m, n in derselben Weise gebildet ist, wie diese Grössen selbst mit L, M, N.

Aus Gleichung (5) können wir eine Beziehung zwischen den darin vorkommenden Mittelwerthen ableiten. Da die Grössen L, M, N periodische Funktionen sind und der Mittelwerth des Differentialquotienten einer periodischen Funktion Null ist, so erhalten wir

$$V^2 [\varrho\, \mathrm{L}]_0 = [\mathrm{L} - \alpha\, \mathrm{Q}]_0,$$

wo die mit dem Index Null versehenen Grössen die Mittelwerthe der betreffenden Grössen darstellen. Ersetzt man Q durch seinen Werth (4) und stellt die beiden analogen Gleichungen auf, die aus der vorigen durch cyklische Vertauschung folgen, so ergibt sich die neue Gruppe von Beziehungen:

$$
\text{(III)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
V^2 [\varrho\, \mathrm{L}]_0 &= \mathrm{L}_0 - \alpha\, (\alpha\, \mathrm{L}_0 + \beta\, \mathrm{M}_0 + \gamma\, \mathrm{N}_0)\,, \\
V^2 [\varrho\, \mathrm{M}]_0 &= \mathrm{M}_0 - \beta\, (\alpha\, \mathrm{L}_0 + \beta\, \mathrm{M}_0 + \gamma\, \mathrm{N}_0)\,, \\
V^2 [\varrho\, \mathrm{N}]_0 &= \mathrm{N}_0 - \gamma\, (\alpha\, \mathrm{L}_0 + \beta\, \mathrm{M}_0 + \gamma\, \mathrm{N}_0).
\end{aligned}
\right.
$$

Die Bewegungsgleichungen (1) liefern uns schliesslich eine letzte Relation. Wenn wir dieselben resp. nach x, y, z differentiiren und dann addiren, so finden wir

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho\, \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho\, \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho\, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right) = \varDelta \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)
$$
$$
- \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2}\,,
$$

oder da die rechte Seite identisch Null ist

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho\, \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho\, \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho\, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right) = 0.
$$

Für die durch die Gleichungen (2) definirten Werthe von ξ, η, ζ gilt nun (§ 168)

$$
\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \mu^2\, V^2\, \mathrm{L}\, e^{\mathrm{P}}\,;
$$

folglich kann man die vorhergehende Identität schreiben

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho \, \mathrm{L} \, e^{\mathrm{P}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho \, \mathrm{M} \, e^{\mathrm{P}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho \, \mathrm{N} \, e^{\mathrm{P}}\right) = 0,$$

oder

$$e^{\mathrm{P}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\varrho \, \mathrm{L} + \frac{\partial}{\partial y}\varrho \, \mathrm{M} + \frac{\partial}{\partial z}\varrho \, \mathrm{N}\right) + i\mu\varrho \, e^{\mathrm{P}}(\alpha \, \mathrm{L} + \beta \, \mathrm{M} + \gamma \, \mathrm{N}) = 0.$$

Wenn wir, wie oben, die Glieder mit μ vernachlässigen, erhalten wir einfach:

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\varrho \, \mathrm{L} + \frac{\partial}{\partial y}\varrho \, \mathrm{M} + \frac{\partial}{\partial z}\varrho \, \mathrm{N} = 0.$$

Zur Bestimmung der Grösse V, der Funktionen L, M, N und der Mittelwerthe dieser Funktionen sind also die drei Gruppen von Gleichungen (I), (II), (III) und die Identität (IV) vorhanden. Zunächst erscheint das Problem unbestimmt, da die Funktion ϱ unbekannt ist. Indessen werden wir später sehen, dass es gelöst werden kann, wenn man nur die bei experimentellen Messungen wahrnehmbaren Grössen aufsucht; zuvor aber wollen wir zwei Eigenschaften periodischer Funktionen ableiten, die uns die Periodicität der Grössen l, m, n zu beweisen und ihre Werthe zu bestimmen ermöglichen.

170. Eigenschaften der periodischen Funktionen. — 1. Sind u und v zwei periodische Funktionen von z, so besteht zwischen den Mittelwerthen die Relation

$$\left[u\frac{\partial v}{\partial z}\right]_0 = -\left[v\frac{\partial u}{\partial z}\right]_0.$$

Das Produkt uv zweier periodischen Funktionen ist nämlich ebenfalls eine periodische Funktion; demnach wird der Mittelwerth des Differentialquotienten dieses Produktes Null. Es ist also

$$\left[u\frac{\partial v}{\partial z} + v\frac{\partial u}{\partial z}\right]_0 = 0,$$

oder

$$\left[u\frac{\partial v}{\partial z}\right]_0 + \left[v\frac{\partial u}{\partial z}\right]_0 = 0,$$

da der Mittelwerth einer Summe gleich der Summe der Mittelwerthe der einzelnen Summanden ist.

2. Wenn ϱ und φ zwei periodische Funktionen von x, y, z darstellen, die der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=0$$

genügen, so reducirt sich die Funktion φ auf eine Konstante.

Nach der vorher abgeleiteten Eigenschaft ist nämlich

$$\left[\varphi\frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right]_0=-\left[\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_0,$$

und folglich

$$\left[\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right)\right]_0=$$

$$-\left[\varrho\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)\right]_0.$$

Nach unserer Annahme ist aber die linke Seite dieser Gleichung Null, so dass

$$\left[\varrho\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)\right]_0=0.$$

Wenn ϱ positiv ist, so ist der Klammerausdruck das Produkt aus zwei positiven Grössen und sein Mittelwerth muss also positiv sein; er kann daher nur Null sein, wenn

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2=0.$$

Dies erfordert aber, dass jedes Glied Null ist, d. h., dass

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0;$$

somit muss φ eine Konstante sein.

Setzt man in der Gleichung, die nach unserer Voraussetzung die Funktionen ϱ und φ verbindet, $\varrho=1$, so erhält man $\Delta\varphi=0$. Ist also eine periodische Funktion φ derart beschaffen, dass $\Delta\varphi=0$, so reducirt sich diese Funktion auf eine Konstante.

171. Werthe der Grössen l, m, n. — Die Gruppe der Gleichungen (II) sagt aus, dass der Ausdruck

$$l\,dx+m\,dy+n\,dz$$

ein vollständiges Differential ist. Bezeichnen wir dasselbe mit $d\varphi$, so haben wir

$$l=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\qquad m=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\qquad n=\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Differentiirt man die erste Gleichung von Gruppe (I) nach x, die zweite nach y, die dritte nach z, und addirt, so erhält man

$$\frac{\partial l}{\partial x}+\frac{\partial m}{\partial y}+\frac{\partial n}{\partial z}=0,$$

oder nach Einsetzen der obigen Werthe von l, m, n

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\Delta\varphi=0.$$

Wir wollen nun zeigen, dass φ eine periodische Funktion ist. Da nach der Voraussetzung L, M, N periodische Funktionen sind, so ist dies nach den Gleichungen (I) auch für l, m, n der Fall, und zwar ist der Mittelwerth der letzteren Null; die partiellen Differentialquotienten der Funktion φ haben also die Form

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\sum \mathrm{A}\sin(ax+by+cz+d)=\sum \mathrm{A}\sin\Theta,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\sum \mathrm{B}\sin(ax+by+cz+d)=\sum \mathrm{B}\sin\Theta,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\sum \mathrm{C}\sin(ax+by+cz+d)=\sum \mathrm{C}\sin\Theta.$$

Differentiirt man die erste der Gleichungen nach y, die zweite nach x, so erhält man zwei Ausdrücke für dieselbe Grösse $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}$; diese beiden Ausdrücke müssen identisch sein. Man findet also

$$\sum \mathrm{A}\,b\cos\Theta=\sum \mathrm{B}\,a\cos\Theta,$$

und folglich

$$\mathrm{A}\,b=\mathrm{B}\,a.$$

In analoger Weise würde man erhalten

$$\mathrm{A}\,c=\mathrm{C}\,a;$$

es ergibt sich also

$$\frac{\mathrm{A}}{a}=\frac{\mathrm{B}}{b}=\frac{\mathrm{C}}{c}=\mathrm{D},$$

und folglich

$$d\varphi=\sum \mathrm{D}\,(a\,dx+b\,dy+c\,dz)\sin\Theta=\sum \mathrm{D}\sin\Theta\,d\Theta.$$

Durch Integration erhält man hieraus

$$\varphi=-\sum \mathrm{D}\cos\Theta+\mathrm{Const.}$$

Demnach ist φ eine periodische Funktion, und da sie ausserdem der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ genügt, so muss sie sich nach der im Vorhergehenden bewiesenen Eigenschaft periodischer Funktionen auf eine Konstante reduciren. Es folgt hieraus, dass die partiellen Differentialquotienten l, m, n von φ den Werth Null haben.

172. Untersuchung der Grössen L, M, N. — Da die Grössen l, m, n Null sind, so liefert uns die Gruppe (I) der Gleichungen die Beziehungen

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0,$$

welche aussagen, dass der Ausdruck

$$L\,dx + M\,dy + N\,dz$$

ein vollständiges Differential darstellt. Bezeichnet man mit ψ das Integral dieses vollständigen Differentials, so erhält man die Gleichung

$$L\,dx + M\,dy + N\,dz = d\psi, \tag{1}$$

welche die Gruppen (I) und (II) ersetzen kann. Wenn diese Funktion ψ bekannt wäre, so könnte man daraus unmittelbar die Werthe von L, M, N durch partielle Differentiation nach x, y, z ableiten. Wir wollen nun nachweisen, dass für gegebene Mittelwerthe L_0, M_0, N_0 von L, M, N eine Funktion ψ existirt, welche den durch die Hypothese von Sarrau geforderten Bedingungen genügt, und dass es nur eine solche Funktion gibt, wenn man die Integrationskonstante vernachlässigt.

Da L_0, M_0, N_0 Konstanten sind, so ist

$$L_0\,dx + M_0\,dy + N_0\,dz$$

ein vollständiges Differential. Demnach hat man:

$$(L - L_0)\,dx + (M - M_0)\,dy + (N - N_0)\,dz = d\chi, \tag{2}$$

wo $d\chi$ das Differential einer Funktion χ darstellt, welche periodisch sein muss. Die partiellen Differentialquotienten $L - L_0$, $M - M_0$, $N - N_0$ dieser Funktion sind nämlich periodische Funktionen, da nach der Annahme die Grössen L, M, N periodisch sind; der Mittelwerth eines jeden dieser Differentialquotienten ist ferner offenbar Null; die Funktion χ muss also periodisch sein.

Die Integration der Gleichungen (1) und (2) ergibt

$$\psi = L_0\,x + M_0\,y + N_0\,z + \chi;$$

wenn gegebenen Werthen von L_0, M_0, N_0 mehrere Funktionen ψ entsprechen, so zeigt uns diese Relation, dass die Funktionen sich nur durch die periodische Funktion χ von einander unterscheiden können.

Zum Nachweis, dass es nur eine Funktion ψ geben kann, genügt es demnach, zu zeigen, dass nur eine einzige periodische Funktion χ existiren kann.

Zu diesem Zweck betrachten wir Gleichung (IV); ersetzt man darin L, M, N durch $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial z}$, so findet man

$$(3)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=0\,.$$

Wenn wir annehmen, dass es zwei Funktionen ψ_1 und ψ_2 gibt, die dieser Gleichung genügen, so wird dies auch in gleicher Weise für die Differenz $\psi_1-\psi_2$ der Fall sein müssen. Nun ist nach dem Vorhergehenden diese Differenz gleich der Differenz $\chi_1-\chi_2$ der periodischen Theile der Funktionen ψ_1 und ψ_2; sie muss sich also auf eine Konstante reduciren. Demnach unterscheiden sich die beiden Funktionen ψ_1 und ψ_2 nur durch eine Konstante.

173. Wir wollen nun den Beweis führen, dass eine Funktion ψ existirt, die der Beziehung (3) genügt.

Der Mittelwerth der Funktion

$$\varrho\,(L^2+M^2+N^2)$$

ist positiv, da ϱ eine positive Grösse und der zweite Faktor eine Summe von Quadraten darstellt. Ferner kann derselbe nicht Null werden, denn es müsste dann $L=M=N=0$ sein; dies ist aber unmöglich, da die gegebenen Mittelwerthe L_0, M_0, N_0 im Allgemeinen nicht Null sind. Dieser Mittelwerth muss also durch ein Minimum gehen, dem ein bestimmter Werth der Funktion χ entspricht. Erhält χ einen Zuwachs $\delta\chi$, so genügen die Zuwachse δL, δM, δN von L, M, N in Folge der Eigenschaft des Minimum der Gleichung

$$(4)\qquad [\varrho\,(L\,\delta L+M\,\delta M+N\,\delta N)]_0=0\,.$$

Nun ergibt der Werth von ψ

$$\psi=L_0\,x+M_0\,y+N_0\,z+\chi$$

die Beziehung

$$\delta\psi=\delta\chi\,.$$

Man erhält demnach

$$\delta L=\frac{\partial}{\partial x}\,\delta\chi\,,\quad \delta M=\frac{\partial}{\partial y}\,\delta\chi\,,\quad \delta N=\frac{\partial}{\partial z}\,\delta\chi\,,$$

und folglich

$$\left[\varrho\,L\,\delta L\right]_0 = \left[\varrho\,L\,\frac{\partial}{\partial x}\,\delta\chi\right]_0,$$

$$\left[\varrho\,M\,\delta M\right]_0 = \left[\varrho\,M\,\frac{\partial}{\partial y}\,\delta\chi\right]_0,$$

$$\left[\varrho\,N\,\delta N\right]_0 = \left[\varrho\,N\,\frac{\partial}{\partial z}\,\delta\chi\right]_0.$$

Durch Addition dieser Beziehungen erhält man eine Gleichung, deren linke Seite nach (4) Null ist; man findet also

$$\left[\varrho\,L\,\frac{\partial}{\partial x}\,\delta\chi\right]_0 + \left[\varrho\,M\,\frac{\partial}{\partial y}\,\delta\chi\right]_0 + \left[\varrho\,N\,\frac{\partial}{\partial z}\,\delta\chi\right]_0 = 0\,.$$

Durch Umformung eines jeden Gliedes dieser Gleichung mit Hülfe der im Vorhergehenden (§ 170) bewiesenen Eigenschaften periodischer Funktionen erhalten wir:

$$\left[\delta\chi\,\frac{\partial}{\partial x}\,\varrho\,L\right]_0 + \left[\delta\chi\,\frac{\partial}{\partial y}\,\varrho\,M\right]_0 + \left[\delta\chi\,\frac{\partial}{\partial z}\,\varrho\,N\right]_0 = 0\,.$$

Da diese Gleichung für jeden Werth von $\delta\chi$ erfüllt sein muss, so ist nothwendig

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\varrho\,L + \frac{\partial}{\partial y}\,\varrho\,M + \frac{\partial}{\partial z}\,\varrho\,N = 0\,. \tag{5}$$

Es gibt also eine Funktion χ und folglich auch eine Funktion ψ von der Beschaffenheit, dass die daraus abgeleiteten Werthe von L, M, N der vorhergehenden Gleichung genügen.

Man kann leicht beweisen, dass, wenn man

für	$L_0 = 1$,	$M_0 = N_0 = 0$	hat	$\psi = \psi_1$,
-	$M_0 = 1$,	$L_0 = N_0 = 0$	-	$\psi = \psi_2$,
-	$N_0 = 1$,	$M_0 = L_0 = 0$	-	$\psi = \psi_3$,

die allgemeinste Form der Funktion ψ ist

$$\psi = L_0\,\psi_1 + M_0\,\psi_2 + N_0\,\psi_3\,.$$

Da nämlich ψ_1, ψ_2, ψ_3 der Gleichung (5) genügen, so muss dies ebenfalls für die Funktion ψ gelten. Die Mittelwerthe der partiellen Differentialquotienten von ψ sind ferner gleich L_0, M_0, N_0, denn es gilt

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_0 = L_0\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right]_0 + M_0\left[\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right]_0 + N_0\left[\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right]_0 = L_0\,,$$

da nach unserer Annahme

$$\left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right]_0 = 1, \quad \left[\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\right]_0 = 0, \quad \left[\frac{\partial \psi_3}{\partial x}\right]_0 = 0.$$

Ebenso kann man zeigen, dass die Mittelwerthe der partiellen Differentialquotienten nach y und z bezw. gleich M_0 und N_0 sind.

174. Werthe der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten. — Die Beziehung

$$\psi = L_0 x + M_0 y + N_0 z + \chi$$

zeigt uns, dass ψ linear von L_0, M_0, N_0 abhängt; ebenso verhält es sich also mit den partiellen Differentialquotienten L, M, N dieser Funktion. Der Ausdruck $\varrho(L^2 + M^2 + N^2)$ und sein Mittelwerth sind also homogene Funktionen zweiten Grades von L_0, M_0, N_0. Durch passende Wahl der Koordinatenaxen, die bisher beliebig waren, können wir die nicht quadratischen Glieder des Mittelwerthes Null werden lassen und erhalten so

$$\frac{L_0^2}{a} + \frac{M_0^2}{b} + \frac{N_0^2}{c} = \left[\varrho(L^2 + M^2 + N^2)\right]_0.$$

Ertheilen wir L_0 einen Zuwachs δL_0, so entsteht dadurch ein Zuwachs $\frac{2 L_0 \delta L_0}{a}$ des Mittelwerthes von $\varrho(L^2 + M^2 + N^2)$. Andererseits hat dieser Zuwachs den Werth

$$2\left[\varrho(L\,\delta L + M\,\delta M + N\,\delta N)\right]_0;$$

da nun gilt:

$$\delta\psi = \delta\chi + x\,\delta L_0,$$

so erhält man zunächst:

$$\delta L = \frac{\partial}{\partial x}\delta\chi + \delta L_0,$$

$$\delta M = \frac{\partial}{\partial y}\delta\chi,$$

$$\delta N = \frac{\partial}{\partial z}\delta\chi;$$

somit wird der letzte Ausdruck für den Zuwachs des Mittelwerthes von $\varrho(L^2 + M^2 + N^2)$

$$2\left[\varrho\,L\,\delta L_0\right]_0 + 2\left[\varrho\left(L\frac{\partial}{\partial x}\delta\chi + M\frac{\partial}{\partial y}\delta\chi + N\frac{\partial}{\partial z}\delta\chi\right)\right]_0.$$

Das zweite Glied dieser Summe ist Null, da die Beziehung (5) erfüllt sein muss. Durch Gleichsetzen der beiden Werthe für den Zuwachs erhält man somit

$$\frac{L_0 \, \delta L_0}{a} = \left[\varrho \, L \, \delta L_0\right]_0 = \delta L_0 \left[\varrho \, L\right]_0$$

und hieraus

$$\left[\varrho \, L\right]_0 = \frac{L_0}{a} .$$

Für die Mittelwerthe von $\varrho \, M$ und $\varrho \, N$ findet man ebenso die Ausdrücke $\frac{M_0}{b}$, $\frac{N_0}{c}$. Werden diese Grössen in die Gleichungen der Gruppe (III) eingesetzt, so ergibt sich

$$\text{(V)} \qquad \begin{aligned} \frac{V^2 L_0}{a} &= L_0 - \alpha \, (\alpha \, L_0 + \beta \, M_0 + \gamma \, N_0) , \\ \frac{V^2 M_0}{b} &= M_0 - \beta \, (\alpha \, L_0 + \beta \, M_0 + \gamma \, N_0) , \\ \frac{V^2 N_0}{c} &= N_0 - \gamma \, (\alpha \, L_0 + \beta \, M_0 + \gamma \, N_0) ; \end{aligned}$$

aus diesen Beziehungen kann man die Grössen ableiten, die L_0, M_0, N_0 proportional sind.

Da die Perioden von L, M, N sehr kurz sind, so kommen nur die Mittelwerthe dieser Grössen bei den Experimenten in Betracht. Demnach wird alles so vor sich gehen, als wenn die Schwingungen eine konstante Richtung hätten, deren Richtungskosinus proportional L_0, M_0, N_0 wären. Wir brauchen also zur Untersuchung der experimentellen Folgerungen aus der Theorie von Sarrau nur die vorhergehende Gruppe der Gleichungen zu betrachten. Man kann diese leicht in eine schon bekannte Form bringen, wenn man setzt

$$\text{(6)} \qquad L_0 = A \, a , \qquad M_0 = B \, b , \qquad N_0 = C \, c ,$$

und

$$H = A \, a \, \alpha + B \, b \, \beta + C \, c \, \gamma ;$$

es folgt dann:

$$\text{(VI)} \qquad \begin{aligned} V^2 A &= a \, A - \alpha \, H , \\ V^2 B &= b \, B - \beta \, H , \\ V^2 C &= c \, C - \gamma \, H . \end{aligned}$$

Dies sind dieselben Gleichungen, die wir aus der Theorie von Fresnel abgeleitet hatten; sie führen zu folgender Beziehung:

$$\frac{\alpha^2}{V^2 - a} + \frac{\beta^2}{V^2 - b} + \frac{\gamma^2}{V^2 - c} = 0 ,$$

aus welcher sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer ebenen Welle ergibt.

175. Schwingungsrichtung einer Wellenebene. — Bedeuten A, B, C die Komponenten der Schwingung bei Fresnel, so sind sie nach den Gleichungen (6) bei Sarrau

$$\mathrm{A}a, \ \mathrm{B}b, \ \mathrm{C}c.$$

Bezeichnet man ferner die Komponenten der Schwingung bei Neumann mit A', B', C', so bestehen bekanntlich zwischen A, B, C, A', B', C', α, β, γ die drei Beziehungen

$$\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \mathrm{C}\gamma = 0,$$

$$\mathrm{A}'\alpha + \mathrm{B}'\beta + \mathrm{C}'\gamma = 0,$$

$$\mathrm{AA}' + \mathrm{BB}' + \mathrm{CC}' = 0.$$

Die beiden ersten Gleichungen sagen aus, dass die Schwingungen bei Fresnel und bei Neumann in der Wellenebene liegen, die dritte, dass diese Schwingungen senkrecht zu einander stehen. Mit Hülfe dieser drei Gleichungen lassen sich nun auch die Schwingungsrichtungen nach Sarrau finden.

Multipliciren wir zu diesem Zwecke die Gleichungen (VI) mit A', B', C' und addiren sie, so erhalten wir

$$\mathrm{V}^2 \Sigma \mathrm{AA}' = \Sigma a \mathrm{AA}' - \mathrm{H} \Sigma \alpha \mathrm{A}';$$

diese Gleichung reducirt sich aber nach den obigen Beziehungen auf

$$\mathrm{A}'\mathrm{A}a + \mathrm{B}'\mathrm{B}b + \mathrm{C}'\mathrm{C}c = 0.$$

Hieraus geht hervor, dass die Schwingung von Sarrau senkrecht zu der von Neumann steht. Im Allgemeinen stimmt die Schwingungsrichtung bei Sarrau nicht mit der bei Fresnel überein, da bei anisotropen Körpern a, b, c verschiedene Werthe besitzen; sie liegt daher auch nicht in der Wellenebene, vielmehr steht sie, wie wir bald sehen werden, senkrecht zum Lichtstrahl. Bei isotropen Körpern sind die Grössen a, b, c einander gleich, so dass dann die Schwingungen bei Sarrau dieselbe Richtung wie bei Fresnel haben und in die Wellenebene fallen.

Die Theorien von Fresnel, Neumann und Sarrau führen also für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu derselben Gleichung; sie unterscheiden sich nur durch die Richtung der Schwingung. In isotropen Medien ergeben sie ausserdem für diese Richtung entweder den Schnitt der Wellenebene mit der Polarisationsebene oder die Richtung der in der Wellenebene liegenden Normale auf der

Polarisationsebene. Da die Beobachtungen nur in Luft, also einem isotropen Medium, angestellt werden können, so lässt sich durch das Experiment nicht entscheiden, welche dieser drei Theorien endgültig angenommen werden muss.

Theorie von Boussinesq.

176. Bewegungsgleichungen. — Wir haben bei der Betrachtung der Dispersion die besonderen Hypothesen von Boussinesq auseinandergesetzt und haben gefunden, dass die Bewegungsgleichungen eines Aethermoleküls lauten (§ 140):

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \Delta \xi - \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \varrho_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2};$$

hierzu kommen noch zwei analoge Gleichungen, die man durch cyklische Vertauschung erhält. In diesen Gleichungen bedeutet ϱ die Dichte des Aethers, ϱ_1 diejenige der Materie; ξ, η, ζ die Verschiebungskomponenten des Aethermoleküls, ξ_1, η_1, ζ_1 diejenigen des materiellen Moleküls. Diese letzteren Grössen müssen von der Verschiebung und der Geschwindigkeit des Aethermoleküls, d. h. von den Komponenten ξ, η, ζ und ihren Differentialquotienten abhängen. Bei der Theorie der Dispersion mussten wir diese Differentialquotienten berücksichtigen, bei der Doppelbrechung dagegen darf man sie vernachlässigen und ξ_1, η_1, ζ_1 als Funktionen von ξ, η, ζ allein betrachten. Da ξ, η, ζ sehr kleine Grössen sind, so kann man mit sehr grosser Annäherung an Stelle von ξ_1, η_1, ζ_1 die Glieder ersten Grades von der Entwicklung dieser Funktionen nach ξ, η, ζ nehmen. Die Verschiebungskomponenten eines materiellen Moleküls werden dann lineare Funktionen der Verschiebungskomponenten des Aethermoleküls sein, und bei passender Wahl der Koordinatenaxen wird man haben:

$$\xi_1 = \mathrm{h}\,\xi, \quad \eta_1 = \mathrm{k}\,\eta, \quad \zeta_1 = \mathrm{l}\,\zeta.$$

Durch Einsetzen dieser Werthe in die Bewegungsgleichungen erhalten wir

$$(\varrho + \varrho_1 h) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \Delta x - \frac{\partial \Theta}{\partial x},$$

sowie zwei analoge Gleichungen.

Wenn wir dann setzen

$$\varrho + \varrho_1 h = \frac{1}{a}, \quad \varrho + \varrho_1 k = \frac{1}{b}, \quad \varrho + \varrho_1 l = \frac{1}{c},$$

so folgt

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \Delta\, \xi - \frac{\partial \Theta}{\partial x},$$

(1) $$\frac{1}{b} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \Delta\, \eta - \frac{\partial \Theta}{\partial y},$$

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \Delta\, \zeta - \frac{\partial \Theta}{\partial z}.$$

177. Fortpflanzung einer ebenen Welle. — Bezeichnen ξ, η, ζ die Schwingungskomponenten einer ebenen Welle, so können wir setzen

(2) $$\xi = \mathrm{L}_0\, e^{\mathrm{P}}, \quad \eta = \mathrm{M}_0\, e^{\mathrm{P}}, \quad \zeta = \mathrm{N}_0\, e^{\mathrm{P}}.$$

Hieraus ergeben sich folgende Werthe:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \mathrm{V}^2 \mathrm{L}_0\, e^{\mathrm{P}},$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = +\frac{2\, i \pi}{\lambda} \alpha\, \mathrm{L}_0\, e^{\mathrm{P}},$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \alpha^2\, \mathrm{L}_0\, e^{\mathrm{P}},$$

woraus folgt

$$\Theta = \frac{2\, i\pi}{\lambda} e^{\mathrm{P}} (\alpha\, \mathrm{L}_0 + \beta\, \mathrm{M}_0 + \gamma\, \mathrm{N}_0),$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} e^{\mathrm{P}} \alpha\, (\alpha\, \mathrm{L}_0 + \beta\, \mathrm{M}_0 + \gamma\, \mathrm{N}_0),$$

und

$$\Delta\, \xi = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \mathrm{L}_0\, e^{\mathrm{P}}.$$

Durch Einsetzen dieser Werthe von

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \quad \Delta\, \xi$$

in die erste der Bewegungsgleichungen (1) erhalten wir eine neue Gleichung, aus der wir noch zwei analoge ableiten können:

$$\frac{V^2 L_0}{a} = L_0 - \alpha\,(\alpha\,L_0 + \beta\,M_0 + \gamma\,N_0),$$

$$\frac{V^2 L_0}{b} = M_0 - \beta\,(\alpha\,L_0 + \beta\,M_0 + \gamma\,N_0),$$

$$\frac{V^2 L_0}{c} = N_0 - \gamma\,(\alpha\,L_0 + \beta\,M_0 + \gamma\,N_0).$$

Es sind dies genau dieselben Gleichungen, welche wir aus den Hypothesen von Sarrau abgeleitet haben (§ 174); die Theorie von Boussinesq muss also zu denselben Folgerungen führen, wie die Theorie von Sarrau.

178. Beziehungen zwischen den Schwingungskomponenten nach Fresnel, Neumann und Sarrau. — Man kann den Bewegungsgleichungen (1) eine andere Form geben, wenn man setzt:

$$\text{(I)} \qquad X = \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad Z = \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y},$$

und

$$\text{(II)} \qquad u = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Führt man in u, v, w die durch die Gruppe (I) gegebenen Werthe von X, Y, Z ein, so findet man

$$u = -\Delta\,\xi + \frac{\partial \Theta}{\partial x}$$

und zwei analoge Gleichungen; dadurch gehen die Gleichungen (1) über in

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -a\,u\,,$$

(III)
$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -b\,u\,,$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -c\,u\,.$$

Wir wollen nun zeigen, dass, wenn ξ, η, ζ die Schwingungskomponenten von Sarrau bedeuten, die Grössen X, Y, Z den Schwingungskomponenten von Neumann und u, v, w denjenigen von Fresnel proportional sind.

Wenn wir in X, Y, Z die partiellen Differentialquotienten von ξ, η, ζ durch ihre aus (2) abgeleiteten Werthe ersetzen, so erhalten wir z. B. für X

$$X = \frac{2i\pi}{\lambda} e^{P} (\beta N_0 - \gamma M_0)\,;$$

schreiben wir ferner

$$A' = \beta N_0 - \gamma M_0\,,$$

(3)
$$B' = \gamma L_0 - \alpha N_0\,,$$

$$C' = \alpha M_0 - \beta L_0\,,$$

so ergibt sich für X, Y, Z

$$X = \frac{2i\pi}{\lambda} A' e^{P}, \qquad Y = \frac{2i\pi}{\lambda} B' e^{P}, \qquad Z = \frac{2i\pi}{\lambda} C' e^{P},$$

d. h. die Grössen X, Y, Z sind proportional A′, B′, C′. Aus den Gleichungen (3) lassen sich unmittelbar die beiden folgenden ableiten:

$$A'\alpha + B'\beta + C'\gamma = 0$$

$$A'L_0 + B'M_0 + C'N_0 = 0.$$

Die erste Gleichung sagt aber aus, dass eine Verschiebung, deren Komponenten A′, B′, C′ sind, zur Wellenebene gehört, die zweite, dass diese Verschiebung senkrecht zur Schwingung von Sarrau erfolgt; es müssen deshalb A′, B′, C′ nach dem, was wir über die Schwingungsrichtungen bei Neumann und Sarrau wissen den Schwingungskomponenten von Neumann proportional sein. Ebenso verhält es sich mit X, Y, Z.

Wir wollen nun die Grössen u, v, w in's Auge fassen. Diese sind mit X, Y, Z in derselben Weise gebildet, wie die letzteren mit

ξ, η, ζ; wir erhalten also u, wenn wir in dem für X früher gefundenen Werth die Grösse X durch u, N_0 durch $\frac{2i\pi}{\lambda}C'$ und M_0 durch $\frac{2i\pi}{\lambda}B'$ ersetzen. Dadurch erhalten wir

$$u = \frac{2i\pi}{\lambda} e^P \left(\beta \frac{2i\pi}{\lambda} C' - \gamma \frac{2i\pi}{\lambda} B'\right),$$

oder für u, v, w

$$u = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} e^P (\beta C' - \gamma B') = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} e^P A,$$

$$v = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} e^P (\gamma A' - \alpha C') = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} e^P B,$$

$$w = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} e^P (\alpha B' - \beta A') = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} e^P C.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Grössen u, v, w den Grössen A, B, C proportional sind, welche durch die folgenden Gleichungen definirt werden:

$$A = \beta C' - \gamma B',$$

$$B = \gamma A' - \alpha C',$$

$$C = \alpha B' - \beta A'.$$

Hieraus ergibt sich leicht

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0;$$

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

Wenn also A′, B′, C′ den Richtungskosinus der Schwingung bei Neumann proportional sind, so werden A, B, C und demnach auch u, v, w denjenigen der Schwingung bei Fresnel proportional sein, denn von den obigen Gleichungen drückt die erste aus, dass die Richtung A, B, C mit der Wellenebene zusammenfällt, die zweite, dass diese Richtung senkrecht zur Schwingung von Neumann steht.

In der elektro-magnetischen Lichttheorie findet man die drei Gruppen von Gleichungen (I), (II), (III) wieder; in dieser Theorie bedeuten $\frac{\partial\xi}{\partial t}$, $\frac{\partial\eta}{\partial t}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$ die Komponenten der elektromotorischen Kraft, X, Y, Z diejenigen der magnetischen Kraft und u, v, w die der elektrischen Verschiebung.

179. Vertauschung der Koordinatenaxen. — Die Bewegungsgleichungen in den verschiedenen Theorien der Doppelbrechung sind unter der Annahme specieller Axen, nämlich der optischen Symmetrieaxen des Medium aufgestellt worden; die in die Form (III) gebrachten Gleichungen bieten den grossen Vortheil, dass sie zur Vertauschung der Koordinatenaxen geeignet sind und leicht die Richtungskosinus der Schwingung bei Sarrau ergeben. Da nun die Beziehungen zwischen den Schwingungsrichtungen bei Fresnel, Neumann und Sarrau nicht von der Wahl der Koordinatenaxen abhängen, so kann man aus den Gruppen (I) und (II) immer die Richtungskosinus der Schwingungen bei Neumann und bei Fresnel finden, wenn man die Komponenten ξ, η, ζ der Schwingung bei Sarrau kennt. Wir wollen nun untersuchen, was aus den Gleichungen (III) bei einer Vertauschung der Koordinatenaxen wird.

Setzen wir:

$$a u^2 + b v^2 + c w^2 = \mathrm{F}(u, v, w),$$

so können wir die Gleichungen (III) schreiben

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}, \qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}, \qquad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial w}.$$

Die Gleichung der Tangentialebene, welche im Punkt P mit den Koordinaten $-u$, $-v$, $-w$ an das Ellipsoïd $\mathrm{F} = 1$ gelegt wird, lautet

$$u \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} + v \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} + w \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial w} = -1,$$

und der Abstand OT (Fig. 19) des Mittelpunktes O des Ellipsoïds von dieser Ebene ist:

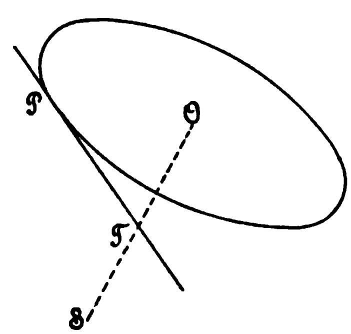

Fig. 19.

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial w}\right)^2}}.$$

Trägt man also auf der Geraden OT eine Länge $\mathrm{OS} = \frac{1}{\mathrm{OT}}$ ab, so werden die Koordinaten des Punktes S sein $-\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}$, $-\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}$, $-\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial w}$, d. h. das Doppelte von $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$. Da der Punkt S aus dem Punkt P durch eine geometrische Konstruktion hergeleitet wird, die unabhängig von der Richtung der Axen ist, so haben die Werthe von $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$, unabhängig von der Wahl der Axen, immer dieselbe Form. Die Gleichungen (IV) werden also immer bestehen bleiben, aber F wird im allgemeinsten Fall den Ausdruck annehmen:

$$F = a u^2 + b v^2 + c w^2 + 2 d v w + 2 e w u + 2 f u v.$$

Durch Entwicklung der rechten Seiten der Gleichungen (IV) erhält man dann

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -(a u + f v + e w),$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -(f u + b v + d w),$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -(e u + d v + c w);$$

dies sind die Gleichungen der Doppelbrechung, auf beliebige Axen bezogen.

Wellenfläche. — Geradlinige Fortpflanzung des Lichtes.

180. Wellenfläche. — Wenn wir annehmen, dass der Aether ursprünglich in Ruhe ist und dass am Zeitanfang die in einer Kugel von sehr kleinem Radius enthaltenen Moleküle erschüttert werden, so gehören die am Ende der Zeiteinheit in Bewegung befindlichen Moleküle einer bestimmten Fläche an, die man die Wellenfläche nennt.

Diese Fläche ist in einem isotropen Medium eine Kugel. Dehnt man das Princip von Huyghens auf nicht-isotrope Körper aus, so kann man die Gleichung der Wellenfläche in diesen Medien finden, wenn man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer ebenen Welle kennt. Aber man kann gegen diese Ausdehnung des Princips von Huyghens die Einwände erheben, die wir in dem Fall der isotropen Körper angegeben haben und wir müssten eigentlich, wenn wir strenge verfahren wollten, für die anisotropen Körper den Beweis wieder antreten, zu dem wir in Kapitel III gekommen waren. Wir beschränken uns aber darauf, die Schlussfolgerungen von Huyghens anzunehmen, ohne einen Beweis für dieselben zu suchen.

Wir betrachten nun eine Wellenebene PP′ (Fig. 20), die durch einen Punkt O eines anisotropen Medium hindurchgeht. Am Ende der Zeiteinheit wird diese Welle mit der Ebene QQ′ zusammenfallen, die zu PP′ parallel ist und von dieser Ebene um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V der Welle entfernt ist.

Andererseits wird die anfängliche Erschütterung des Punktes O am Ende der Zeiteinheit die Moleküle des elastischen Medium in Bewegung versetzen, die nach der Definition der Wellenebene auf der zum Punkt O gehörenden Wellenfläche liegen. Nun ist nach dem Princip von Huyghens die Bewegung des Aethers in jedem Punkt der Wellenebene QQ' die Resultante aus den Bewegungen, welche alle zur Ebene PP' gehörigen Punkte OO' hervorrufen. Da die Elementarwellen dieser Punkte S, S' .... sind, so kann jenseits der diesen Wellen gemeinsamen Tangentialebene $Q_1 Q_1'$ keine Bewegung existiren. Ferner tritt sicherlich in dem Punkte, wo diese Ebene $Q_1 Q_1'$ die Fläche S berührt, Bewegung auf; denn Q_1 liegt ausserhalb der anderen Wellenflächen S' etc.; die in Q_1 durch den Punkt O hervorgerufene Bewegung kann durch die von den anderen Punkten der Ebene PP' herrührenden Bewegungen also nicht zerstört werden, und da andererseits die Bewegung nur in der Ebene QQ' stattfinden soll, so müssen die beiden Ebenen QQ' und $Q_1 Q_1'$ zusammenfallen.

Wie auch die Richtung der durch den Punkt O gehenden Wellenebene PP' sein mag, immer wird die Wellenfläche dieses Punktes die von der Wellenebene am Ende der Zeiteinheit eingenommene Lage berühren, sie wird somit die Einhüllende der Wellenebenen in diesen Lagen sein.

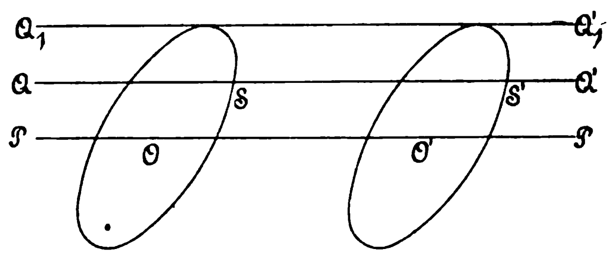

Fig. 20.

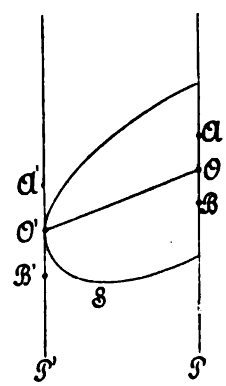

Fig. 21.

181. Richtung des Lichtstrahls. — Im Folgenden wollen wir zeigen, wie man mit Hülfe des Huyghens'schen Princips die Richtung des Lichtstrahls bestimmen kann. In Fig. 21 bedeute P die Lage der Wellenebene in einem bestimmten Augenblick, und P' die neue Lage nach dem Verlauf der Zeiteinheit.

Wir nehmen an, dass nicht die ganze Ebene P in Schwingungen versetzt ist, sondern dass der erleuchtete Theil dieser Ebene sich auf ein Element AB reducirt, dessen Schwerpunkt sich in O befindet, und das absolut genommen sehr klein, aber doch so gross ist, dass man die Beugungserscheinungen vernachlässigen kann.

Den erleuchteten Theil der Ebene P′ erhält man durch Konstruktion der Wellenflächen, welche von den verschiedenen Punkten von AB ausgehen; die Berührungspunkte dieser Flächen mit der Ebene P′ bilden ein ebenes Element A′B′, dessen Schwerpunkt sich in O′ befindet; die Gerade OO′ ist dann der gesuchte Lichtstrahl. Hieraus ergibt sich folgende Regel:

Man erhält die Richtung des Lichtstrahls, wenn man den Punkt O mit demjenigen Punkte verbindet, in welchem die zu O gehörende Wellenfläche eine zur Wellenebene parallele Ebene berührt.

Wir wollen diese Regel anwenden ohne Berücksichtigung der Einwände, die man gegen das Huyghens'sche Princip erhoben hat. Später (§ 189) werden wir einen strengen Beweis dafür geben.

182. Es seien α, β, γ die Richtungskosinus der Normalen zur Wellenebene, und x, y, z die Koordinaten des Punktes, wo die Wellenfläche von dem Lichtstrahl getroffen wird. Da dieser Punkt zur Ebene gehört, die von der Welle am Ende der Zeiteinheit eingenommen wird, so genügen seine Koordinaten der Gleichung

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = V, \tag{1}$$

und da er ebenso der Enveloppe dieser Ebene angehört, so folgt weiter

$$x\, d\alpha + y\, d\beta + z\, d\gamma = d V. \tag{2}$$

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V liefern bekanntlich alle früher betrachteten Theorien der Doppelbrechung die Gleichung

$$\frac{\alpha^2}{V^2 - a} + \frac{\beta^2}{V^2 - b} + \frac{\gamma^2}{V^2 - c} = F(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \tag{3}$$

woraus man durch Differentiation erhält

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial F}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial F}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial F}{\partial V} dV = 0.$$

Ersetzt man hierin dV durch die linke Seite von Gleichung (2), so wird diese Gleichung

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} + x \frac{\partial F}{\partial V}\right) d\alpha + \left(\frac{\partial F}{\partial \beta} + y \frac{\partial F}{\partial V}\right) d\beta + \left(\frac{\partial F}{\partial \gamma} + z \frac{\partial F}{\partial V}\right) d\gamma = 0. \tag{4}$$

Die Grössen α, β, γ sind ausserdem durch die Gleichung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

verknüpft, aus der man durch Differentiation erhält

$$\alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta + \gamma\, d\gamma = 0. \tag{5}$$

Die beiden Gleichungen (4) und (5), welche für alle Werthe von $d\alpha$ und $d\beta$ erfüllt werden, müssen identisch sein; wir erhalten somit unter Einführung einer willkürlichen Konstanten K

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \alpha} + x \frac{\partial F}{\partial V} &= K\,\alpha, \\ \frac{\partial F}{\partial \beta} + y \frac{\partial F}{\partial V} &= K\,\beta, \\ \frac{\partial F}{\partial \gamma} + z \frac{\partial F}{\partial V} &= K\,\gamma. \end{aligned} \tag{6}$$

Wir wollen nun den Werth der Konstanten K und der partiellen Differentialquotienten suchen, welche in diese Gleichungen eingehen. Zu diesem Zweck ist in Betracht zu ziehen, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V den Gleichungen (§ 154)

$$\begin{aligned} A\,V^2 &= a\,A - \alpha\,H, \\ B\,V^2 &= b\,B - \beta\,H, \\ C\,V^2 &= c\,C - \gamma\,H, \end{aligned} \tag{I}$$

genügt, aus denen wir durch Elimination von H die Gleichung (3) erhielten; hierbei ist

$$H = A\,a\,\alpha + B\,b\,\beta + C\,c\,\gamma.$$

Wir finden nun aus (3)

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{2\,\alpha}{V^2 - a},$$

und wenn man darin $V^2 - a$ durch seinen Werth ersetzt, den man aus der ersten Gleichung von Gruppe (I) ableiten kann,

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -\frac{2\,A}{H}.$$

Ebenso erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = -\frac{2\,B}{H}, \quad \frac{\partial F}{\partial \gamma} = -\frac{2\,C}{H}.$$

Für den Differentialquotienten nach V ergibt sich

$$\frac{\partial F}{\partial V} = -\sum \frac{2\,\alpha^2\,V}{(V^2 - a)^2} = -2\,V \sum \frac{\alpha^2}{(V^2 - a)^2} = -\frac{2\,V}{H^2} \sum A^2.$$

Wenn der Punkt A, B, C auf dem Elasticitäts-Ellipsoïd liegt, so ist, wie wir in § 155 gesehen haben,

$$V = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

hieraus folgt

$$\frac{\partial F}{\partial V} = -\frac{2V}{H^2} \cdot \frac{1}{V^2} = -\frac{2}{V H^2}.$$

Zur Berechnung des Koefficienten K multipliciren wir ferner die Gleichungen (6) mit α, β, γ und erhalten dann durch Addition

$$K = \sum \alpha \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial V} \sum \alpha x;$$

nun ist aber

$$\sum \alpha \frac{\partial F}{\partial \alpha} = -\sum \frac{2 A \alpha}{H} = 0,$$

und nach Gleichung (1)

$$\sum \alpha x = V.$$

Hieraus ergibt sich

$$K = \frac{\partial F}{\partial V} V = -\frac{2}{H^2}.$$

Setzt man diese Werthe für K und die partiellen Differentialquotienten in die Gleichungen (6) ein, so erhält man

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} A H + \frac{x}{V} &= \alpha, \\ B H + \frac{y}{V} &= \beta, \\ C H + \frac{z}{V} &= \gamma. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen liefern uns die Koordinaten x, y, z des Punktes, in dem die Wellenfläche durch den Lichtstrahl geschnitten wird.

183. Beziehungen zwischen der Richtung des Lichtstrahls und den Schwingungsrichtungen. — Betrachten wir die Schwingungen nach Neumann, deren Richtungskosinus proportional A′, B′, C′ sind, so erhalten wir nach Multiplikation der Gleichungen (II) mit A′, B′, C′ für die Summe dieser Produkte

$$H \sum A A' + \frac{1}{V} \sum A' x = \sum A' \alpha.$$

Diese Schwingungen liegen übrigens bekanntlich in der Wellenebene und stehen senkrecht zu der Fresnel'schen Schwingungsrichtung; demnach ist

$$A' \alpha + B' \beta + C' \gamma = 0,$$

$$A A' + B B' + C C' = 0,$$

und die vorhergehende Gleichung reducirt sich auf die folgende

$$A' x + B' y + C' z = 0;$$

diese bésagt, dass *die Neumann'sche Schwingung senkrecht zum Lichtstrahl gerichtet ist.*

Bei der Schwingung nach der Theorie von Sarrau sind die Richtungskosinus proportional zu $A a$, $B b$, $C c$. Multiplicirt man die Gleichungen (II) mit diesen Grössen und addirt, so findet man

$$H \sum a A^2 + \frac{1}{V} \sum a A x = \sum A a \alpha.$$

Da der Koordinatenpunkt A, B, C auf dem Elasticitäts-Ellipsoïd liegt, so ist $\Sigma a A^2 = 1$; andererseits gilt nach Voraussetzung $H = \Sigma A a \alpha$. Die obige Gleichung reducirt sich demnach auf die folgende

$$A a x + B b y + C c z = 0,$$

wonach auch *die Sarrau'sche Schwingung senkrecht zum Lichtstrahl steht.*

184. Gleichung der Wellenfläche. — Die Gleichung dieser Fläche erhält man durch Elimination von α, β, γ, A, B, C und V aus den Gleichungen der Gruppe (I) und (II), sowie aus der folgenden:

$$\text{(IV)} \qquad a A x + b B y + c C z = 0,$$

die wir aus (II) abgeleitet hatten.

Die erste der Gleichungen (II) kann man schreiben

$$\frac{x H}{V} = \alpha H - A H^2,$$

und die erste der Gleichungen (I) ergibt

$$\alpha H = A (a - V^2).$$

Wir erhalten somit

$$\frac{x\,\mathrm{H}}{\mathrm{V}} = \mathrm{A}\,(a - \mathrm{V}^2 - \mathrm{H}^2).$$

Zur Bestimmung von $\mathrm{V}^2 + \mathrm{H}^2$ entnehmen wir den Gleichungen (II) die Werthe von x, y, z und bilden die Quadrate dieser Grössen; dann finden wir

$$x = \alpha\,\mathrm{V} - \mathrm{A\,H\,V}\,,\quad x^2 = \alpha^2\,\mathrm{V}^2 - 2\,\mathrm{A}\,\alpha\,\mathrm{H\,V}^2 + \mathrm{A}^2\,\mathrm{H}^2\,\mathrm{V}^2,$$

$$y = \beta\,\mathrm{V} - \mathrm{B\,H\,V}\,,\quad y^2 = \beta^2\,\mathrm{V}^2 - 2\,\mathrm{B}\,\beta\,\mathrm{H\,V}^2 + \mathrm{B}^2\,\mathrm{H}^2\,\mathrm{V}^2,$$

$$z = \gamma\,\mathrm{V} - \mathrm{C\,H\,V}\,,\quad z^2 = \gamma^2\,\mathrm{V}^2 - 2\,\mathrm{C}\,\gamma\,\mathrm{H\,V}^2 + \mathrm{C}^2\,\mathrm{H}^2\,\mathrm{V}^2,$$

und folglich

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = \mathrm{V}^2 - 2\,\mathrm{H\,V}^2 \sum \mathrm{A}\,\alpha + \mathrm{H}^2\,\mathrm{V}^2 \sum \mathrm{A}^2.$$

Wie wir bereits früher sahen, ist

$$\sum \mathrm{A}\,\alpha = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum \mathrm{A}^2 = \frac{1}{\mathrm{V}^2}\,;$$

demnach erhalten wir für das Quadrat des Radiusvektors der Wellenfläche

$$r^2 = \mathrm{V}^2 + \mathrm{H}^2.$$

Setzt man diesen Werth von $\mathrm{V}^2 + \mathrm{H}^2$ in den oben für $\frac{x\mathrm{H}}{\mathrm{V}}$ erhaltenen Ausdruck ein, so ergibt sich

$$\frac{x\,\mathrm{H}}{\mathrm{V}} = \mathrm{A}\,(a - r^2)\,,$$

oder

$$\frac{x}{r^2 - a} = -\frac{\mathrm{A\,V}}{\mathrm{H}}\,,$$

und analog

$$\frac{y}{r^2 - b} = -\frac{\mathrm{B\,V}}{\mathrm{H}}\,,$$

$$\frac{z}{r^2 - c} = -\frac{\mathrm{C\,V}}{\mathrm{H}}\,.$$

Diese Grössen sind also proportional A, B, C, und wenn man sie an deren Stelle in Gleichung (IV) einführt, so folgt

$$\frac{a\,x^2}{r^2 - a} + \frac{b\,y^2}{r^2 - b} + \frac{c\,z^2}{r^2 - c} = 0;$$

dies ist die Gleichung der Wellenfläche in ihrer einfachsten Form.

Die Fläche scheint vom sechsten Grade zu sein; doch kann man durch Entwicklung derselben leicht nachweisen, dass sie nur vom vierten Grad ist.

Durch Beseitigung des Nenners erhält man nämlich:

$$\sum a x^2 (r^2 - b)(r^2 - c) = 0,$$

oder

$$r^4 \sum a x^2 - r^2 \sum (b + c) a x^2 + a b c (x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Der gemeinsame Faktor r^2 aller Glieder kann weggehoben werden, so dass sich ergibt

$$\sum x^2 \sum a x^2 - \sum (a b + a c) x^2 + a b c = 0;$$

diese Gleichung ist aber nur vom vierten Grade.

185. Geometrische Konstruktion der Wellenfläche. — Wir wollen eine Wellenebene betrachten, und eine dazu senkrechte Ebene,

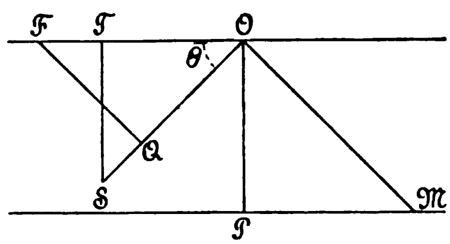

Fig. 22.

die durch die Fresnel'sche Schwingung geht, als Ebene der Zeichnung wählen. Diese Schwingung sei durch die Gerade OF (Fig. 22) dargestellt. Die Neumann'sche Schwingung liegt in der Wellenebene und steht senkrecht zu der Fresnel'schen, sie steht daher auch senkrecht zur Ebene der Zeichnung und projicirt sich als Punkt O. Der Lichtstrahl und die Sarrau'sche Schwingung sind beide senkrecht zur Neumann'schen Schwingung und liegen daher in der Ebene der Zeichnung; es sei OS die Sarrau'sche Schwingung und OM der Lichtstrahl; beide stehen senkrecht zu einander. Die Lage der Wellenebene nach Verlauf der Zeiteinheit wird durch ihre Spur PM angegeben.

Die Berührungsebene zu dem Elasticitäts-Ellipsoïd

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 = 1$$

im Punkte F, dessen Koordinaten A, B, C sind, hat die Gleichung

$$a \mathrm{A} x + b \mathrm{B} y + c \mathrm{C} z = 1.$$

Die Richtungskosinus der Normalen zu dieser Ebene sind proportional zu aA, bB, cC, d. h. zu den Komponenten der Sarrau'schen Schwingung. Diese Tangentialebene steht also senkrecht zur Ebene der Zeichnung, in der sie durch die zu OS senkrechte Gerade FQ dargestellt wird. Dies Resultat lässt sich auch noch auf andere Weise ableiten. Die Gerade OF ist eine Axe der Ellipse E, die durch den Schnitt des Elasticitäts-Ellipsoïds mit der Wellenebene entsteht; die Tangente in F zu dieser Ellipse steht also senkrecht zu OF und da sie ausserdem in der Wellenebene liegt, die senkrecht zur Ebene der Zeichnung steht, ist sie auch selbst senkrecht zu dieser letzteren Ebene. Die Tangentialebene zu dem Ellipsoïd in F, welche diese Tangente enthält, wird also auch senkrecht zur Ebene der Zeichnung gerichtet sein.

Wir wollen jetzt die Kugel betrachten, welche um den Punkt O als Mittelpunkt mit dem Radius Eins beschrieben ist. Tragen wir auf der Geraden OQ eine Länge $\mathrm{OS} = \frac{1}{\mathrm{OQ}}$ ab, so ist der Punkt S der Pol der Ebene FQ in Bezug auf diese Kugel. Wenn der Punkt F das Elasticitäts-Ellipsoïd beschreibt, so wird also der Ort des Punktes S das Polarellipsoïd sein, welches dem Elasticitäts-Ellipsoïd reciprok ist. Dies reciproke Ellipsoïd hat somit die Gleichung

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1\,.$$

Die Tangentialebene zu diesem Ellipsoïd in S hat den Punkt F zum Pol; sie steht demnach senkrecht zum Strahl OF und schneidet die Ebene der Zeichnung in ST. Hieraus können wir ableiten, dass die Gerade OS eine Axe der Ellipse E′ ist, welche durch den Schnitt des reciproken Ellipsoïds S mit einer zum Lichtstrahl senkrechten Ebene entsteht. Die Tangente an diese Ellipse im Punkte S liegt nämlich in der Schnittebene und in der Tangentialebene zum Ellipsoïd; da diese beiden Ebenen senkrecht zur Ebene der Zeichnung stehen, so steht die Tangente ebenfalls zu dieser Ebene senkrecht und demnach auch zu dem Radiusvektor OS, der dann eine Axe darstellen muss.

Wir wollen nun nachweisen, dass OM = OS ist. Die Geraden OM und OP stehen senkrecht zu OS bezw. OF, also sind die Winkel FOS und POM einander gleich. Da nun die Fortpflanzungsgeschwindigkeit OP der ebenen Welle gleich dem Reciproken der Axe OF der Ellipse E ist, so erhalten wir

$$\mathrm{OM} = \frac{\mathrm{OP}}{\cos\theta} = \frac{1}{\mathrm{OF}\,\cos\theta}\,.$$

Andererseits folgt aber aus dem Dreieck OFQ

$$OS = \frac{1}{OQ} = \frac{1}{OF \cos \theta}.$$

Demnach ist also in der That $OM = OS$.

Da nun M ein Punkt der Wellenfläche ist, so können wir diese Fläche auf folgende Art konstruiren: Wir schneiden das reciproke Ellipsoïd S durch eine beliebige Ebene und tragen auf der Normalen OM zu dieser Ebene Längen ab, die den Axen der durch den Schnitt entstandenen Ellipse E′ gleich sind.

186. Schnitt der Wellenfläche mit den Symmetrieebenen. — Als Ebene der Zeichnung wollen wir eine der drei optischen Symmetrieebenen des Medium wählen. Diese Ebenen sind die Hauptebenen des Elasticitäts-Ellipsoïds und daher gleichfalls die Hauptebenen des

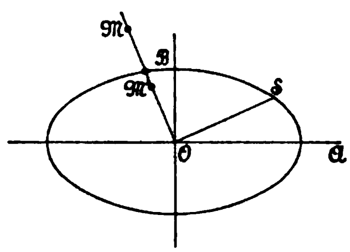

Fig. 23.

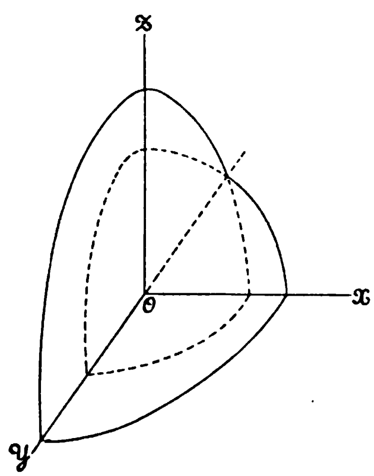

Fig. 24.

reciproken Ellipsoïds S; eine zur Ebene der Zeichnung senkrechte Ebene, die durch den Mittelpunkt dieses Ellipsoïds geht, enthält also die Axe desselben, welche senkrecht zur Zeichnung steht. Wenn OS (Fig. 23) die Ebene des betrachteten Schnittes darstellt, so erhält man die beiden entsprechenden Punkte der Wellenfläche, wenn man auf der Normalen OM zu dieser Ebene die Länge $OM = OS$ und eine Länge OM′ abträgt, die gleich der Länge der in O projicirten Axe ist. Die beiden Punkte M und M′ liegen in der Zeichenebene, und man erhält den Schnitt der Wellenfläche mit dieser Ebene, wenn man die Ebene OS um die durch O gehende Normale rotiren lässt und die sämmtlichen Punkte M und M′ in analoger Weise konstruirt, wie oben beschrieben. Da sich die Länge der in O projicirten Axe nicht ändert, so wird auch die Grösse OM′ konstant sein und der Punkt M′ einen Kreis beschreiben. Der Punkt M dagegen beschreibt eine Ellipse, welche identisch mit der Ellipse AB ist, die wir durch den Schnitt des reciproken Ellipsoïds mit der Ebene der Zeichnung erhielten, nur sind die Axen derselben um 90° gedreht.

Der Schnitt der Wellenfläche durch eine Symmetrieebene besteht also aus einem Kreis und einer Ellipse. Die Kenntniss dieser Schnitte gibt uns Aufschluss über die Form der Wellenfläche. Nehmen wir an, dass $a > b > c$, so wird der Theil der Wellenfläche, der in dem von den positiven Koordinaten gebildeten Raume liegt, die in Fig. 24 abgebildete Form haben.

In dem speciellen Fall der einaxigen Krystalle ist das Elasticitäts-Ellipsoïd ein Rotationskörper; dies gilt dann auch für das reciproke Ellipsoïd und die Wellenfläche. Der Schnitt dieser Fläche mit zwei Symmetrieebenen setzt sich in diesem Falle aus einem Kreis und einer Ellipse zusammen; der Schnitt mit der dritten Symmetrieebene wird durch zwei Kreise gebildet. Die Wellenfläche besteht dann aus einer Kugel und einem dieselbe berührenden Rotations-Ellipsoïd.

187. Nabelpunkte und singuläre Tangentialebenen der Wellenfläche. — Für einen Kreisschnitt des reciproken Ellipsoïds werden alle Radienvektoren gleich gross sein; demnach entspricht einer Kreisebene nur ein einziger Punkt M der Wellenfläche. Aber zu jeder Richtung OS einer Axe gehört eine Tangentialebene, die zu der durch OS und OM gehenden Ebene senkrecht steht. Wir erhalten also eine unendlich grosse Zahl von Tangentialebenen in M; derselbe ist somit ein konischer Punkt. Da zu jedem Kreisschnitt zwei konische Punkte gehören, so erhalten wir vier reelle und acht imaginäre konische Punkte. Man nennt diese Stellen auch die Nabelpunkte der Wellenfläche.

Der durch die Tangentialebenen zur Wellenfläche in diesem konischen Punkt gebildete Kegel ist vom zweiten Grad. Er kann nämlich nicht vom dritten Grade sein, denn die durch zwei dieser Punkte gehende Gerade würde sonst die Fläche in sechs Punkten treffen, was nicht möglich sein kann, da diese Fläche nur vom vierten Grad ist.

Die Betrachtung der Kreisebenen des Elasticitäts-Ellipsoïds führt zu einer neuen interessanten Eigenschaft der Wellenfläche.

Wenn wir annehmen, dass die Wellenebene eine Kreisebene ist, so wird jeder Radius des Kreises eine Richtung Fresnel'scher Schwingungen darstellen. Jeder dieser Richtungen entspricht eine

Tangentialebene PM zur Wellenfläche; da aber $OP = \frac{1}{OF}$, und da OF konstant ist, so fallen diese verschiedenen Tangentialebenen zusammen. Dagegen sind ihre Berührungspunkte mit der Wellenfläche nicht dieselben, denn jeder Richtung OF entspricht eine besondere Richtung von OS und folglich auch von OM. Die einem Kreisschnitt des Ellipsoïds entsprechende Ebene PM berührt demnach die Wellenfläche in unendlich vielen Punkten. Diese Punkte bilden eine Kurve zweiten Grades, denn da im Allgemeinen der Schnitt einer Fläche durch eine singuläre Tangentialebene sich aus zwei zusammenfallenden Kurven zusammensetzt, so ist der Grad jeder dieser Kurven halb so gross, als derjenige der Fläche. Die Schnittkurve der Fläche durch eine singuläre Tangentialebene besteht aus zwei zusammenfallenden Kreisen. Es gibt vier solcher singulären Tangentialebenen, die reell sind, da ein Ellipsoïd zwei Richtungen von Kreisschnitten besitzt, deren jeder zwei singuläre Tangentialebenen entsprechen.

Eine ganze Anzahl anderer Eigenschaften der Wellenfläche wurden von verschiedenen Mathematikern untersucht; besonders verweisen wir auf das sehr elegante Verfahren von Mannheim zum Auffinden der Krümmungsradien und Krümmungslinien der Wellenfläche. Aber wir wollen bei diesen Eigenschaften, die vom Standpunkt der Optik kein Interesse besitzen, nicht länger verweilen. Nur die Betrachtung der Nabelpunkte und der singulären Tangentialebenen ist von grosser Wichtigkeit. Bekanntlich wurde Hamilton dadurch zur Entdeckung der inneren und äusseren konischen Refraktion geführt, die später Lloyd mit Hülfe schwieriger Experimente thatsächlich nachgewiesen hat.

Geradlinige Fortpflanzung des Lichtes.

188. Geradlinige Fortpflanzung des Lichtes in einem isotropen Medium. — Wir haben früher (§ 181) die Richtung des Lichtstrahls in einem krystallinischen Medium mit Hülfe des Huyghens'schen Princips bestimmt; aber so wichtig und nützlich auch die Rolle ist, welche dieses Princip in der Optik spielt, so kann man doch gegen dasselbe, wie bereits erwähnt, eine ganze Anzahl von Einwürfen erheben.

Es dürfte daher ganz angebracht sein, zu untersuchen, wie man auch ohne das Huyghens'sche Princip und die zahlreichen dadurch bedingten Schwierigkeiten die Richtung des Lichtstrahls in einem isotropen oder anisotropen Medium bestimmen kann. Wir wollen dabei mit dem einfachsten Fall, nämlich dem der isotropen Medien, beginnen und die Gleichungen der transversalen Bewegung in der gebräuchlichen Form schreiben:

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \Delta \xi,$$

$$\varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \Delta \eta,$$

$$\varrho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \Delta \zeta,$$

und

$$\Theta = 0.$$

Diesen Gleichungen suchen wir zu genügen durch

$$(1) \qquad \xi = \mathrm{A}\, e^{\mathrm{P}}, \quad \eta = \mathrm{B}\, e^{\mathrm{P}}, \quad \zeta = \mathrm{C}\, e^{\mathrm{P}},$$

worin

$$\mathrm{P} = 2\, i\, \pi \left(\frac{z - \mathrm{V}\, t}{\lambda}\right).$$

Würden wir dabei A, B, C als Konstanten betrachten, so gelangten wir wieder zu der gewöhnlichen Theorie der Fortpflanzung einer unendlichen ebenen Welle, und es würde dann die Frage nach der Richtung des Lichtstrahls nicht entstehen, da der ganze Raum in gleicher Weise erleuchtet wäre. Wir müssen also voraussetzen, dass nur ein Theil des Aethers in Schwingungen versetzt ist, und dass demnach A, B, C Funktionen von x, y, z und t darstellen.

Als Längeneinheit wählen wir eine unseren gebräuchlichen Einheiten vergleichbare Grösse, so dass λ einen sehr kleinen und $\frac{2\, i\, \pi}{\lambda}$ einen unendlich grossen Werth annimmt (wenn wir bei der Theorie von Sarrau diese Grösse als sehr klein betrachtet hatten, so geschah dies aus dem Grunde, weil wir uns auf eine Längeneinheit von der Grössenordnung des Abstandes zweier materieller Moleküle bezogen); dagegen wollen wir voraussetzen, dass die Funktionen A, B, C und ihre Differentialquotienten verschiedener Ordnung endlich sind.

Die folgenden Betrachtungen können also, wenigstens ohne Modifikation, nicht auf den Fall angewandt werden, wo die Funktionen A, B, C einen Sprung erleiden und ihre Differentialquotienten demnach nicht endlich sind; in diesem Fall treten nämlich Beugungserscheinungen auf, und der Lichtstrahl wird abgelenkt.

Setzen wir die Werthe (1) in die erste der Bewegungsgleichungen ein, so folgt

$$\varrho\left(V^2 A - \frac{\lambda}{i\pi} V \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right) = A + \frac{\lambda}{i\pi} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta A.$$

Vernachlässigen wir die Glieder mit λ^2 und bedenken, dass $\varrho V^2 = 1$, so verschwinden die von λ unabhängigen Glieder; man erhält dann

$$\frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \tag{2}$$

und analog

$$\frac{\partial B}{\partial t} + V \frac{\partial B}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Wenn wir die Werthe (1) in die Gleichung $\theta = 0$ einsetzen, so finden wir

$$\frac{2i\pi}{\lambda} C + \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0;$$

diese Gleichung zeigt uns, dass C unendlich klein ist von derselben Ordnung wie λ. Gleichung (2) hat nun das allgemeine Integral

$$A = \text{willkürliche Funktion von } x,\ y \text{ und } (z - Vt).$$

Der Werth von A ist also zur Zeit t an dem Punkte mit den Koordinaten $x, y, z + Vt$ derselbe, wie zur Zeit 0 am Punkt x, y, z. Wenn am Zeitanfang nur im Innern einer kleinen Kugel mit dem Mittelpunkt x, y, z Licht vorhanden ist, so befindet sich zur Zeit t nur Licht innerhalb einer kleinen Kugel mit dem Mittelpunkt $x, y, z + Vt$. Mit anderen Worten, das Licht pflanzt sich in Richtung der z-Axe, d. h. senkrecht zur Wellenebene fort.

Somit *steht bei einem isotropen Medium der Lichtstrahl senkrecht zur Wellenebene.*

189. Geradlinige Fortpflanzung des Lichtes in einem anisotropen Medium. — Wir wollen nun zu dem Fall krystallinischer Medien übergehen und z. B. die Gleichungen von Sarrau betrachten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \Delta \xi - \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \Delta \eta - \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \qquad (1) \\ \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= \Delta \zeta - \frac{\partial \Theta}{\partial z}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen suchen wir zu erfüllen durch

$$\xi = \mathrm{L}\, e^{\mathrm{P}}, \quad \eta = \mathrm{M}\, e^{\mathrm{P}}, \quad \zeta = \mathrm{N}\, e^{\mathrm{P}},$$

$$\mathrm{P} = \frac{2\, i\, \pi}{\lambda} (\alpha\, x + \beta\, y + \gamma\, z - \mathrm{V}\, t),$$

wo L, M, N Funktionen von x, y, z und t darstellen.

Wären L, M, N Konstanten, die wir mit L_0, M_0, N_0 bezeichnen wollen, so müssten die letzteren und die Grösse V den Gleichungen

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{V}^2\, \mathrm{L}_0}{a} = \mathrm{L}_0 - \alpha\, \mathrm{H}, \quad \frac{\mathrm{V}^2\, \mathrm{M}_0}{b} = \mathrm{M}_0 - \beta\, \mathrm{H}, \quad \frac{\mathrm{V}^2\, \mathrm{N}_0}{c} = \mathrm{N}_0 - \gamma\, \mathrm{H}$$

genügen, worin

$$\mathrm{H} = \alpha\, \mathrm{L}_0 + \beta\, \mathrm{M}_0 + \gamma\, \mathrm{N}_0.$$

Wir setzen nun

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}_0 f + g, \quad \mathrm{M} = \mathrm{M}_0 f + h, \quad \mathrm{N} = \mathrm{N}_0 f,$$

und suchen die drei Funktionen f, g, h zu bestimmen.

Zu diesem Zweck führen wir diese Werthe an Stelle von ξ, η, ζ in die Bewegungsgleichungen ein, also

$$\xi = (\mathrm{L}_0 f + g)\, e^{\mathrm{P}}, \quad \eta = (\mathrm{M}_0 f + h)\, e^{\mathrm{P}}, \quad \zeta = \mathrm{N}_0 f\, e^{\mathrm{P}}.$$

Wir erhalten auf diese Weise drei Differentialgleichungen zwischen f, g und h. Diese Gleichungen sind nach ihrer Bildungsweise:

1. linear und homogen in Bezug auf die Grössen f, g, h und ihre partiellen Differentialquotienten der ersten und zweiten Ordnung;

2. besitzen sie konstante Koefficienten, nachdem der gemeinsame Faktor e^{P} beseitigt ist.

Durch Elimination von g und h aus diesen drei Gleichungen bleibt eine einzige Differentialgleichung zur Bestimmung von f.

Auch diese Gleichung ist linear und homogen und besitzt konstante Koefficienten; aber sie wird von höherer als zweiter Ordnung.

Die Grösse f ist nicht mehr darin enthalten, denn die Bewegungsgleichungen müssen auch für

$$f = 1, \quad g = h = 0$$

erfüllt sein.

Die Gleichung ändert sich nicht, wenn man gleichzeitig λ, x, y, z und t mit demselben Faktor multiplicirt, was darauf hinauskommt, dass man gleichzeitig und in demselben Verhältniss die Längeneinheit und die Zeiteinheit ändert.

Es sei nun

$$A . \lambda^{-p} . D^m f$$

ein beliebiges Glied der linken Seite unserer Gleichung; A ist eine von λ unabhängige Grösse und $D^m f$ ein partieller Differentialquotient m^{ter} Ordnung von f. Verändert man λ, x, y, z und t in $k\lambda$, kx, ky, kz und kt, so wird dies Glied mit k^{m-p} multiplicirt. Damit sich die Gleichung nicht ändert, muss $m-p$ denselben Werth für alle Glieder der Gleichung haben. Wir multipliciren deshalb unsere Gleichung mit einer Potenz von λ, so dass $m-p$ gleich 0 ist; dann enthalten die Koefficienten der Differentialquotienten erster Ordnung die Grösse λ nicht; diejenigen der Differentialquotienten zweiter Ordnung dagegen enthalten λ; die dritter Ordnung λ^2 u. s. f. Da aber λ sehr klein ist, können wir die Glieder mit diesem Faktor vernachlässigen; es bleiben dann nur noch die Differentialquotienten erster Ordnung, und die Gleichung für f lautet

$$\mu \frac{\partial f}{\partial x} + \mu' \frac{\partial f}{\partial y} + \mu'' \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

wo μ, μ', μ'' Konstanten bedeuten.

Das allgemeine Integral dieser Gleichung wird sein

$$f = \text{willkürliche Funktion von } x - \mu t, \quad y - \mu' t, \quad z - \mu'' t.$$

Dies bedeutet, dass die Richtungskosinus des Lichtstrahls proportional μ, μ', μ'', sind und dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, — in der Richtung des Strahls, nicht senkrecht zur Wellenebene gemessen, — gleich

$$\sqrt{\mu^2 + \mu'^2 + \mu''^2}$$

ist.

Man könnte μ, μ', μ'' durch Ausführung aller angedeuteten Rechnungen bestimmen, doch hätte dies keinen Zweck. Die Bewegungsgleichungen müssen nämlich erfüllt sein, wenn man $f = e^{x - \mu t}$ macht, so dass g und h sehr kleine Konstanten multiplicirt mit $e^{x-\mu t}$ darstellen. Dabei ist

$$L = L'_0 e^{x - \mu t}, \quad M = M_0' e^{x - \mu t}, \quad N = N_0' e^{x - \mu t}.$$

Hier sind L_0', M_0', N_0' Konstanten, die sich sehr wenig von L_0, M_0, N_0 unterscheiden. Man erhält dann

$$\xi = L_0' e^{P'}, \quad \eta = M_0' e^{P'}, \quad \zeta = N_0' e^{P'};$$

$$P' = \frac{2 i \pi}{\lambda} \left[\left(\alpha + \frac{\lambda}{2 i \pi} \right) x + \beta y + \gamma z - \left(V + \frac{\lambda \mu}{2 i \pi} \right) t \right].$$

Wenn wir setzten:

$$\xi,\ \eta \text{ und } \zeta = \text{Const. } e^{\mathrm{P}},$$

wobei

$$\mathrm{P} = \frac{2i\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z - \mathrm{V}t)$$

und λ so gewählt war, dass $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, so musste, wie wir sahen, die Beziehung gelten:

$$\frac{\alpha^2}{\mathrm{V}^2 - \alpha^2} + \frac{\beta^2}{\mathrm{V}^2 - \beta^2} + \frac{\gamma^2}{\mathrm{V}^2 - \gamma^2} = 0.$$

Wir wollen, wie früher, die linke Seite dieser Gleichung mit

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, \mathrm{V})$$

bezeichnen. Wegen der Beziehung $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ können wir diese Gleichung auch schreiben:

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{F}\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{\mathrm{V}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma_2}}\right) = 0.$$

Da die Gleichung (3) homogen in Bezug auf α, β, γ und V ist, so bleibt sie noch bestehen, wenn man gleichzeitig α, β, γ und V mit demselben Faktor multiplicirt. Sie bleibt also ungeändert, selbst wenn man auf die Annahme $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ verzichtet.

Ebenso muss die Beziehung (3) noch erfüllt werden, wenn man in ihr die Grössen α, β, γ und V durch die Koefficienten von x, y, z und $-t$ in dem Ausdruck für P′ ersetzt, d. h. durch

$$\alpha + \frac{\lambda}{2i\pi},\ \beta,\ \gamma \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{V} + \lambda\mu}{2i\pi}.$$

Man erhält somit

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{F}\left(\left(\alpha + \frac{\lambda}{2i\pi}\right), \beta, \gamma, \frac{\mathrm{V} + \frac{\lambda\mu}{2i\pi}}{\sqrt{\left(\alpha + \frac{\lambda}{2i\pi}\right)^2 + \beta^2 + \gamma^2}}\right) = 0.$$

Diese Gleichung ist mit dem früher angenommenen Genauigkeitsgrad richtig, d. h. unter der Voraussetzung, dass λ sehr klein ist; vernachlässigt man λ^2, so ist

$$\left[\left(\alpha+\frac{\lambda}{2i\pi}\right)^2+\beta^2+\gamma^2\right]^{-\frac{1}{2}}=\left[\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\frac{\alpha\lambda}{i\pi}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\left(1+\frac{\alpha\lambda}{i\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{\alpha\lambda}{2i\pi},$$

und

$$\frac{V+\frac{\lambda\mu}{2i\pi}}{\sqrt{\left(\alpha+\frac{\lambda}{2i\pi}\right)^2+\beta^2+\gamma^2}}=V+\frac{\lambda\mu}{2i\pi}-\frac{\alpha V\lambda}{2i\pi};$$

endlich

$$F\left(\left(\alpha+\frac{\lambda}{2i\pi}\right),\ \beta,\ \gamma,\ \frac{V+\frac{\lambda\mu}{2i\pi}}{\sqrt{\left(\alpha+\frac{\lambda}{2i\pi}\right)^2+\beta^2+\gamma^2}}\right)$$

$$=F\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ V)+\frac{\lambda}{2i\pi}\left[\frac{\partial F}{\partial\alpha}+\frac{\partial F}{\partial V}(\mu-\alpha V)\right].$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (3) und (4) erhält man somit:

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial F}{\partial V}=\alpha V\frac{\partial F}{\partial V},$$

$$\frac{\partial F}{\partial\beta}+\mu'\frac{\partial F}{\partial V}=\beta V\frac{\partial F}{\partial V},$$

$$\frac{\partial F}{\partial\gamma}+\mu''\frac{\partial F}{\partial V}=\gamma V\frac{\partial F}{\partial V}.$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit (6) in § 182, so sieht man, dass der Punkt mit den Koordinaten μ, μ', μ'' kein anderer ist als der, den wir in diesem Paragraphen mit O' bezeichnet hatten (Fig. 21), und dessen Koordinaten x, y, z waren.

Da nach dem Vorhergehenden die Richtungskosinus des Lichtstrahls den Grössen μ, μ', μ'' proportional sind, so ist die Gerade OO' (Fig. 21) dem Lichtstrahl parallel; dies stimmt mit dem Resultat überein, zu dem wir durch Anwendung des Huyghens'schen Princips gelangt waren.

Doppelbrechung in den hemiëdrischen Krystallen.

190. Bewegungsgleichungen. — Die bisher besprochenen Theorien der Doppelbrechung können nur auf holoëdrische Medien Anwendung finden. Zur Erklärung der Erscheinungen in hemiëdrischen, doppelbrechenden Medien müssen wir, wie bei der Theorie der Drehung der Polarisationsebene, die Hypothese des § 14 verwerfen. Dort hatten wir angenommen, dass in den Ausdrücken von $D\xi$, $D\eta$, $D\zeta$ die Glieder, welche die Quadrate von Dx, Dy, Dz enthalten, vernachlässigt werden können. Setzt man dies nicht voraus, so ist, wie wir sahen, die Funktion W_2 eine homogene Funktion zweiten Grades der partiellen Differentialquotienten verschiedener Ordnung von ξ, η, ξ, und es lauten die Bewegungsgleichungen

$$\varrho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=P, \quad \varrho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=Q, \quad \varrho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=R,$$

wo P, Q, R lineare Polynome der Differentialquotienten verschiedener Ordnung von ξ, η, ζ darstellen. Die Bildungsweise dieser Polynome ist im § 124 angegeben.

Berücksichtigt man die Dispersion nicht, so braucht man die Differentialquotienten vierter Ordnung nicht einzuführen. Wir setzen also

$$P=X+F, \quad Q=Y+G, \quad R=Z+H,$$

wo X, Y, Z lineare Funktionen der zweiten Differentialquotienten von ξ, η, ζ bedeuten und F, G, H ebensolche Funktionen der Differentialquotienten dritter Ordnung.

Wählt man die Einheiten so, dass ϱ gleich 1 ist, dann lauten die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=X+F,$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=Y+G,$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=Z+H.$$

Für den Fall holoëdrischer Medien müssen sich diese Gleichungen nothwendiger Weise auf diejenigen reduciren, die wir im Anfang dieses Kapitels benutzt haben und die uns zur Erklärung der Doppelbrechung in diesen Medien geführt hatten. Wir wollen nun zeigen, dass die Grössen F, G, H dann thatsächlich aus den obigen Gleichungen verschwinden.

Da die holoëdrischen Medien drei optische Symmetrieebenen und folglich auch ein Symmetriecentrum besitzen, so dürfen sich die Gleichungen, welche die Bewegung eines Moleküls darstellen, nicht ändern, wenn man die Zeichen von x, y, z und von ξ, η, ζ umkehrt.

Diese Bedingung würde aber nicht erfüllt sein, wenn die Bewegungsgleichungen einen Differentialquotienten dritter Ordnung, z. B. $\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial y}$ enthielten, denn dieser Differentialquotient würde sein Zeichen behalten, während die Differentialquotienten $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ .... auf den linken Seiten das Zeichen ändern. Uebrigens haben wir bereits in § 124 darauf hingewiesen, dass ganz allgemein die Bewegungsgleichungen in einem Medium mit einem Symmetriecentrum nur Differentialquotienten gerader Ordnung enthalten können.

191. Die Koefficienten der verschiedenen Glieder der Polynome F, G, H sind nicht unabhängig von einander; wir wollen zeigen, dass wenn das Polynom F den Faktor $\alpha \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial y}$ enthält, in dem Polynom G der Faktor $-\alpha \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial y}$ enthalten ist.

Nach der Bildungsweise des Polynoms P muss das Glied $\alpha \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial y}$ dieses Polynoms von dem Glied $\alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}$ oder $\alpha \eta'_x \xi''_{xy}$ der Funktion W_2 herrühren. Wenn wir nämlich diese Bildungsweise anwenden, so haben wir zuerst den Differentialquotienten dieses Gliedes nach ξ''_{xy} zu nehmen, was uns $\alpha \eta'_x$ liefert, dann den zweiten Differentialquotienten des Resultats nach x und y; dies giebt $\alpha \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial y}$.

Wenn wir nun die Glieder von G suchen, welche durch das Glied $\alpha \eta'_x \xi''_{xy}$ der Funktion W_2 geliefert werden, so erhalten wir eines dieser Glieder, indem wir erst nach η'_x, sodann nach x differentiiren und dann das Zeichen umkehren. Durch Ausführung dieser Operationen finden wir in der That $-\alpha \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial y}$.

192. Fortpflanzung einer ebenen Welle. — Wir wollen bei der Betrachtung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen in einem hemiëdrischen Medium von den Arbeiten Neumann's und Mac Cullagh's ausgehen.

Da die Axen, für welche die Bewegungsgleichungen gelten, beliebig sind, so können wir die ebene Welle als parallel zur xy-Ebene betrachten. Dann hängen die Grössen ξ, η, ζ nur noch von z und t ab, und die Differentialquotienten der Verschiebungen nach x und y verschwinden aus den Bewegungsgleichungen. Wenn die Polynome F, G, H Null wären, so würden die Schwingungen transversal erfolgen; die Bedingung $\theta = 0$ würde ergeben $\frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$, und die Differentialquotienten von ζ nach z würden auch in den

Bewegungsgleichungen ebenfalls nicht auftreten. Im allgemeinen Falle, wo F, G, H nicht Null sind, verhält es sich nicht mehr so, da aber die Schwingungen noch nahezu transversal erfolgen, so kann man diese Differentialquotienten vernachlässigen.

Unter diesen Bedingungen lauten die Bewegungsgleichungen für die Wellenebene

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} + b\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2} + \alpha\frac{\partial^3\xi}{\partial z^3} + \beta\frac{\partial^3\eta}{\partial z^3},$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = b\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} + c\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2} - \beta\frac{\partial^3\xi}{\partial z^3} + \gamma\frac{\partial^3\eta}{\partial z^3}.$$

Die Koefficienten der vorstehenden Gleichungen genügen in Folge der Bildungsweise der rechten Seiten den vorausgesetzten Bedingungen.

Dieselben vereinfachen sich, wenn man zur Axe der x und y die zu einander rechtwinkligen Richtungen der beiden Neumann'schen Schwingungen wählt. Sie müssen dann für die Werthe von ξ und η erfüllt sein, welche diesen Schwingungen entsprechen, wenn man dabei die Differentialquotienten dritter Ordnung vernachlässigt. Wählt man nun die Endkoordinaten ξ und η der zur x-Axe parallelen Schwingung so, dass $\xi = \mathrm{A}e^{\frac{2i\pi}{\lambda}(z-\mathrm{V}t)}$, $\eta = 0$, so ergibt sich aus der zweiten Gleichung $b = 0$. Durch diese Wahl der Koordinatenaxen reduciren sich also die vorstehenden Gleichungen auf

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} + \alpha\frac{\partial^3\xi}{\partial z^3} + \beta\frac{\partial^3\eta}{\partial z^3},$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = c\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2} - \beta\frac{\partial^3\xi}{\partial z^3} + \gamma\frac{\partial^3\eta}{\partial z^3}.$$

193. Macht man ferner nach dem Vorgange von Mac Cullagh besondere Annahmen über die Koefficienten der Glieder von W_2, welche Differentialquotienten zweiter Ordnung enthalten und demnach die Glieder F, G, H der Bewegungsgleichungen liefern, so gelangt man zu Gleichungen, bei denen $\alpha = \gamma = 0$. Wir können jedoch zeigen, dass auch ohne irgend eine Voraussetzung über die Funktion W_2 immer die Beziehung $\alpha = \gamma = 0$ gilt.

Nach der Bildungsweise der rechten Seiten der Bewegungsgleichungen müsste das Glied von W_2, das in dem Ausdruck von F die Grösse $\alpha\frac{\partial^3\xi}{\partial z^3}$ liefern könnte, von der Form $\alpha\frac{\partial\xi}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}$ oder $\alpha\,\xi'_z\,\xi''_z$ sein. Suchen wir nun die zwei Glieder, welche hieraus in F entstehen, so erhalten wir

$$F = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \alpha \, \xi_z' \, \xi_z''}{\partial \xi_z'}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial \alpha \, \xi_z' \, \xi_z''}{\partial \xi_z''}\right) + \cdots,$$

$$F = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha \, \xi_z''\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\alpha \, \xi_z'\right) + \cdots,$$

oder

$$F = -\alpha \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3} + \alpha \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3} + \cdots$$

Das einzige Glied von W_2, aus dem man den Ausdruck $\frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3}$ in der ersten Gleichung ableiten kann, ergibt demnach zwei Glieder, die sich aufheben. Auf dieselbe Weise lässt sich zeigen, dass $\frac{\partial^3 \eta}{\partial z^3}$ in der zweiten Gleichung verschwindet. Man erhält somit

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= a \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^3}, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= c \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \beta \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3}. \end{aligned}$$

194. Fortpflanzungsgeschwindigkeiten. — Wir wollen diese Gleichungen zu erfüllen suchen durch

$$\xi = A \, e^{\frac{2 i \pi}{\lambda}(z - Vt)}, \qquad \eta = B \, e^{\frac{2 i \pi}{\lambda}(z - Vt)}.$$

Setzen wir diese Werthe ein, so finden wir

$$A V^2 = a A + \frac{2 i \pi}{\lambda} \beta B,$$

$$B V^2 = c B - \frac{2 i \pi}{\lambda} \beta A;$$

und nach Einführung von $\beta' = \beta \frac{2\pi}{\lambda}$

$$(2) \qquad \begin{aligned} A V^2 &= a A + i \beta' B, \\ B V^2 &= c B - i \beta' A. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$(V^2 - a) A = i \beta' B,$$

$$(V^2 - c) B = -i \beta' A,$$

und durch Multiplikation dieser beiden Gleichungen

$$(3) \qquad (V^2 - a)(V^2 - c) = \beta'^2.$$

Diese Gleichung liefert zwei Werthe für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle, welche beide reell sind; denn da β sehr klein ist, so gilt dies auch für β'. Wir erhalten also zwei Lichtstrahlen, deren Geschwindigkeiten V für $a = c$ gleich $\sqrt{a \pm \beta'}$ werden. Im Allgemeinen ist die eine derselben nahezu $= \sqrt{a}$, die andere ungefähr $= \sqrt{c}$.

195. Elliptische Polarisation der Strahlen. — Aus der zweiten der Gleichungen (2) folgt

$$\frac{B}{A} = \frac{-i\beta'}{V^2 - c};$$

das Verhältniss $\frac{B}{A}$ ist somit eine rein imaginäre Grösse. Nehmen wir also A als reell an, so hat B die Form $i B_1$ und die reellen Theile von ξ und η, die den Bewegungsgleichungen genügen, sind

$$\xi = A \cos \frac{2\pi}{\lambda}(z - Vt),$$

$$\eta = -B_1 \sin \frac{2\pi}{\lambda}(z - Vt).$$

Die Bahn des schwingenden Moleküls ist durch die Gleichung

$$\frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\eta^2}{B_1^2} = 1$$

gegeben, welche eine auf die Axen bezogene Ellipse darstellt. In den hemiëdrischen Krystallen sind somit die Strahlen elliptisch polarisirt und die Axen der Polarisationsellipse fallen mit den Schwingungsrichtungen der geradlinig polarisirten Strahlen in dem holoëdrischen Krystall zusammen.

Das Verhältniss der Ellipsenaxen ist gleich

$$-\frac{B_1}{A} = \frac{\beta'}{V^2 - c}.$$

Erhebt man diesen Ausdruck in's Quadrat und ersetzt β'^2 durch seinen Werth (3), so erhält man für das Verhältniss der Quadrate der Axen

$$R = \frac{V^2 - a}{V^2 - c}.$$

Für eine Welle, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit nahezu gleich $\sqrt{a}$ ist, wird der Nenner nahe gleich $a - c$ und der Zähler fast Null; der Werth von R ist also sehr klein und die Ellipse sehr lang. Für die Welle dagegen mit der ungefähren Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\sqrt{c}$ ist R sehr gross und die Ellipse ebenfalls sehr in die Länge gezogen.

Im Allgemeinen wird demnach die Polarisation der beiden gebrochenen Strahlen fast geradlinig sein. Damit eine merkliche elliptische Polarisation stattfindet, muss die Differenz $a - c$ sehr klein sein; in diesem Fall sind nämlich die beiden Glieder des Verhältnisses R sehr klein, so dass dieses einen endlichen Werth annehmen kann.

Für $c = a$ werden die beiden Gleichungen (2) bei Vernachlässigung der Glieder mit β'

$$A V^2 = A a \quad \text{und} \quad B V^2 = B a,$$

sodass das Verhältniss $\frac{B}{A}$ unbestimmt ist; in diesem Fall erhält man also eine geradlinige Polarisation, während die Polarisationsebene unbestimmt bleibt. Die Fortpflanzungsrichtung fällt demnach mit einer optischen Axe des Krystalls zusammen. Nach dem Vorhergehenden wird bei einem hemiëdrischen Krystall nur dann eine merkliche elliptische Polarisation auftreten, wenn sich der Strahl nahezu in Richtung der optischen Axe fortpflanzt, da nur unter dieser Bedingung $a - c$ sehr klein ist.

Betrachtet man eine Wellenebene, deren Fortpflanzungsrichtung in einem hemiëdrischen Krystall in die optische Axe fällt, so wird sie zwei Wellenebenen hervorrufen, da die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten $\sqrt{a + \beta'}$ und $\sqrt{a - \beta'}$ dieser Wellen verschieden sind. Diese beiden Wellen werden ferner cirkular polarisirt sein, denn das Verhältniss R der Quadrate der Ellipsenaxen wird dann

$$\frac{V^2 - a}{V^2 - a} = 1.$$

Es tritt in diesem Fall also eine Drehung der Polarisationsebene auf.

196. Wir wollen den Fall wieder aufnehmen, wo sich zwei elliptisch polarisirte Wellen mit verschiedenen Geschwindigkeiten V' und V'' fortpflanzen; es lässt sich dann nachweisen, dass die von den schwingenden Molekülen in den beiden Wellen beschriebenen Ellipsen einander gleich sind.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit, welche nahezu gleich $\sqrt{a}$

ist, mit V', so wird das Verhältniss R der Quadrate der entsprechenden Ellipsenaxen grösser als 1 sein; der Werth von R, der das Quadrat des Verhältnisses der grossen zur kleinen Axe angibt, ist dann

$$\frac{V'^2 - c}{V'^2 - a}.$$

Für die andere Geschwindigkeit V'' dagegen ist R kleiner als 1 und das Quadrat des Verhältnisses der grossen zur kleinen Ellipsenaxe ist in diesem Falle

$$\frac{V''^2 - a}{V''^2 - c}.$$

Sind die beiden Ellipsen gleich, so muss gelten

$$\frac{V'^2 - c}{V'^2 - a} = \frac{V''^2 - a}{V''^2 - c},$$

oder

$$V'^2 + V''^2 = a + c.$$

Aus Gleichung (3) für die Geschwindigkeiten erhalten wir aber

$$V^4 - (a + c) V^2 + a c - \beta'^2 = 0,$$

und es gilt in der That für die Summe der Wurzeln V'^2 und V''^2 dieser Gleichung die Beziehung

$$V'^2 + V''^2 = a + c.$$

Die grossen Axen dieser beiden gleichen Ellipsen stehen senkrecht zu einander, da das Verhältniss R des Quadrates der nach OX gerichteten Axe zu dem Quadrat der nach OY gerichteten Axe von einem Werth kleiner als 1 zu einem Werth grösser als 1 übergeht, oder umgekehrt, wenn man V^2 resp. gleich V'^2 oder V''^2 macht.

Diese Ellipsen werden endlich in entgegengesetztem Sinn durchlaufen, so wie es die Pfeile der Figur 25 andeuten. Zum Beweise hierfür braucht man nur zu zeigen, dass das Verhältniss $\frac{B_1}{A}$ der Moduln von η und ξ mit dem betrachteten Strahl das Zeichen wechselt. Dies Verhältniss, welches den Werth $\frac{\beta'}{V^2 - c}$ besitzt, wechselt das Zeichen, wenn c zwischen den Werthen V'^2 und V''^2 der Quadrate der Geschwindigkeiten liegt. Die Einführung von c für V^2 in die Gleichung

$$(V^2 - a)(V^2 - c) - \beta'^2 = 0$$

für die Geschwindigkeiten ergibt einen negativen Werth, während man durch $V^2 = \infty$ und $V^2 = 0$ eine positive Grösse erhält. Die eine der Wurzeln ist somit grösser als c, die andere dagegen kleiner.

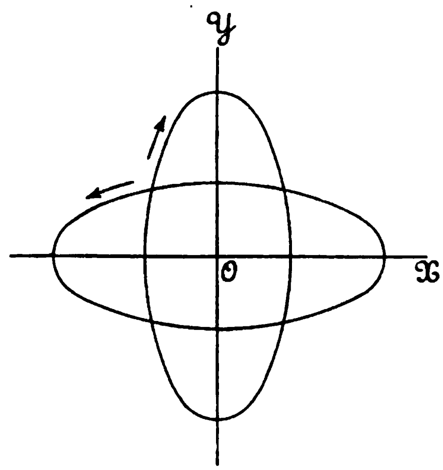

Fig. 25.

197. Man kann also auf Grund der Hypothesen von Sarrau die Erscheinung der Doppelbrechung in hemiëdrischen Medien erklären. Wir wollen uns indess nicht weiter mit dieser Theorie beschäftigen, sondern verweisen auf die Abhandlung, welche Potier hierüber in dem Bulletin de l'Association française pour l'avancement des sciences **1**, S. 264 veröffentlicht hat.

Kapitel VII.

Reflexion.

198. Wenn ein Lichtstrahl auf die Trennungsfläche zweier Medien trifft, so wird ein Theil des Lichtes durch diese Fläche reflektirt und bleibt in dem ersten Medium; der andere Theil wird gebrochen und gelangt in das zweite Medium. Man kann nun die Frage aufwerfen, welcher Bruchtheil des einfallenden Lichtes reflektirt und welcher Theil gebrochen wird. Wenn andrerseits der einfallende Lichtstrahl polarisirt ist, so gilt dies für die reflektirten und gebrochenen Strahlen in gleicher Weise, und es ist von Wichtigkeit, die Polarisationsebenen derselben zu kennen. Mit anderen Worten, die Aufgabe, welche wir uns stellen, ist die folgende:

Es sei die Richtung und Amplitude der einfallenden Schwingung gegeben und es soll die Richtung und Amplitude der gebrochenen und der reflektirten Schwingung gefunden werden.

Wir nehmen dabei immer an, dass das erste Medium durchsichtig und isotrop ist; doch wird die Lösung der Aufgabe verschieden sein, je nachdem das zweite Medium 1. durchsichtig und isotrop, oder 2. durchsichtig und krystallinisch oder 3. undurchsichtig ist.

Diese drei Fälle, den der Glasreflexion, der Krystallreflexion und der Metallreflexion, wollen wir nacheinander behandeln.

Reflexion an Glas.

Ueber die Reflexion an Glas sind drei Theorien aufgestellt worden, die in gleicher Weise durch das Experiment bestätigt werden; nämlich die Theorie von Fresnel, die von Neumann und von Mac Cullagh und diejenige von Cauchy.

Theorie von Fresnel[1]).

199. Grund-Hypothesen. — Fresnel nimmt an:

1. dass die Schwingung senkrecht zur Polarisationsebene steht;

2. dass die Elasticität ε des Aethers konstant und in den beiden Medien gleich ist; die Dichte ϱ des Aethers dagegen variirt. Da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V gleich $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varrho}}$ ist, so müssen wir somit annehmen, dass ϱ dem Quadrate des Brechungskoefficienten proportional ist.

3. Fresnel betrachtet dann die Geschwindigkeiten zweier Moleküle, die unendlich nahe an einander und an der Trennungsfläche, aber zu beiden Seiten der letzteren liegen; er zerlegt jede dieser Geschwindigkeiten in zwei andere, deren eine parallel zur Tangentialebene an die Trennungsfläche gerichtet ist, während die andere senkrecht zu dieser Ebene steht. Ferner nimmt er an, dass die tangentialen Geschwindigkeitskomponenten der beiden Moleküle nach Grösse und Richtung gleich sein müssen, dass hingegen die normalen Komponenten verschieden sein können.

Diese Fassung der Hypothese über die Kontinuität kann als willkürlich erscheinen und ist in der That von verschiedenen Seiten so aufgefasst worden; doch nach meiner Meinung mit Unrecht. Die Aetherschwingungen sind transversal und, wie wir gezeigt haben (§ 45), kann man dies Verhalten auf sehr verschiedene Weise erklären; nur zwei dieser Erklärungsweisen haben wir indess berücksichtigt. Man kann nämlich annehmen, dass die Transversalität durch eine gewisse innere Verbindung bewirkt werde, und zwar so, dass der Widerstand des Aethers gegen die Kompression endlich ist. Diese Hypothese scheint Fresnel, wie wir früher erwähnten, bei seiner Theorie der Doppelbrechung angenommen zu haben. Hier dagegen macht er die entgegengesetzte Voraussetzung, welcher die folgenden Bewegungsgleichungen entsprechen:

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \varepsilon \left(\Delta \xi - \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right),$$

$$\varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \varepsilon \left(\Delta \eta - \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right),$$

$$\varrho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \varepsilon \left(\Delta \zeta - \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right).$$

[1]) Oeuvres complètes I, S. 767.

Der Widerstand des Aethers gegen die Kompression ist hierbei Null. Unter diesen Verhältnissen steht aber der Annahme nichts im Wege, dass die normalen Geschwindigkeitskomponenten unserer unendlich nahen Moleküle verschieden sind. Wir wollen annehmen, dass die Trennungsfläche der beiden Medien eine Ebene sei, und wollen zwei Ebenen betrachten, die, auf beiden Seiten der Trennungsfläche liegend, dieser parallel und einander sehr nahe benachbart sind. Wenn nun die senkrechten Geschwindigkeitskomponenten der Aethermoleküle auf diesen beiden Ebenen nicht übereinstimmen, so wird der Abstand dieser beiden Ebenen periodisch variiren; dies hat eine abwechselnde Kompression und Dilatation des zwischen beiden Ebenen befindlichen Aethers zur Folge. Da aber der Widerstand des Aethers gegen die Kompression Null ist, so können diese Vorgänge ohne Störung der Bewegung eintreten.

4. Endlich benutzt Fresnel das Princip der lebendigen Kraft.

200. Anwendung der obigen Principien. — Wir nehmen an, dass die Trennungsfläche der beiden Medien und ebenso die einfallende, reflektirte und gebrochene Welle Ebenen sind. Ferner soll der einfallende und folglich auch der reflektirte und gebrochene Strahl vollständig polarisirt sein. Die Gesetze der Reflexion des natürlichen Lichtes lassen sich nämlich leicht aus denen des polarisirten Lichtes ableiten, wenn man einen natürlichen Strahl als Uebereinanderlagerung zweier Strahlen von gleicher Intensität betrachtet, die rechtwinklig zu einander polarisirt sind.

Die Trennungsfläche der beiden Medien wählen wir zur xy-Ebene; ferner seien ξ, η, ζ die drei Verschiebungskomponenten eines beliebigen Moleküls und zwar ξ_1, η_1, ζ_1 für das einfallende Licht, ξ_2, η_2, ζ_2 für das reflektirte und ξ_3, η_3, ζ_3 für das gebrochene Licht. Man erhält dann im ersten Medium

$$\xi = \xi_1 + \xi_2, \qquad \eta = \eta_1 + \eta_2, \qquad \zeta = \zeta_1 + \zeta_2,$$

und im zweiten Medium

$$\xi = \xi_3, \qquad \eta = \eta_3, \qquad \zeta = \zeta_3.$$

Nach der Fresnel'schen Hypothese sind ξ und η kontinuirliche Funktionen, dagegen ist ζ diskontinuirlich. Somit wird für $z = 0$:

$$(1) \qquad \xi_1 + \xi_2 = \xi_3, \qquad \eta_1 + \eta_2 = \eta_3.$$

Bei ebenen Wellen gelten folgende Gleichungen:

$$\xi_1 = A_1 \cos(P_1 + \omega_1),$$
$$\eta_1 = B_1 \cos(P_1 + \omega_1'),$$
$$\zeta_1 = C_1 \cos(P_1 + \omega_1''),$$

wo

$$P_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - V t):$$

ferner

$$\xi_2 = A_2 \cos(P_2 + \omega_2),$$
$$\eta_2 = B_2 \cos(P_2 + \omega_2'),$$
$$\zeta_2 = C_2 \cos(P_2 + \omega_2''),$$

wo

$$P_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z - V t);$$

endlich

$$\xi_3 = A_3 \cos(P_3 + \omega_3),$$
$$\eta_3 = B_3 \cos(P_3 + \omega_3'),$$
$$\zeta_3 = C_3 \cos(P_3 + \omega_3''),$$

wo

$$P_3 = \frac{2\pi}{\lambda_3}(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z - V' t).$$

Die Grössen A, B, C und ω sind Konstanten; V als Fortpflanzungsgeschwindigkeit im ersten Medium hat denselben Werth für den einfallenden und den reflektirten Strahl; V' bedeutet die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im zweiten Medium, und es gilt die Beziehung

$$V' = \frac{V}{n},$$

wenn man mit n den Brechungskoefficienten bezeichnet.

Da die Schwingungen in der Wellenebene liegen müssen, so hat man zu setzen

$$\begin{aligned} (2) \qquad \alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \eta_1 + \gamma_1 \zeta_1 &= \alpha_2 \xi_2 + \beta_2 \eta_2 + \gamma_2 \zeta_2 \\ &= \alpha_3 \xi_3 + \beta_3 \eta_3 + \gamma_3 \zeta_3 = 0. \end{aligned}$$

Die erste der Gleichungen (1), die für $z = 0$ gelten müssen, ergibt

$$(3) \qquad A_1 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda_1}(\alpha_1 x + \beta_1 y - Vt) + \omega_1\right]$$

$$+ A_2 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda_2}(\alpha_2 x + \beta_2 y - Vt) + \omega_2\right]$$

$$= A_3 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda_3}(\alpha_3 x + \beta_3 y - V't) + \omega_3\right].$$

201. Fresnel führt an dieser Stelle die neue Hypothese ein, dass $\omega_1 = \omega_2$; zu dieser Hypothese gelangte er nicht durch theoretische Betrachtungen, sondern durch das Experiment. Er fand nämlich, dass im Fall der nicht totalen Reflexion das reflektirte Licht geradlinig polarisirt bleibt, wenn dies beim einfallenden Licht der Fall ist.

Dann aber kann die Gleichung (3) nur identisch erfüllt werden, wenn man hat

$$(4) \qquad \frac{\alpha_1}{\lambda_1} = \frac{\alpha_2}{\lambda_2} = \frac{\alpha_3}{\lambda_3}, \qquad \frac{\beta_1}{\lambda_1} = \frac{\beta_2}{\lambda_2} = \frac{\beta_3}{\lambda_3}, \qquad \frac{V}{\lambda_1} = \frac{V}{\lambda_2} = \frac{V'}{\lambda_3},$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$$

$$A_1 + A_2 = A_3 .$$

Die zweite Gleichung von (1) würde uns ebenso geben

$$\omega_1' = \omega_2' = \omega_3',$$

$$B_1 + B_2 = B_3 .$$

Aus den Gleichungen (4) erhalten wir

$$\lambda_1 = \lambda_2, \qquad \alpha_1 = \alpha_2, \qquad \beta_1 = \beta_2,$$

$$\lambda_3 = \frac{\lambda_1}{n}, \qquad \alpha_3 = \frac{\alpha_1}{n}, \qquad \beta_3 = \frac{\beta_1}{n}.$$

Wir wollen die Einfallsebene zur xz-Ebene wählen, dann wird $\beta_1 = 0$, und, wenn mit i der Einfallswinkel bezeichnet wird,

$$\alpha_1 = \sin i, \qquad \gamma_1 = \cos i .$$

Wenn β_1 Null ist, gilt in Folge der Gleichungen (4) dasselbe für β_2 und β_3. Dies heisst aber, dass die reflektirte und die gebrochene Welle senkrecht zur xz-Ebene stehen, oder mit anderen Worten, dass der gebrochene und der reflektirte Strahl in der Einfallsebene liegen.

Da $\alpha_1 = \alpha_2$ ist, so muss auch

$$\alpha_2 = \sin i$$

sein, und

$$\gamma_2 = \pm \sqrt{1 - \alpha_2^2 - \beta_2^2} = \pm \cos i .$$

Da γ_2 nicht gleich γ_1 sein kann, da sonst der einfallende und der reflektirte Strahl zusammenfallen würden, so ist zu setzen

$$\gamma_2 = -\gamma_1 = -\cos i .$$

Dies zeigt, dass der Reflexionswinkel gleich dem Einfallswinkel ist.

Bedeutet ferner r den Brechungswinkel, so wird in gleicher Weise gelten

$$\alpha_3 = \sin r , \qquad \gamma_3 = \cos r ,$$

und da $\alpha_1 = n\,\alpha_3$ ist, so gelangt man zu dem bekannten Brechungsgesetz

$$\sin i = n \sin r .$$

Die Fresnel'sche Theorie führt also auf sehr einfache Weise zu den elementaren Gesetzen der Reflexion und Brechung.

Andererseits erhält man aus den Gleichungen (2)

$$A_1\,\alpha_1 \cos(P_1 + \omega_1) + C_1\,\gamma_1 \cos(P_1 + \omega_1'') = 0 ,$$
$$A_2\,\alpha_2 \cos(P_2 + \omega_2) + C_2\,\gamma_2 \cos(P_2 + \omega_2'') = 0 ,$$
$$A_3\,\alpha_3 \cos(P_3 + \omega_3) + C_3\,\gamma_3 \cos(P_3 + \omega_3'') = 0 .$$

Diese Gleichungen können nur identisch erfüllt werden, wenn folgende Beziehungen bestehen

$$A_1\,\alpha_1 + C_1\,\gamma_1 = A_2\,\alpha_2 + C_2\,\gamma_2 = A_3\,\alpha_3 + C_3\,\gamma_3 = 0 ,$$
$$\omega_1 = \omega_1'' , \qquad \omega_2 = \omega_2'' , \qquad \omega_3 = \omega_3'' .$$

Wenn der einfallende Strahl geradlinig polarisirt ist, hat man $\omega_1 = \omega_1'$, so dass also die neun Grössen ω einander gleich sind; wir können uns dann den Zeitanfang so gewählt denken, dass diese neun Grössen Null werden.

Es bleiben somit zwischen den Grössen A, B, C folgende Beziehungen bestehen:

$$A_1 + A_2 = A_3 , \qquad B_1 + B_2 = B_3 , \tag{5}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} A_1\,\alpha_1 + C_1\,\gamma_1 = 0 , \\ A_2\,\alpha_2 + C_2\,\gamma_2 = 0 , \qquad A_3\,\alpha_3 + C_3\,\gamma_3 = 0 . \end{array} \right. \tag{6}$$

202. Anwendung des Princips der lebendigen Kraft. — Um das Princip der lebendigen Kraft anwenden zu können, muss man annehmen, dass nur ein Theil des Aethers in Schwingung versetzt ist; denn wenn der ganze Raum erleuchtet wäre, würde die gesammte lebendige Kraft unendlich sein und die Anwendung des Princips illusorisch werden.

Wir setzen voraus, dass im Anfange der Zeit der schwingende Aether sich in dem Raum eines rechtwinkligen Parallelepipeds CDEF (Fig. 26) befinde, das begrenzt wird durch zwei zur Einfallsebene parallele Ebenen, ferner durch zwei Ebenen, die der einfallenden Welle parallel sind, sowie durch zwei auf den vier ersten

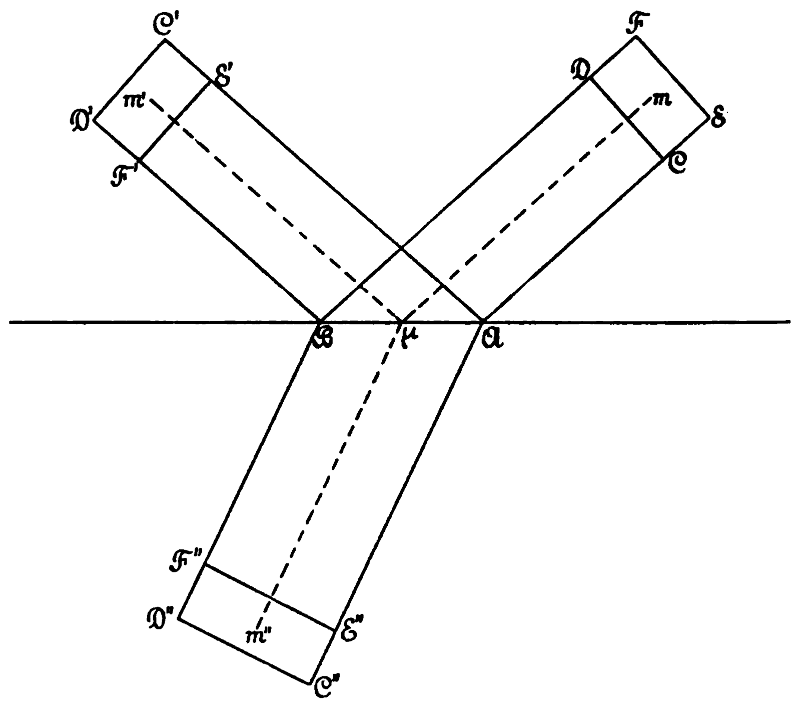

Fig. 26.

Ebenen senkrechte Ebenen. Ferner wollen wir annehmen, dass die Dimensionen dieses Parallelepipeds sehr gross gegen die Wellenlänge seien, so dass wir die Beugungserscheinungen nicht zu berücksichtigen brauchen.

Es entsteht nun die Frage, was aus der Erschütterung des Aethers nach Verlauf einer Zeit t wird. Die von einem Punkte m des Parallelepipeds CDEF ausgehende Erschütterung pflanzt sich zunächst in der Richtung des einfallenden Strahls fort, bis sie in μ auf die Trennungsfläche trifft; hier theilt sie sich sodann in zwei Wellen, deren eine von μ nach m' in Richtung des reflektirten Strahls verläuft, während die andere von μ nach m'' in Richtung des gebrochenen Strahls gelangt. Die Geschwindigkeit längs $m\mu$ und $\mu m'$ ist gleich V und längs $\mu m''$ gleich V'', so dass man erhält

$$\frac{m\,\mu}{V} + \frac{\mu\, m'}{V} = \frac{m\,\mu}{V} + \frac{\mu\, m''}{V'} = t,$$

oder

$$n\,.\,\mu\, m'' = \mu\, m'\,. \tag{7}$$

Das von dem Parallelepiped CDEF ausgehende Licht wird also zur Zeit t zwei Parallelepipede erfüllen; das eine derselben, C' D' E' F', welches dem reflektirten Licht entspricht, wird zwei zur Einfallsebene sowie zwei zur reflektirten Welle parallele Ebenen besitzen. Das zweite C''D''E''F'' des gebrochenen Lichtes wird durch zwei zur Einfallsebene und zwei zur gebrochenen Ebene parallele Flächen begrenzt sein. In der Figur ist die Einfallsebene als Zeichenebene gewählt.

Sind nun q_1, q_2 und q_3 die in diesen drei Parallelepipeden enthaltenen Aethermassen, so wird der Mittelwerth der Energie einer in Schwingung versetzten Aethermasse, z. B. des einfallenden Lichtes, einerseits dieser Masse proportional sein, andererseits dem Ausdruck $(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)$; durch das Theorem der lebendigen Kraft erhält man dann also

$$q_1 (A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) = q_2 (A_2^2 + B_2^2 + C_2^2) + q_3 (A_3^2 + B_3^2 + C_3^2).$$

Offenbar ist $q_1 = q_2$, und es handelt sich nun darum, das Verhältniss von q_3 zu q_1 zu bestimmen. Die Volumina der Parallelepipede verhalten sich wie ihre Schnitte in der Einfallsebene, das heisst wie die Parallelogramme CDEF, C'' D'' E'' F''. Da nun andererseits die optische Dichte im zweiten Medium n^2 mal grösser, als die im ersten Medium ist, so hat man

$$\frac{q_3}{q_1} = n^2 \frac{C''E''}{CE} \cdot \frac{C''D''}{CD}\,.$$

In Folge der Gleichung (7) gilt ferner

$$\frac{C''A}{C'A} = \frac{1}{n}, \qquad \frac{E''A}{E'A} = \frac{1}{n},$$

also

$$C''E'' = \frac{1}{n}\,C'E' = \frac{1}{n}\,CE.$$

Andererseits ist

$$C''D'' = AB\cos r, \quad CD = AB\cos i,$$

so dass folgt

$$\frac{q_3}{q_1} = n \frac{\cos r}{\cos i} = \frac{\sin i \cos r}{\sin r \cos i} = \frac{\alpha_1 \gamma_3}{\alpha_3 \gamma_1}.$$

Das Princip der lebendigen Kraft lässt sich daher schreiben

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_1}(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 - A_2^2 - B_2^2 - C_2^2) = \frac{\gamma_3}{\alpha_3}(A_3^2 + B_3^2 + C_3^2).$$

Den einfallenden Strahl können wir in zwei andere zerlegen, deren einer in der Einfallsebene, der andere senkrecht dazu polarisirt ist.

Für den ersten muss A_1, C_1, A_2, C_2, A_3, C_3 Null sein, für den zweiten dagegen B_1, B_2, B_3.

Das Princip der lebendigen Kraft muss für jeden dieser Strahlen gesondert gelten, so dass die Gleichung für die lebendige Kraft in zwei zerfällt:

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_1}(B_1^2 - B_2^2) = \frac{\gamma_3}{\alpha_3} B_3^2, \tag{8}$$

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_1}(A_1^2 - A_2^2 + C_1^2 - C_2^2) = \frac{\gamma_3}{\alpha_3}(A_3^2 + C_3^2). \tag{9}$$

Die Gleichungen (5), (6), (8) und (9) genügen zur Bestimmung von A_2, B_2, C_2 und A_3, B_3, C_3, wenn A_1, B_1, C_1 bekannt ist.

203. Folgerungen. — Dividiren wir Gleichung (8) durch die zweite der Gleichungen (5), so folgt

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_1}(B_1 - B_2) = \frac{\gamma_3}{\alpha_3} B_3. \tag{10}$$

Wenn wir ferner in Gleichung (9) die Grössen C_1, C_2, C_3 durch ihre aus (6) abgeleiteten Werthe ersetzen, so erhalten wir

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\left(1 + \frac{\alpha_1^2}{\gamma_1^2}\right)(A_1^2 - A_2^2) = \frac{\gamma_3}{\alpha_3}\left(1 + \frac{\alpha_3^2}{\gamma_3^2}\right) A_3^2,$$

oder nach Division durch die erste der Gleichungen (5):

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\left(1 + \frac{\alpha_1^2}{\gamma_1^2}\right)(A_1 - A_2) = \frac{\gamma_3}{\alpha_3}\left(1 + \frac{\alpha_3^2}{\gamma_3^2}\right) A_3,$$

oder endlich

$$\frac{A_1 - A_2}{\alpha_1 \gamma_1} = \frac{A_3}{\alpha_3 \gamma_3}. \tag{11}$$

Die Gleichungen (8) und (9) können also durch die linearen Gleichungen (10) und (11) ersetzt werden.

Unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\gamma_2 = -\gamma_1, \quad \lambda_2 = \lambda_1, \quad \frac{\alpha_1}{\lambda_1} = \frac{\alpha_3}{\lambda_3}$$

lässt sich die Gleichung (10) schreiben

$$\frac{B_1 \gamma_1}{\lambda_1} + \frac{B_2 \gamma_2}{\lambda_2} = \frac{B_3 \gamma_3}{\lambda_3}. \tag{12}$$

Ebenso kann man Gleichung (11) schreiben

$$A_1 \left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \right) + A_2 \left(\frac{\gamma_2}{\alpha_2} + \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \right) = A_3 \left(\frac{\gamma_3}{\alpha_3} + \frac{\alpha_3}{\gamma_3} \right),$$

oder in Anbetracht der Gleichungen (6)

$$\frac{A_1 \gamma_1 - C_1 \alpha_1}{\alpha_1} + \frac{A_2 \gamma_2 - C_2 \alpha_2}{\alpha_2} = \frac{A_3 \gamma_3 - C_3 \alpha_3}{\alpha_3}.$$

Diese Gleichung, sowie die Gleichung (12) lassen sich in eine symmetrische Form bringen, wenn man bedenkt, dass die Grössen β Null sind; man findet dann

$$\tag{13} \begin{cases} \dfrac{B_1 \gamma_1 - C_1 \beta_1}{\lambda_1} + \dfrac{B_2 \gamma_2 - C_2 \beta_2}{\lambda_2} = \dfrac{B_3 \gamma_3 - C_3 \beta_3}{\lambda_3}, \\[2ex] \dfrac{C_1 \alpha_1 - A_1 \gamma_1}{\lambda_1} + \dfrac{C_2 \alpha_2 - A_2 \gamma_2}{\lambda_2} = \dfrac{C_3 \alpha_3 - A_3 \gamma_3}{\lambda_3}; \end{cases}$$

hierzu kommt noch die Beziehung

$$\frac{A_1 \beta_1 - B_1 \alpha_1}{\lambda_1} + \frac{A_2 \beta_2 - B_2 \alpha_2}{\lambda_2} = \frac{A_2 \beta_3 - B_3 \alpha_3}{\lambda_3},$$

die man aus der zweiten der Gleichungen (5) ableiten kann, da die Grössen β Null sind, und da $\frac{\alpha_1}{\lambda_1} = \frac{\alpha_2}{\lambda_2} = \frac{\alpha_3}{\lambda_3}$.

Bei dieser symmetrischen Form lässt sich leicht die Bedeutung der Gleichungen (13) erkennen. Erinnert man sich nämlich daran, dass wir die Grössen ω Null gesetzt hatten, so ist

$$\xi_1 = A_1 \cos P_1, \qquad \zeta_1 = C_1 \cos P_1;$$

woraus folgt

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial z} = -\frac{2\pi \gamma_1}{\lambda_1} A_1 \sin P_1, \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} = -\frac{2\pi \alpha_1}{\lambda_1} C_1 \sin P_1.$$

Man findet also:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial z} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} = 2\pi \frac{C_1 \alpha_1 - A_1 \gamma_1}{\lambda_1} \sin P_1 ,$$

so dass die zweite der Gleichungen (13) geschrieben werden kann

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial z} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + \frac{\partial \xi_2}{\partial z} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} = \frac{\partial \xi_3}{\partial z} - \frac{\partial \zeta_3}{\partial x} .$$

Dies bedeutet, dass der Ausdruck $\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ eine kontinuirliche Funktion darstellt, ebenso folgt aus den anderen Gleichungen (13), dass $\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}$ und $\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}$ kontinuirliche Funktionen sind. Diese Bedingungen können also an die Stelle des Princips der lebendigen Kraft treten.

Wir wollen nun nachweisen, dass auch $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$ eine kontinuirliche Funktion ist. Da nämlich ξ und η kontinuirlich sind, kann man leicht einsehen, dass dies auch für $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ der Fall ist. In Folge der Transversalität der Schwingungen muss aber für beide Medien gelten

$$\Theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 ;$$

somit ist auch $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$ kontinuirlich.

In der Hypothese von Fresnel sind also nicht nur ξ und η, sondern auch noch $\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}$ und $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$ kontinuirliche Funktionen.

204. Theorem von Mac-Cullagh. — Multiplicirt man die zweite der Gleichungen (5) mit $\frac{\gamma_1}{\alpha_1}$ und vereinigt dieselbe so mit Gleichung (10), dass B_2 eliminirt wird, so findet man

$$(14) \qquad 2 B_1 \frac{\gamma_1}{\alpha_1} - B_3 \left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1} + \frac{\gamma_3}{\alpha_3} \right) = 0.$$

Ebenso erhält man durch Elimination von A_2 zwischen der ersten der Gleichungen (5) und Gleichung (11):

$$2 A_1 \left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \right) - A_3 \left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{\gamma_1} + \frac{\gamma_3}{\alpha_3} + \frac{\alpha_3}{\gamma_3} \right) = 0,$$

oder

$$(15) \qquad 2\,A_1 \frac{\gamma_1}{\alpha_1} - A_3\left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1} + \frac{\gamma_3}{\alpha_3}\right) = -2\,A_1 \frac{\alpha_1}{\gamma_1} + A_3\left(\frac{\alpha_1}{\gamma_1} + \frac{\alpha_3}{\gamma_3}\right) =$$

$$= \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\left[2\,C_1 \frac{\gamma_1}{\alpha_1} - C_3\left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1} + \frac{\gamma_3}{\alpha_3}\right)\right].$$

Durch Vergleichung der Beziehungen (14) und (15) ergiebt sich:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ \alpha_1 & 0 & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{oder symmetrischer:} \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung beweist, dass der einfallende Strahl, die einfallende Schwingung und die gebrochene Schwingung in derselben Ebene liegen.

Mit anderen Worten: die einfallende Schwingung ist, nur der Richtung nach, die Projektion der gebrochenen Schwingung auf die einfallende Welle.

Ebenso könnte man nachweisen, dass die reflektirte Schwingung, der Richtung nach, die Projektion der gebrochenen Schwingung auf die reflektirte Welle ist.

205. Gesetz von Brewster. — Wir wollen nun voraussetzen, dass der reflektirte Strahl senkrecht auf dem gebrochenen Strahl stehe, d. h. dass die reflektirte Welle senkrecht zur gebrochenen Welle gerichtet sei. Dann wird jede Gerade, die in der Ebene der gebrochenen Welle liegt, auf die Ebene der reflektirten Welle so projicirt, dass sie in den Schnitt dieser beiden Ebenen, d. h. in die y-Axe fällt.

Wie also auch die Richtung der gebrochenen Schwingung und demnach auch die Richtung der einfallenden Schwingung sein mag, die reflektirte Schwingung wird immer parallel zur y-Axe erfolgen.

Mit anderen Worten: Welches auch die Polarisationsebene des einfallenden Strahls sein mag, der reflektirte Strahl wird vollständig in der Einfallsebene polarisirt sein. Dies wird also auch stattfinden, wenn das einfallende Licht natürliches Licht ist.

206. Totale Reflexion. — Wenn das zweite Medium weniger stark bricht, als das erste, also $n < 1$ ist, kann unter Umständen α_3 grösser als 1 und deshalb γ_3 imaginär werden.

Der Brechungswinkel ist dann imaginär und das Licht kann nicht in das zweite Medium gelangen, sondern wird vollständig reflektirt; dies nennt man die totale Reflexion. In diesem Fall werden die Formeln von Fresnel illusorisch, da z. B. das Verhältniss

$\frac{A_2}{A_1}$ komplex ist. Wie wir sahen, hatte Fresnel im allgemeinen Falle die Hypothese eingeführt, dass der gebrochene und der reflektirte Strahl dieselbe Phase besitzen und dass also gilt

$$\omega_1 = \omega_2.$$

Dann liefern seine Formeln bei totaler Reflexion für $\frac{A_2}{A_1}$ einen komplexen Werth von der Form

$$\cos\varphi + i \sin\varphi.$$

Fresnel nimmt nun an, dass der Modul dieses komplexen Ausdrucks, d. h. also 1, den wahren Werth des Verhältnisses $\frac{A_2}{A_1}$ darstellt, und dass das Argument dieses Ausdruckes, d. h. φ, die Phasendifferenz $\omega_2 - \omega_1$ angibt, die bis dahin Null gesetzt war.

Offenbar wurde er zu dieser kühnen Hypothese durch zwei ältere Experimente geführt, die ihm gezeigt hatten, dass, wenn der einfallende Strahl geradlinig polarisirt ist, der reflektirte, der dann übrigens dieselbe Intensität besitzt, elliptische Polarisation zeigt.

Wie dem auch sei, seine Annahme wurde jedenfalls durch das Experiment gerechtfertigt.

207. Einwürfe gegen die Theorie von Fresnel. — Die oben entwickelte Analyse gab in den Händen Fresnel's zu hervorragenden Entdeckungen Anlass; von diesem Standpunkt aus muss man sie betrachten, ohne eine Strenge bei ihr suchen zu wollen, die ihr nicht zukommt. Die Theoretiker haben zahlreiche Einwürfe mehr oder weniger schwerwiegender Natur gegen diese Theorie erhoben, die wir widerlegen müssen, wenn wir die Undulations-Theorie mit den Versuchen vollständig in Einklang bringen wollen.

1. Die Einschränkung, welche das Princip der Kontinuität hinsichtlich der normalen Komponenten erfährt, erscheint sehr willkürlich.

2. Die oben eingeführte Annahme, dass $\omega_1 = \omega_2$, scheint zunächst aus keinem theoretischen Grund gerechtfertigt zu sein.

3. Die Formel für die totale Reflexion, welche durch das Experiment bestätigt wird, scheint mehr durch einen glücklichen Zufall, als durch eine strenge Ueberlegung gefunden worden zu sein.

4. Wenn die Elasticität des Aethers konstant ist, wird seine Dichte dem Quadrate des Brechungsexponenten proportional sein müssen; da aber dieser Exponent von der Wellenlänge abhängt, so führt diese für die Dichte des Aethers aufgestellte Formel je nach der betrachteten Farbe des Lichtes zu verschiedenen Werthen.

5. Endlich scheint es, dass man die vorhergehende Theorie nicht in analoger Weise auf krystallinische Medien anwenden kann, da der Brechungsexponent bei diesen Substanzen nicht konstant ist. Wenn also die Dichte als konstant angesehen wird, kann sie nicht proportional dem Quadrate dieses Exponenten sein.

208. Widerlegung dieser Einwürfe. — Wir wollen versuchen, eine andere Erklärung der Fresnel'schen Theorie aufzustellen, welche uns gegen diese Einwürfe schützt, ohne uns jedoch von dem Gedankengang des Autors zu entfernen.

Die Bewegungsgleichungen schreiben wir in der Form

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \varepsilon \left(\Delta \xi - \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right),$$

$$\varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \varepsilon \left(\Delta \eta - \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right),$$

$$\varrho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \varepsilon \left(\Delta \zeta - \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right).$$

Dabei betrachten wir ε als konstant und ϱ als variabel; wir können dann die Einheiten so wählen, dass $\varepsilon = 1$ ist. Den ganzen Raum denken wir uns in drei Theile getheilt; einer derselben wird von dem ersten Medium eingenommen, und hier kann man ϱ als konstant betrachten; der andere wird durch das zweite Medium erfüllt, wobei ϱ einen vom ersten verschiedenen konstanten Werth besitzt; zwischen diesen beiden Regionen befindet sich eine dritte Zwischenregion, die wir „Uebergangsschicht" nennen wollen und in der ϱ sehr schnell vom ersten zum zweiten Werth übergeht. Die Dicke dieser Uebergangsschicht wird endlich sein, aber sehr klein im Verhältniss zur Wellenlänge.

Wenn die Trennungsfläche mit der xy-Ebene zusammenfällt, so wird die Durchgangsschicht von zwei Ebenen $z = 0$ und $z = h$ begrenzt, die der Trennungsfläche parallel sind und ihr sehr nahe liegen.

Unter dieser Voraussetzung ist die Dichte ϱ nur eine Funktion von z und bleibt konstant von $z = -\infty$ bis $z = 0$, ändert sich dann sehr rasch von $z = 0$ bis $z = h$ und nimmt zwischen $z = h$ und $z = +\infty$ abermals einen konstanten, vom ersten verschiedenen Werth an.

Das Vorhandensein einer derartigen Uebergangsschicht erscheint natürlicher, als die Hypothese eines plötzlichen Wechsels in der Natur des Medium, und sie befreit uns ausserdem von allen Schwierigkeiten, die mit dem Princip der Kontinuität zusammenhängen.

Unter diesen Bedingungen suchen wir den Bewegungsgleichungen zu genügen durch

$$\xi = X\, e^{i(ax+bt)}, \qquad \eta = Y\, e^{i(ax+bt)}, \qquad \zeta = Z\, e^{i(ax+bt)};$$

hierin sind X, Y, Z komplexe Funktionen von z allein. Dann werden ξ, η, ζ ebenfalls komplexe Funktionen sein, deren reelle Theile gemäss der oben gemachten Uebereinkunft die wahren Verschiebungen der Aether-Moleküle darstellen.

Die Bewegungsgleichungen gehen dadurch über in:

$$-\varrho\, b^2 X = X'' - i\, a\, Z',$$

$$-\varrho\, b^2 Y = -a^2 Y + Y'',$$

$$-\varrho\, b^2 Z = -a^2 Z - i a X',$$

wobei die gestrichelten Buchstaben die Differentialquotienten von X, Y, Z nach z bedeuten.

Da in jedem der beiden Medien die Dichte ϱ konstant ist, so findet man als Integral dieser Gleichungen

$$X = A\, e^{iz\sqrt{\varrho b^2 - a^2}} + A'\, e^{-iz\sqrt{\varrho b^2 - a^2}},$$

$$Y = B\, e^{iz\sqrt{\varrho b^2 - a^2}} + B'\, e^{-iz\sqrt{\varrho b^2 - a^2}},$$

$$Z = C\, e^{iz\sqrt{\varrho b^2 - a^2}} + C'\, e^{-iz\sqrt{\varrho b^2 - a^2}}.$$

Bezeichnen wir mit c den Werth von $\sqrt{\varrho b^2 - a^2}$ im ersten Medium und mit c' den Werth derselben Wurzelgrösse im zweiten Medium, so erhalten wir durch Vergleichung der hier angewandten Bezeichnungen mit den früheren:

$$a = \frac{2\pi\alpha_1}{\lambda_1} = \frac{2\pi\alpha_2}{\lambda_2} = \frac{2\pi\alpha_3}{\lambda_3},$$

$$c = \frac{2\pi\gamma_1}{\lambda_1}, \qquad c' = \frac{2\pi\gamma_3}{\lambda_3},$$

$$b = \frac{-2\pi V}{\lambda_1} = \frac{-2\pi V'}{\lambda_3}.$$

Der Ausdruck für X besteht aus zwei Gliedern; im ersten Medium entspricht das Glied e^{icz} dem einfallenden und das Glied e^{-icz} dem reflektirten Strahl; im zweiten Medium entspricht das Glied $e^{ic'z}$ dem gebrochenen Strahl; dem Glied $e^{-ic'z}$ dagegen entspricht nichts, und der Koefficient desselben muss Null sein. Im ersten Medium hat man somit

$$X = A\, e^{icz} + A'\, e^{-icz}, \qquad Y = B\, e^{icz} + B'\, e^{-icz},$$
$$Z = C\, e^{icz} + C'\, e^{-icz},$$

und im zweiten

$$X = A''\, e^{ic'z}, \qquad Y = B''\, e^{ic'z}, \qquad Z = C''\, e^{ic'z}.$$

Vergleichen wir nun die Bezeichnungen dieser Entwicklung mit den früher angewandten, so finden wir

$$P_1 = ax + cz + bt, \qquad P_2 = ax - cz + bt,$$
$$P_3 = ax + c'z + bt.$$

$$A = A_1\, e^{i\omega_1}, \qquad B = B_1\, e^{i\omega_1'}, \qquad C = C_1\, e^{i\omega_1''},$$
$$A' = A_2\, e^{i\omega_2}, \qquad B' = B_2\, e^{i\omega_2'}, \qquad C' = C_2\, e^{i\omega_2''},$$
$$A'' = A_3\, e^{i\omega_3}, \qquad B'' = B_3\, e^{i\omega_3'}, \qquad C'' = C_3\, e^{i\omega_3''}.$$

Setzt man ferner

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} = u, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} = v, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} = w,$$

so erhält man die folgenden Bewegungsgleichungen

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y},$$
$$\varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z},$$
$$\varrho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x},$$

woraus folgt

$$\frac{\partial u}{\partial z} = i\, a\, w + \varrho\, b^2\, \eta, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = -\varrho\, b^2\, \xi.$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, dass die Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial z}$ und $\frac{\partial v}{\partial z}$ endlich sind; und da die Uebergangsschicht ausserordentlich dünn ist, so werden die Werthe von u und v auf beiden Seiten dieser Schicht nur sehr wenig von einander abweichen. Demnach sind u und v kontinuirliche und folglich auch endliche Grössen.

Man hat ferner

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = v + i a \zeta, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial z} = - u.$$

Also sind auch die Differentialquotienten von ξ und η endlich und kontinuirlich. Da andererseits

$$w = i a \eta,$$

so muss offenbar auch w kontinuirlich sein.

Durch Addition der drei Bewegungsgleichungen, nachdem sie nach, x bezw. y und z differentiirt wurden, erhält man

$$\frac{\partial (\varrho \xi)}{\partial x} + \frac{\partial (\varrho \eta)}{\partial y} + \frac{\partial (\varrho \zeta)}{\partial z} = 0,$$

woraus sich hier ergibt

$$\frac{\partial (\varrho \zeta)}{\partial z} = - i a \varrho \xi.$$

Dies zeigt zunächst, dass $\varrho \zeta$ eine kontinuirliche Funktion ist und da ϱ diskontinuirlich ist, so kann ζ nur diskontinuirlich oder Null sein.

Da ferner ξ kontinuirlich ist, so folgt, dass

$$\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial (\varrho \zeta)}{\partial z}$$

ebenfalls kontinuirlich sein muss. In den beiden Medien ist aber ϱ konstant, also $d\varrho = 0$, so dass der obige Ausdruck sich auf $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$ reducirt.

So finden wir also durch die vorhergehende strenge Rechnung dieselben Resultate, zu denen Fresnel durch eine glückliche Intuition gelangt war. Die Funktionen ξ, η; u, v, w und $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$ sind kontinuirlich, während ζ diskontinuirlich ist.

Aus diesen Bedingungen ergibt sich:

$$\text{(15)} \qquad A + A' = A'', \qquad B + B' = B''.$$

$$A c - C a + A' c - C' a = A'' c' - C'' a, \qquad B c - B' c = B'' c';$$

hierzu muss man noch die Bedingungen für die Transversalität hinzufügen:

$$A a + C c = A' a + C' c = A'' a + C'' c' = 0.$$

Die Bedingungen (15) genügen vollständig zur Lösung der Aufgabe. Wir haben also das Princip der lebendigen Kraft nicht zu

Hülfe genommen, indessen lässt sich dies Princip entschieden auf den vorliegenden Fall anwenden. Die Bewegungsgleichungen, von denen wir ausgegangen waren, sind nämlich dieselben, die wir im ersten Kapitel unter der Annahme erhielten, dass eine Kräftefunktion vorhanden ist, und dann ist das Princip von der lebendigen Kraft immer gültig.

209. Totale Reflexion. — Die Grösse $c = \frac{2\pi\gamma_1}{\lambda_1}$, die sich auf den einfallenden Strahl bezieht, ist immer reell; ebenso die Grösse c', wenn das erste Mittel schwächer brechend ist als das zweite. Ist dagegen $n < 1$, so ist die Grösse c' nur reell, wenn der Einfallswinkel genügend klein ist. Ueberschreitet dieser Winkel aber eine bestimmte Grenze, so wird c' imaginär und es tritt totale Reflexion ein.

Solange c' reell bleibt, geben uns die Gleichungen (15) für die Verhältnisse der Grössen A, B, C etc. reelle Werthe; dies kommt darauf hinaus, dass sie alle das gleiche Argument besitzen oder dass alle Grössen ω unter einander gleich sind. Nimmt man an, dass der Zeitanfang derart gewählt ist, dass ω_1 Null ist, so werden die neun Grössen ω Null. Auf diese Weise findet sich die Fresnel'sche Hypothese gerechtfertigt.

Anders verhält es sich, wenn c' komplex ist und totale Reflexion stattfindet; die Verhältnisse der Koefficienten A, B, C etc. werden dann komplex. Man kann in diesem Fall nachweisen, dass die Verhältnisse

$$\frac{A'}{A}, \quad \frac{B'}{B}, \quad \frac{C'}{C}$$

den Modul 1 haben, d. h. dass die Intensität des reflektirten Strahls die gleiche ist, wie die des einfallenden Strahls. Die Argumente dieser Verhältnisse stellen die Phasendifferenzen des reflektirten und des einfallenden Strahls dar. So führt uns also eine strenge Analyse, die durch Anwendung imaginärer Exponenten sehr einfach gestaltet wurde, zu dem gleichen Resultat, wie die kühnen Schlüsse von Fresnel.

Wir wollen nun die Bewegungen des Aethers im zweiten Medium betrachten. Wir finden z. B.

$$\eta = \text{reeller Theil von } B'' e^{i(ax+bt+c'z)}.$$

Da c' imaginär ist, so können wir setzen

$$c' = ih.$$

Hieraus ergibt sich, wenn wir den Zeitanfang so wählen, dass das Argument von B'' Null ist,

$$\eta = B'' e^{-hz} \cos(ax + bt).$$

Wie man sieht, dringt also eine gewisse Menge Licht in das zweite Medium ein, und wenn dasselbe nicht wahrnehmbar ist, so liegt dies an dem Faktor e^{-hz}, der sehr schnell mit wachsendem z abnimmt. Es folgt hieraus, dass die Intensität des gebrochenen Lichtes nur in einer geringen Entfernung von der Trennungsfläche merklich sein wird; diese Entfernung muss von derselben Grössenordnung, wie die Wellenlänge sein.

Es ist durch folgenden Kunstgriff gelungen, das Vorhandensein dieses gebrochenen Lichtes nachzuweisen[1]). Zwei Glasprismen werden durch eine ausserordentlich dünne Luftschicht getrennt, welche sich zwischen zwei parallelen Flächen A B und A' B' befindet. Ein Lichtstrahl geht durch das erste Prisma hindurch und trifft auf die Fläche AB unter einem grösseren Winkel als der Grenzwinkel; das gebrochene Licht dringt durch die Luftschicht und wenn diese dünn genug ist, dass das Licht die Fläche A' B' erreicht, bevor es vernichtet ist, so tritt es in das zweite Prisma ein und verhält sich dann regelmässig, so dass man das durch die beiden Prismen und durch die Luftschicht hindurchgegangene Licht beobachten kann.

Dieser Versuch scheint von Fresnel angestellt worden zu sein[2]); neuerdings ist derselbe von Quincke wiederholt und vervollständigt worden. Die Erscheinung ist derjenigen der farbigen Ringe vollständig analog; aber man beobachtet in diesem Falle nicht die lebhaften Farben, welche gewöhnlich dünne Plättchen zeigen. Der Grund hierfür ist leicht einzusehen. Bei der gewöhnlichen Theorie der farbigen Ringe ist nämlich die Intensität der Strahlen von der Wellenlänge λ proportional der Grösse $\sin \frac{a\,l}{\lambda}$, wenn l die Dicke der Schicht bezeichnet und a einen Koefficienten, der von der Richtung des Lichtstrahls abhängt. Für bestimmte Werthe von λ wird dieser Sinus Null, so dass die Strahlen gewisser Farben verschwinden und eine lebhafte Färbung auftritt. In dem betrachteten Fall ist dagegen a imaginär, und an die Stelle der gewöhnlichen Sinus treten hyperbolische Sinus, die nur Null werden können, wenn $l = 0$ ist. Die lebhaften Färbungen treten hier also nicht auf.

Wir wollen bei diesem Versuch nicht länger verweilen, sondern uns auf die Bemerkung beschränken, dass die Resultate mit der Theorie hinreichend übereinstimmen, dass indessen kleine Ab-

---

1) Quincke, Pogg. Ann. Bd. **10.**

2) Fresnel (?) siehe Verdet, Leçons d'optique physique, **2**, I, (Deutsche Uebersetzung von Exner).

weichungen auftreten, die darin ihre Erklärung finden dürften, dass die Dimension der Uebergangsschicht gegenüber der Wellenlänge nicht vollständig vernachlässigt werden darf.

210. Einwände bezüglich der Dispersion. — Durch die vorhergehenden Betrachtungen scheinen die drei ersten gegen die Fresnel'sche Theorie erhobenen Einwände vollständig widerlegt zu sein; auf den fünften werden wir gelegentlich der Untersuchung der Krystallreflexion zurückkommen. An dieser Stelle wollen wir noch den vierten Einwand besprechen, der sich auf die Dispersion bezieht; zur Widerlegung desselben müssen wir auf das zurückkommen, was über die Theorien der Dispersion gesagt worden ist.

Wir wählen z. B. die letzte der behandelten Theorien, bei welcher die gegenseitige Wirkung der Aether- und materiellen Moleküle in Betracht kommt. Nennt man ξ, η, ζ die Verschiebungskomponenten eines Aethermoleküls, ξ_1, η_1, ζ_1 diejenigen eines materiellen Moleküls, ϱ die Dichte des Aethers ϱ_1 diejenige der Materie, M einen sehr grossen Koefficienten, so lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \Delta \xi - \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mathrm{M}(\xi_1 - \xi); \qquad \varrho_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathrm{M}(\xi - \xi_1),$$

$$\varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \Delta \eta - \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mathrm{M}(\eta_1 - \eta); \qquad \varrho_1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \mathrm{M}(\eta - \eta_1),$$

$$\varrho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \Delta \zeta - \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mathrm{M}(\zeta_1 - \zeta); \qquad \varrho_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \mathrm{M}(\zeta - \zeta_1).$$

M, ϱ und ϱ_1 müssen als Funktionen von z betrachtet werden, die in jedem der beiden Mittel konstant sind, die sich aber in der Uebergangsschicht sehr rasch ändern.

Diesen Gleichungen suchen wir zu genügen, indem wir setzen

$$\xi = \mathrm{X}\, e^{i(ax+bt)}, \qquad \xi_1 = \mathrm{X}_1\, e^{i(ax+bt)},$$

$$\eta = \mathrm{Y}\, e^{i(ax+bt)}, \qquad \eta_1 = \mathrm{Y}_1\, e^{i(ax+bt)},$$

$$\zeta = \mathrm{Z}\, e^{i(ax+bt)}, \qquad \zeta_1 = \mathrm{Z}_1\, e^{i(ax+bt)};$$

man hat dann

$$\frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{1}{\xi_1} \cdot \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = \cdots = -b^2.$$

Hieraus folgt

$$\varrho_1 b^2 \xi_1 + \mathrm{M}(\xi - \xi_1) = 0, \qquad \xi_1 = \frac{\mathrm{M}\,\xi}{\mathrm{M} - \varrho_1 b^2}.$$

Setzen wir nun

$$\varrho' = \varrho + \frac{M \varrho_1}{M - \varrho_1 b^2},$$

so erhalten wir durch Einführung des Werthes von ξ in die erste Bewegungsgleichung

$$-\varrho' b^2 \xi = \Delta \xi - \frac{\partial \Theta}{\partial x},$$

und ebenso

$$-\varrho' b^2 \eta = \Delta \eta - \frac{\partial \Theta}{\partial y},$$

$$-\varrho' b^2 \zeta = \Delta \zeta - \frac{\partial \Theta}{\partial z}.$$

Alle Erscheinungen gehen somit so vor sich, als wenn jedes der beiden Mittel homogen wäre und die Dichte ϱ' besässe; diese fingirte Dichte ϱ' hängt aber von b, d. h. von der Wellenlänge, ab. Dies kommt also darauf hinaus, dass die Dichte des Aethers nicht dieselbe ist für die verschiedenen Farben; der vierte Einwurf ist damit also auch widerlegt.

Die Theorie von Briot, welche die Dispersion unter der Annahme erklärt, dass ϱ nicht konstant, sondern eine periodische Funktion ist, ermöglicht ebenfalls eine leichte Widerlegung dieses Einwurfs; mit Hülfe der Theorie von Cauchy dagegen würde dies nicht so leicht sein.

Theorie von Neumann und Mac-Cullagh.

211. Neumann und Mac-Cullagh bauten ihre Theorie auf ganz anderen Hypothesen als Fresnel auf; dieselbe wird indessen ebenfalls durch den Versuch bestätigt. Bei dem Studium dieser Theorie wollen wir eine Entwicklung anwenden, die von derjenigen der Autoren sehr verschieden ist, die aber den wahren Grund dieser merkwürdigen Thatsache besser hervortreten lässt.

Es seien ξ, η, ζ die Projektionen der Verschiebung, die von der Fortpflanzung einer beliebigen ebenen Welle herrühren; und zwar sollen ξ, η, ζ die reellen Theile von

$$A e^{iP}, \qquad B e^{iP}, \qquad C e^{iP}$$

sein, worin

$$P = \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y + \gamma z - Vt).$$

Wenn man nun

$$u = \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}, \qquad v = \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \qquad w = \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y},$$

setzt, so bilden u, v, w die reellen Theile von

$$A' e^{iP}, \qquad B' e^{iP}, \qquad C' e^{iP};$$

hierin ist

$$A' = \frac{2\pi i}{\lambda}(\beta C - \gamma B), \quad B' = \frac{2\pi i}{\lambda}(\gamma A - \alpha C), \quad C' = \frac{2\pi i}{\lambda}(\alpha B - \beta A).$$

Betrachtet man u, v, w als die drei Projektionen der Verschiebung, die von der Fortpflanzung einer zweiten ebenen Welle herrührt, so bestehen zwischen den beiden durch ξ, η, ζ und durch u, v, w dargestellten Schwingungsbewegungen die folgenden Beziehungen:

1. Die Schwingungen (ξ, η, ζ) und (u, v, w) liegen beide in der Wellenebene (welche für die beiden Schwingungsbewegungen dieselbe ist), aber sie stehen senkrecht auf einander.

2. Beide Schwingungen haben eine Phasendifferenz von $\frac{\pi}{2}$ (in Folge des Faktors i in A', B' und C').

3. Die Amplitude der Schwingung (u, v, w) steht zu derjenigen der Schwingung (ξ, η, ζ) in dem Verhältnisse $\frac{2\pi}{\lambda}$.

212. Wir wollen jetzt auf die Theorie von Fresnel zurückgehen. Wie wir gesehen haben, wurde Fresnel durch theoretische Betrachtungen dazu geführt, zwischen den Verschiebungskomponenten des einfallenden, des reflektirten und des gebrochenen Lichtes ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2; ξ_3, η_3, ξ_3 bestimmte, durch das Experiment bestätigte Beziehungen anzunehmen.

Man kann dann die Grössen u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3 auf folgende Weise bilden:

$$u_1 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} - \frac{\partial \eta_1}{\partial z}, \quad \ldots\ldots$$

$$u_2 = \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} - \frac{\partial \eta_2}{\partial z}, \quad \ldots\ldots$$

Wir wollen nun mit Neumann und Mac-Cullagh annehmen, dass die Schwingung parallel zur Polarisationsebene steht, also senkrecht zur Fresnel'schen Schwingung.

Gleichzeitig sollen die drei Komponenten der einfallenden, reflektirten und gebrochenen Schwingungen bezw. u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3 sein, und diese Grössen sollen durch dieselben Beziehungen wie in der Fresnel'schen Theorie verbunden sein.

Zunächst haben wir nachzuweisen, dass diese Hypothesen nicht im Widerspruch mit dem Experiment stehen, d. h. dass die Resultate, welche überhaupt durch den Versuch bestätigt werden können, dieselben sind wie in der Fresnel'schen Theorie.

Nun stehen die Schwingungen (ξ, η, ζ) und (u, v, w) senkrecht zu einander, woraus folgt, dass die Richtung der einfallenden, reflektirten und gebrochenen Schwingungen in der Neumann'schen Theorie senkrecht zu der Richtung steht, welche von der Fresnel'schen Theorie gefordert wird. Da wir aber gleichzeitig annehmen, dass die Schwingung parallel zu der Polarisationsebene gerichtet ist und nicht senkrecht, wie Fresnel voraussetzte, so ist die Polarisationsebene, die allein dem Experiment zugänglich ist, in den beiden Theorien die gleiche.

Es seien nun I_1, I_2, I_3 die Intensitäten des einfallenden, reflektirten und gebrochenen Lichtes in der Theorie von Fresnel; ferner I_1', I_2', I_3' die Intensitäten derselben Lichtarten nach Neumann, und endlich λ_1, λ_2, λ_3 die entsprechenden Wellenlängen. Da die Intensitäten dem Quadrate der Amplituden proportional sind, so werden die folgenden Beziehungen bestehen:

$$I_1' = \frac{4\pi^2}{\lambda_1^2} I_1, \qquad I_2' = \frac{4\pi^2}{\lambda_2^2} I_2, \qquad I_3' = \frac{4\pi^2}{\lambda_3^2} I_3.$$

Nun ist aber $\lambda_1 = \lambda_2 = n\lambda_3$, so dass man erhält

$$\frac{I_2'}{I_1'} = \frac{I_2}{I_1}, \qquad \frac{I_3'}{I_1'} = n^2 \frac{I_3}{I_1}.$$

Demnach ist das Verhältniss zwischen der Intensität des reflektirten und der des einfallenden Lichtes in den beiden Theorien das gleiche; in Folge dessen lassen die Versuche über dies Verhältniss keine Entscheidung zwischen beiden Theorien zu.

Dagegen unterscheidet sich das Verhältniss $\frac{I_3'}{I_1'}$ von $\frac{I_3}{I_1}$; nimmt man aber z. B. an, das erste Medium bestehe aus Luft, das zweite aus Glas, so kann man wohl die Intensität des einfallenden Lichtes beobachten, aber es ist unmöglich, diejenige des gebrochenen Lichtes im Glas festzustellen. Hierzu muss man den Lichtstrahl erst wieder durch eine neue Brechung aus dem Glas austreten und von neuem in Luft gelangen lassen. Die Intensität dieses Strahls ist dann bei der Fresnel'schen Theorie I_4, in der Neumann'schen I_4' und da die Wellenlänge wieder λ_1 geworden ist (Wellenlänge in Luft), so hat man

$$I_4' = \frac{4\pi^2}{\lambda_1^2} I_4$$

und

$$\frac{I_4'}{I_4} = \frac{I_1'}{I_1}.$$

Ebensowenig kann man mit Hülfe der Interferenzversuche, z. B. mit den zwei Spiegeln, entscheiden, welcher der beiden Theorien man den Vorzug zu geben hat. Sollen sich zwei Strahlen durch Interferenz aufheben, so müssen die Schwingungskomponenten ξ, η, ζ dieser beiden Strahlen gleiche Grösse, aber entgegengesetztes Vorzeichen besitzen. Dasselbe wird dann offenbar der Fall sein für die Werthe von

$$u = \frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}.$$

Die beiden Theorien stimmen also gleich gut mit dem Experiment überein.

213. Princip der Kontinuität. — In § 203 haben wir gesehen, dass u, v, w kontinuirliche Funktionen sind. Da diese Funktionen in der neuen Theorie die Verschiebungskomponenten darstellen, so sind auch die letzteren kontinuirlich. *Das Princip der Kontinuität ist also hier nicht mehr der Einschränkung, wie bei der Fresnel'schen Theorie unterworfen,* wo die zur Trennungsfläche parallelen Komponenten kontinuirlich sein mussten, während die dazu senkrechte Komponente diskontinuirlich sein konnte.

Diese Bedingung der Kontinuität lässt sich so schreiben, dass für $z = 0$

$$(1) \qquad u_1 + u_2 = u_3;\; v_1 + v_2 = v_3;\; w_1 + w_2 = w_3.$$

214. Dichte des Aethers. — Wir wollen nun zusehen, welche Dichte der Aether in der neuen Theorie besitzen muss, und gehen zu diesem Zweck auf das zurück, was früher über die Anwendung des Princips der lebendigen Kraft gesagt worden ist (§ 202). Dies Princip muss sich ebensogut auf die Hypothese von Neumann, wie auf die von Fresnel anwenden lassen. Es seien v_1, v_2, v_3 die Volumina der drei Aether-Parallelepipede CDEF, C'D'E'F' und C''D''E''F'', ferner ϱ_1 und ϱ_3 die von Fresnel im ersten und zweiten Medium angenommene Dichte des Aethers, ϱ_1' und ϱ_3' dieselben Grössen in der neuen Theorie; nach einer Hypothese von Fresnel ist dann

$$\varrho_3 = n^2 \varrho_1.$$

Das Princip der lebendigen Kraft lässt sich in der Fresnel'-schen Theorie schreiben

$$\varrho_1 (v_1 \mathrm{I}_1 - v_2 \mathrm{I}_2) = \varrho_3 v_3 \mathrm{I}_3, \tag{2}$$

und in der Neumann'schen

$$\varrho_1' (v_1 \mathrm{I}_1' - v_2 \mathrm{I}_2') = \varrho_3' v_3 \mathrm{I}_3', \tag{3}$$

Die Gleichung (2) ergibt

$$v_1 \mathrm{I}_1 - v_2 \mathrm{I}_2 = n^2 v_3 \mathrm{I}_3,$$

woraus folgt

$$v_1 \mathrm{I}_1' - v_2 \mathrm{I}_2' = v_3 \mathrm{I}_3',$$

oder endlich durch Vergleichung mit (3):

$$\varrho_3' = \varrho_1'.$$

Demnach muss also in der Neumann'schen Theorie die Dichte des Aethers als konstant und die Elasticität desselben allein als veränderlich betrachtet werden.

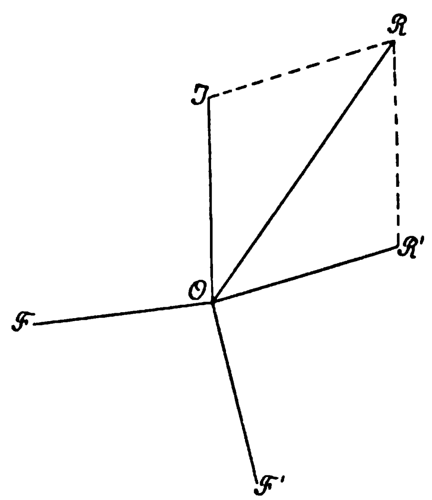

Fig. 27.

Die von uns angenommenen Hypothesen kommen auf die folgenden hinaus, die von Neumann und Mac-Cullagh aufgestellt worden sind:

1. Die Schwingung ist parallel zur Polarisationsebene gerichtet.

2. Die Dichte des Aethers ist konstant.

3. Die drei Verschiebungskomponenten sind kontinuirliche Funktionen.

215. Theorem von Mac-Cullagh. — Durch einen Punkt O (Fig. 27) der Trennungsfläche legen wir drei Gerade OI, OR' und OR, deren Projektionen auf die drei Axen resp. u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3 sind. Diese drei Geraden stellen in der Neumann'schen Theorie nach Grösse und Richtung die einfallenden, reflektirten und gebrochenen Schwingungen dar. Nach den Gleichungen (1) ist OR die geometrische Summe von OI und OR', d. h. die Diagonale des auf OI und OR' errichteten Parallelogramms. Die drei Geraden OI, OR und OR' liegen also in derselben Ebene.

Diese Ebene wollen wir nun bestimmen. Es seien OF und OF' die Richtungen der einfallenden und der gebrochenen Schwingungen in der Theorie von Fresnel, dann ist die Ebene IOF diejenige der einfallenden Welle, die Ebene ROF′ diejenige der gebrochenen Welle. Nach einem früher bewiesenen Theorem (vgl. § 204) ist OF die Projektion von OF′ auf die einfallende Welle. Die beiden Ebenen IOF und F′OF stehen also senkrecht aufeinander; da ferner der Winkel IOF ein rechter ist, so steht OI senkrecht zur Ebene FOF′ und folglich auch zu OF′; OF′ steht somit gleichzeitig senkrecht auf OI und OR und ist deshalb senkrecht zur Ebene ROI. Die Ebene ROI und die Ebene der gebrochenen Welle stehen also senkrecht aufeinander und *die Ebene der drei Schwingungen* OI, OR *und* OR′ *geht daher durch den gebrochenen Strahl.*

Mit Hülfe dieser Thatsache kann man die folgende Aufgabe lösen: Wenn die einfallende Schwingung OI (in der Neumann'schen Theorie) bekannt ist, die reflektirten und die gebrochenen Schwingungen zu konstruiren.

Durch OI und den gebrochenen Strahl legen wir eine Ebene, welche die reflektirte Welle in einer gewissen Geraden OR′ und die gebrochene Welle in der Geraden OR schneidet. Ferner legen wir durch den Punkt I eine Parallele zu OR′, die in R mit OR zusammentrifft, sodann durch R eine Parallele zu OI, die OR′ in R′ schneidet. Auf diese Weise finden wir die Geraden OR und OR′ nach Grösse und Richtung.

Wenn man dies Theorem ausdrücken will, ohne die Schwingungsrichtung in Betracht zu ziehen, so muss man sagen:

Die Polarisationsebene des gebrochenen Strahls schneidet die Polarisationsebene des einfallenden Strahls in einer Geraden, die senkrecht auf dem einfallenden Strahl steht, und die Polarisationsebene des reflektirten Strahls in einer zu diesem Strahl senkrechten Geraden.

Theorie von Cauchy[1]).

216. Cauchy geht bei seiner Theorie von dem Princip der Kontinuität aus, das er in keiner Weise beschränkt; nicht nur ξ, η, ζ müssen kontinuirliche Funktionen sein, sondern ebenso $\frac{\partial \xi}{\partial z}$, $\frac{\partial \eta}{\partial z}$ und $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$, wenn man die xy-Ebene als Trennungsebene annimmt.

Diese Bedingungen wären nicht erfüllbar, wenn man nicht die Annahme machen würde, dass neben den wahrnehmbaren transver-

[1]) Nouveaux exercices de mathématiques, Comptes rendus, 1836 und 1839. Oeuvres complètes (1) **4**, besonders S. 112 ff.; (1) **5**, S. 111.

salen Schwingungen auch noch longitudinale Schwingungen auftreten, die nur durch das Experiment nicht nachgewiesen werden können. Wir dürfen also nicht voraussetzen, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Strahlen Null ist; sie kann aber auch nicht reell sein, da sonst ein Theil der lebendigen Kraft des einfallenden Lichtes durch diese longitudinalen Wellen absorbirt werden müsste, während doch der Versuch keine Spur eines solchen Verlustes an lebendiger Kraft zeigt.

Man wird also zu der Annahme geführt, dass diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit imaginär ist; sie sei z. B. $i\varepsilon$ im ersten und $i\varepsilon'$ im zweiten Medium. Die Grössen ε und ε' werden übrigens sehr klein sein. Auf diese Weise verschwinden die longitudinalen Wellen (§ 53) und absorbiren keine lebendige Kraft.

Sind nun ξ_1, η_1, ζ_1 die Verschiebungskomponenten der transversalen Schwingungen, ξ_2, η_2, ζ_2 diejenigen der longitudinalen Schwingungen, so erhält man

$$\xi = \xi_1 + \xi_2, \qquad \eta = \eta_1 + \eta_2, \qquad \zeta = \zeta_1 + \zeta_2.$$

Diese Bedingungen suchen wir wie früher (§ 210) dadurch zu erfüllen, dass wir setzen

$$\xi_1 = X_1 e^{i(ax+bt)}, \qquad \eta_1 = Y_1 e^{i(ax+bt)}, \qquad \zeta_1 = Z_1 e^{i(ax+bt)},$$

$$\xi_2 = X_2 e^{i(ax+bt)}, \qquad \eta_2 = Y_2 e^{i(ax+bt)}, \qquad \zeta_2 = Z_2 e^{i(ax+bt)},$$

wo die Grössen X, Y, Z nur Funktionen von z darstellen.

Im ersten Medium, d. h. für $z < 0$, finden wir

$$X_2 = A\, e^{+hz}, \qquad Y_2 = B\, e^{+hz}, \qquad Z_2 = C\, e^{+hz};$$

und im zweiten Medium, d. h. für $z > 0$

$$X_2 = A'\, e^{-h'z}, \qquad Y_2 = B'\, e^{-h'z}, \qquad Z_2 = C'\, e^{-h'z}.$$

Da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im ersten Medium $i\varepsilon$ ist, so erhält man

$$\frac{b^2}{a^2 - h^2} = -\varepsilon^2 \qquad \text{oder} \qquad h = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon^2}}\,.$$

Auf dieselbe Weise ergibt sich

$$h' = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon'^2}}\,.$$

Wenn also ε und ε' sehr klein sind, wird h und h' sehr gross. Demnach sind die Faktoren e^{hz} (im ersten Medium, wo $z < 0$) und $e^{-h'z}$ (im zweiten Medium, wo $z > 0$) sehr klein, wenn nicht die absoluten Werthe von z ebenfalls sehr klein sind. Das longitudinale Licht ist daher nur in der unmittelbaren Nachbarschaft der Trennungsebene merklich, so dass es sich der Beobachtung entzieht und keine lebendige Kraft absorbirt.

Die Bedingung dafür, dass die Schwingung (ξ_2, η_2, ζ_2) longitudinal ist, lautet

$$(2) \qquad \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} - \frac{\partial \eta_2}{\partial z} = \frac{\partial \xi_2}{\partial z} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} = \frac{\partial \eta_2}{\partial x} - \frac{\partial \xi_2}{\partial y} = 0.$$

Hieraus geht hervor, dass $\frac{\partial \zeta_2}{\partial y} - \frac{\partial \eta_2}{\partial z}$ kontinuirlich ist; dasselbe gilt für $\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}$, da nach dem Princip von Cauchy die Grössen ξ, η, ζ ebenso wie ihre Differentialquotienten erster Ordnung kontinuirlich sind. Also ist auch $\frac{\partial \zeta_1}{\partial y} - \frac{\partial \eta_1}{\partial z}$ sowie $\frac{\partial \xi_1}{\partial z} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \frac{\partial \xi_1}{\partial y}$ kontinuirlich. Wenn man somit nur das transversale, der Beobachtung zugängliche Licht betrachtet, so sind die früher mit u, v, w bezeichneten Grössen wie in der Fresnel'schen Theorie kontinuirliche Funktionen.

Die Bedingungen (2) können auch geschrieben werden

$$\frac{A}{a} = \frac{C}{-ih}, \qquad \frac{A'}{a} = \frac{C'}{+ih'}, \qquad B = B' = 0.$$

Hiernach ist $\eta_2 = 0$, und da η kontinuirlich ist, wird dies auch, wie in der Theorie von Fresnel, für η_1 der Fall sein.

Man erhält somit im ersten Medium

$$h^2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + a^2 \frac{\partial \zeta_2}{\partial z} = 0,$$

und im zweiten Medium

$$h'^2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + a^2 \frac{\partial \zeta_2}{\partial z} = 0,$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, im ersten Medium

$$(3) \qquad b^2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + a^2 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial z} \right) = 0,$$

und im zweiten Medium

$$(4)\qquad b^2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + a^2 \varepsilon'^2 \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial z}\right) = 0.$$

Da die Schwingung (ξ_1, η_1, ζ_1) transversal ist, erhält man für beide Medien

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} = 0 \quad (\eta_1 \text{ hängt nicht von } y \text{ ab});$$

und da $\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$ kontinuirlich ist, so muss dies auch für $\frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial z}$ der Fall sein.

Nennen wir also ξ_2^0 und ζ_2^0 die Werthe von ξ_2 und ζ_2 im ersten Medium unendlich nahe an der Trennungsfläche und ebenso ξ_2' und ζ_2' dieselben Werthe im zweiten Medium unendlich nahe an der Trennungsfläche, so erhalten wir

$$\frac{\partial \xi_2^0}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_2^0}{\partial z} = \frac{\partial \xi_2'}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_2'}{\partial z};$$

die Gleichungen (3) und (4) ergeben dann

$$(5)\qquad \frac{\partial \xi_2'}{\partial x} - \frac{\partial \xi_2^0}{\partial x} = \frac{a^2}{b^2}(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)\left(\frac{\partial \xi_2^0}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_2^0}{\partial z}\right).$$

Würde die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Schwingungen in allen Medien gleich gross sein, so wäre $\varepsilon = \varepsilon'$; die rechte Seite von Gleichung (5) würde dann Null werden und somit $\frac{\partial \xi_2}{\partial x}$ kontinuirlich sein. Hieraus würde folgen, dass $\frac{\partial \xi_1}{\partial x}$ und also auch ξ_1 kontinuirliche Funktionen sind, und es würde vollständige Uebereinstimmung mit der Fresnel'schen Theorie bestehen.

Indessen ist es natürlicher, anzunehmen, dass $\varepsilon \gtrless \varepsilon'$; da ε und ε' beide sehr klein sind, ist in diesem Fall die rechte Seite von (5) nicht mehr Null, sondern nur sehr klein, und die Uebereinstimmung mit der Fresnel'schen Theorie ist nur noch angenähert. Ausserdem müsste der reflektirte Strahl Spuren elliptischer Polarisation zeigen.

Die Theorie von Cauchy schien seiner Zeit eine sehr gute Bestätigung zu erfahren, als die Versuche von Jamin das Vorhandensein von Spuren elliptischer Polarisation zeigten, die Cauchy vorausgesehen hatte. Indessen besteht nach neuen Versuchen desselben Physikers keine Uebereinstimmung mehr mit diesen theoretischen Forderungen Cauchy's.

Sind nämlich $i\varepsilon$, $i\varepsilon'$, $i\varepsilon''$ die Geschwindigkeiten des longitudinalen Lichtes in Luft, in Wasser und in Glas, so würde sich aus den Beobachtungen Jamin's über die Brechung an Luft in Wasser das Verhältniss $\frac{\varepsilon}{\varepsilon''}$ ergeben; ebenso müsste man aus der Beobachtung der Brechung an Luft in Wasser und an Wasser in Glas die Verhältnisse $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ und $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$ finden.

Das erste Verhältniss müsste also gleich dem Produkt der beiden anderen sein, doch ist dem nicht so.

Auch die Theorie von Cauchy hat man deshalb heutzutage verlassen und zieht es vor, die von Jamin beobachteten Erscheinungen durch die Annahme zu erklären, dass die Dicke der Uebergangsschicht (§ 208) gegenüber der Wellenlänge nicht vernachlässigt werden darf.

Krystall-Reflexion.

Es gibt hauptsächlich zwei Theorien über die Krystall-Reflexion; die eine ist eine Erweiterung der Theorie von Neumann und Mac-Cullagh, die andere ist die Theorie von Sarrau, welche als eine Verallgemeinerung der Theorien von Cauchy und von Fresnel angesehen werden kann.

Theorie von Neumann und von Mac-Cullagh[1]).

217. Grund-Hypothesen. — Neumann und Mac-Cullagh machen dieselben Voraussetzungen, wie bei der Glas-Reflexion:

1. Die Schwingung erfolgt parallel zur Polarisationsebene.
2. Die Elasticität des Aethers ist veränderlich und seine Dichte konstant.
3. Das Princip der lebendigen Kraft ist gültig.
4. Die drei Verschiebungskomponenten ξ, η, ζ sind kontinuirliche Funktionen.

218. Gleichungen der Lichtbewegung. — Wir wollen zunächst auf die Gleichungen der Doppelbrechung, die auf beliebige Axen bezogen sind, zurückgehen (vgl. § 178).

Es seien X, Y, Z die drei Komponenten der Schwingung nach Sarrau; ξ, η, ζ dieselben Grössen nach Neumann und u, v, w diejenigen nach Fresnel, so erhält man:

---

[1]) Neumann, Sitzungsberichte der Berliner Akademie; 7. Dec. 1835. Mac-Cullagh, Transaction of the royal Academy of Ireland **18** und Journal de Liouville (1) **7** S. 217.

$$\xi = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \qquad u = \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}, \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial W_2}{\partial u},$$

$$\eta = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial W_2}{\partial v},$$

$$\zeta = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{\partial W_2}{\partial w},$$

$$2\,W_2 = a\,u^2 + b\,v^2 + c\,w^2 + 2\,e\,v\,w + 2\,f\,u\,w + 2\,g\,u\,v\,.$$

Berücksichtigt man die Ausdrücke für u und v, so gelten die Beziehungen

$$\frac{\partial W_2}{\partial u} = \frac{\partial W_2}{\partial \zeta_y'} = -\frac{\partial W_2}{\partial \eta_z'}, \qquad \frac{\partial W_2}{\partial \xi_x'} = \frac{\partial W_2}{\partial \eta_y'} = \frac{\partial W_2}{\partial \zeta_z'} = 0 \quad \text{etc.}$$

Hierdurch erhält man

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi_y'}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi_z'}\right),$$

oder

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi_x'}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi_y'}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi_z'}\right),$$

und zwei analoge Gleichungen für $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$ und $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$.

Wir wollen nun wieder auf die Hypothese der Uebergangsschicht zurückgehen, die wir früher (§ 208) auseinandergesetzt haben, und wollen zeigen, dass diese Hypothese mit derjenigen von Neumann gleichwerthig ist.

Bei der Theorie der Doppelbrechung betrachtet man die Koefficienten von W_2 als Konstanten; aber hier haben wir kein homogenes Medium mehr, so dass wir die Koefficienten a, b, c, e, f, g als veränderlich ansehen müssen.

Wir wollen stets annehmen, dass die beiden Medien durch eine äusserst dünne Uebergangsschicht getrennt sind; diese Schicht wird von zwei parallelen Ebenen begrenzt, nämlich von der Ebene xy und einer unendlich nahen Ebene. In jedem der beiden Medien behalten die Koefficienten von W_2 konstante Werthe; in der Uebergangsschicht dagegen verändern sie sich sehr rasch. Wenn eine der Ebenen, welche die Uebergangsschicht begrenzen, als xy-Ebene gewählt wird, so sind die Koefficienten nur Funktionen von z.

Man erhält dann z. B.

$$\frac{\partial W_2}{\partial \xi_z'} = g\,u + b\,v + e\,w\,,$$

und

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi_z'}\right) = g\frac{\partial u}{\partial z} + b\frac{\partial v}{\partial z} + e\frac{\partial w}{\partial z} + u\frac{\partial g}{\partial z} + v\frac{\partial b}{\partial z} + w\frac{\partial e}{\partial z}.$$

Diese Gleichungen sollen nun den Annahmen von Neumann und Mac-Cullagh entsprechen.

219. Dichte des Aethers. — Zunächst enthalten die obigen Gleichungen das Princip der lebendigen Kraft und die Konstanz der Aetherdichte. Wenn nämlich ϱ die Dichte des Aethers und $\int W_2\, d\tau$ die Kräftefunktion darstellt, so lautet, wie wir im 1. Kapitel gesehen haben, die Bewegungsgleichung

$$(2) \qquad \varrho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi_x'}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi_y'}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi_z'}\right).$$

Das Vorhandensein einer Kräftefunktion bedingt die Anwendbarkeit des Princip der lebendigen Kraft. Ausserdem muss man, um die Gleichungen (1) und (2) zu identificiren, $\varrho = 1$ annehmen, d. h. die Dichte des Aethers als konstant betrachten, was genau der Neumann'schen Theorie entspricht.

220. Princip der Kontinuität. — Ferner haben die oben aufgestellten Bewegungsgleichungen die Kontinuität von ξ, η, ζ zur Folge, welche Neumann als zweite Hypothese angenommen hatte. Nehmen wir nämlich an, dass man den Bewegungsgleichungen genügt, indem man, wie bei der Glasreflexion, setzt:

$$\begin{aligned}
X &= X_1 e^{i(\alpha x + \beta t)}, & \xi &= \xi_1 e^{i(\alpha x + \beta t)}, & u &= u_1 e^{i(\alpha x + \beta t)},\\
Y &= Y_1 e^{i(\alpha x + \beta t)}, & \eta &= \eta_1 e^{i(\alpha x + \beta t)}, & v &= v_1 e^{i(\alpha x + \beta t)},\\
Z &= Z_1 e^{i(\alpha x + \beta t)}, & \zeta &= \zeta_1 e^{i(\alpha x + \beta t)}, & w &= w_1 e^{i(\alpha x + \beta t)},
\end{aligned}$$

wo X_1, Y_1, Z_1; ξ_1, η_1, ζ_1; u_1, v_1, w_1 nur Funktionen von z sind, so erhalten wir aus den Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y}{\partial z} &= -\xi, & \frac{\partial X}{\partial z} &= \eta + i\alpha Z, & \zeta &= i\alpha Y,\\
\frac{\partial \eta}{\partial z} &= -u, & \frac{\partial \xi}{\partial z} &= v + i\alpha\zeta, & w &= i\alpha\eta.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen zeigen:

1. Dass die Differentialquotienten von ξ, η, X, Y endlich und dass diese vier Grössen demnach kontinuirlich sind;

2. dass ζ und w bis auf einen konstanten Faktor ia gleich Y und η sind, sodass also auch ζ und w ebenso wie Y und η kontinuirlich sein müssen.

Wir erhalten somit das Resultat:

1. die drei Schwingungskomponenten ξ, η, ζ nach Neumann sind kontinuirlich;

2. die beiden Schwingungskomponenten nach Sarrau, die der Trennungsfläche parallel sind, d. h. X und Y, sind ebenfalls kontinuirlich.

221. Experimentelle Bestätigungen. — Durch die Bedingung, dass X, Y, ξ, η, ζ kontinuirlich sein sollen, erhält man eine hinreichende Zahl von Gleichungen zur Bestimmung der reflektirten und gebrochenen Schwingungen nach Grösse und Richtung, wenn man die einfallende Schwingung kennt. Wir wollen aber hier nicht diese linearen Gleichungen aufstellen und wirklich auflösen; denn es handelt sich dabei nur um eine recht lange, aber keineswegs schwierige algebraische Rechnung. Vielmehr wollen wir uns auf die Angabe beschränken, dass die Folgerungen aus der Theorie durch das Experiment bestätigt worden sind.

Bei allen Versuchen war das erste Medium isotrop und das zweite krystallinisch; wir wollen auch in den folgenden Entwickelungen immer annehmen, dass dies der Fall sei. Eine Hauptschwierigkeit rührt daher, dass alle bekannten Substanzen sehr schwach doppelbrechend sind; hieraus folgt, dass die Polarisationsebene im Allgemeinen von derjenigen in einer isotropen Substanz nur wenig abweicht. Diese Schwierigkeit hat man dadurch umgangen, dass man als erstes Medium eine Flüssigkeit anwendete, deren Brechungsquotient sich nur wenig vom mittleren Brechungsquotient des Krystalls unterscheidet; unter diesen Bedingungen kann man sehr beträchtliche Ablenkungen der Polarisationsebene beobachten. Diese Ablenkungen scheinen mit den berechneten Werthen genügend übereinzustimmen.

Allerdings weisen gewisse Krystalle Anomalien auf; so tritt z. B. bei dem Diamant, der zum kubischen System gehört und sich demnach wie ein isotroper Körper verhalten müsste, eine starke elliptische Polarisation auf.

222. Uniradiale Brechung. — Wenn ein Lichtstrahl auf einen Krystall auffällt, so theilt er sich in einen reflektirten und zwei gebrochene Strahlen; die letzteren sind vollständig polarisirt. Nehmen wir nun an, dass der einfallende Lichtstrahl durch ein Nikol polarisirt ist, so verändern sich die Intensitäten der beiden gebrochenen Strahlen, wenn man dies Nikol dreht, und in einer Stellung desselben verschwindet der eine gebrochene Strahl, in einer anderen Stellung dagegen der zweite Strahl. Es findet dann, wie man sagt, uniradiale Brechung statt. Die Richtungen der einfallenden Schwingung, welche der Auslöschung eines gebrochenen Strahls entsprechen, werden die beiden uniradialen Richtungen genannt.

223. Theorem von Mac-Cullagh. — Das Theorem von Mac-Cullagh (§ 215) ist vermöge seiner Eleganz einer bedeutenden Verallgemeinerung fähig[1]); doch werden wir dieselbe nur anführen, ohne die Beweise dafür zu erbringen.

Zunächst wollen wir die Definition für die Polarebene einer der gebrochenen Schwingungen aufstellen. Wir betrachten zu diesem Zweck eine dieser Schwingungen und legen durch einen beliebigen Punkt O (Fig. 28) derselben eine Parallele ON zur Schwingungsrichtung von Neumann und eine Parallele OM zum Strahl; sodann konstruiren wir die Wellenfläche mit dem Mittelpunkt O, welche in M den Lichtstrahl schneidet In diesem Punkt M legen wir ferner eine Tangentialebene zur Wellenfläche und fällen von O eine Senkrechte OP auf diese Tangentialebene. Wir bezeichnen nun mit R den Weg, den das Licht im ersten Medium während der Zeit durchläuft, die im zweiten Medium eine von O ausgehende Erschütterung braucht, um nach M oder einem beliebigen anderen auf der Wellenebene liegenden Punkt zu gelangen.

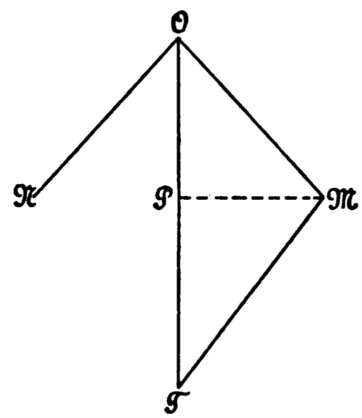

Fig. 28.

Auf der Verlängerung von OP wählen wir dann einen Punkt T in einer solchen Entfernung von O, dass

$$OT = \frac{R^2}{OP},$$

und ziehen die Linie MT; die durch ON zu MT parallel gelegte Ebene heisst dann die Polarebene des betrachteten gebrochenen Strahles.

Aus dieser Definition ergibt sich Folgendes: Wenn man die Richtung der Trennungsfläche ändert, indem man gleichzeitig dem einfallenden Strahl eine solche Richtung gibt, dass diejenige des gebrochenen Strahls unverändert bleibt, so ändert sich die Polar-

[1]) Mac-Cullagh, Journal de Liouville (1) **7**, 1842.

ebene auch nicht, vorausgesetzt, dass der Brechungskoefficient des ersten Mediums derselbe bleibt; die Richtung dieser Ebene hängt dagegen von dem Brechungskoefficient des ersten Medium ab.

Das Theorem von Mac Cullagh besteht nun im Folgenden:

In dem Fall der uniradialen Brechung erhält man die Verschiebung eines beliebigen Punktes des ersten Medium durch Zusammensetzung der Verschiebungen, die von der einfallenden und der reflektirten Schwingung herrühren; die Verschiebung eines Punktes des zweiten Medium reducirt sich auf die Verschiebung der allein auftretenden gebrochenen Schwingung, da nach unserer Annahme das Nikol so orientirt ist, dass die zweite gebrochene Schwingung ausgelöscht wird.

Wenn wir also in einem Punkt der Trennungsfläche drei Gerade ziehen, die nach Grösse und Richtung die gebrochene, die einfallende und die reflektirte Schwingung darstellen, so wird die erste die geometrische Summe der beiden anderen sein. Diese drei Geraden liegen also in einer Ebene.

Die Rechnung von Mac-Cullagh zeigt, dass diese Ebene mit der Polarebene der gebrochenen Schwingung identisch ist.

224. Wir wollen uns nun folgende Aufgabe stellen:

Wenn die einfallende Schwingung nach Grösse und Richtung gegeben ist, sollen die beiden gebrochenen und die reflektirte Schwingung konstruirt werden.

Die Huyghens'sche Konstruktion gestattet uns zunächst, wenn wir die Ebene der einfallenden Welle kennen, die Ebenen der reflektirten und der beiden gebrochenen Wellen zu finden; wir kennen dann ebenfalls den reflektirten und die beiden gebrochenen Strahlen.

Hieraus können wir die Richtungen der beiden gebrochenen Schwingungen OR' und OR'' (Fig. 29) ableiten, da nach der Neumann'schen Theorie die gebrochene Schwingung in der zum Strahl senkrechten Wellenebene liegen muss (§ 215).

Sodann konstruiren wir die Polarebenen der beiden gebrochenen Schwingungen; diese Polarebenen schneiden die Ebene der einfallenden Welle in den beiden uniradialen Richtungen.

Die gegebene einfallende Schwingung OI zerlegen wir in zwei Komponenten OI' und OI'', die den beiden uniradialen Richtungen parallel sind.

Die erste Polarebene, welche durch OR' und OI' geht, schneidet die reflektirte Welle in einer Geraden OS'. Wir ergänzen nun das Parallelogramm $OI'R'S'$, dessen eine Seite OI' ist und dessen andere Seite und Diagonale in die Richtung OR' und OS' fallen.

Dann stellt O R′ nicht allein der Richtung, sondern auch der Grösse nach die erste gebrochene Schwingung dar, und OS′ nach Grösse und Richtung den Betrag der reflektirten Schwingung, der entstehen würde, wenn sich die einfallende Schwingung auf O I′ reducirt.

In gleicher Weise konstruiren wir ein zweites Parallelogramm O I″ R″ S″, dessen eine Seite O I″ ist; die Diagonale O R″ desselben stellt nach Grösse und Richtung die zweite gebrochene Schwingung dar, die zweite Seite O S″ dagegen nach Grösse und Richtung den

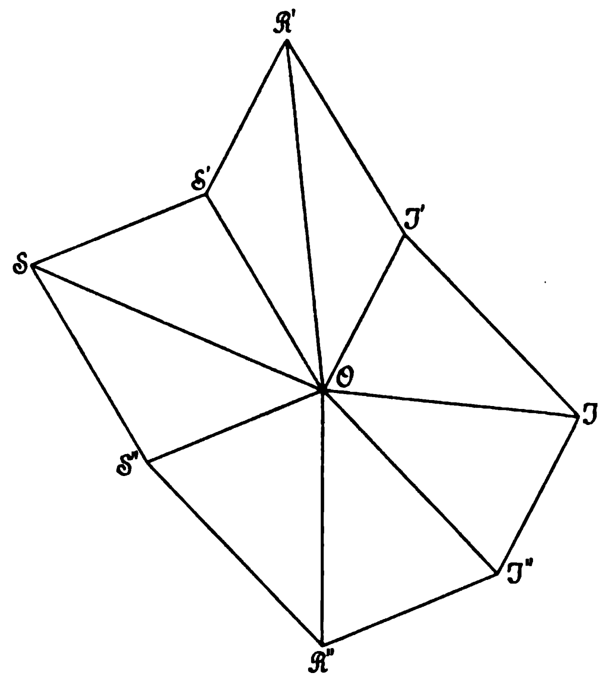

Fig. 29.

Theil der reflektirten Schwingung, der von der Komponente O I″ der einfallenden Welle herrührt.

Man braucht dann nur noch OS′ und OS″ geometrisch zusammenzusetzen, um die ganze reflektirte Schwingung OS zu erhalten.

225. Bemerkung. — Nach dem Vorstehenden ist leicht einzusehen, warum die Erscheinungen der Krystall-Reflexion um so mehr von denen der Glas-Reflexion abweichen, als der Brechungskoefficient des ersten Medium sich dem mittleren Koefficienten des Krystalls nähert. Der Unterschied zwischen den beiderlei Erscheinungen wird nämlich um so grösser sein, je mehr die oben definirte Polarebene von der Ebene NOP verschieden ist, d. h. je näher der

Winkel PTM gleich 90° ist. Da die bekannten Substanzen nur schwach doppelbrechend sind, so ist der Winkel POM und daher auch die Strecke PM klein. Damit nun der Winkel PTM nicht klein ist, muss PT klein sein. Nun besteht aber die Beziehung

$$PT = \frac{R^2}{OP} - OP;$$

es muss also OP sehr nahe gleich R sein. Da aber $\frac{OP}{R}$ das Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der gebrochenen zur einfallenden Welle darstellt, so müssen also diese beiden Geschwindigkeiten sehr nahe gleich sein. Hieraus folgt, dass die mittleren Brechungsquotienten der beiden Medien sich nur wenig unterscheiden dürfen.

Theorie von Sarrau[1]).

226. Sarrau setzt voraus:

1. dass die wirkliche Schwingung die Grössen zu Komponenten hat, die wir früher mit X, Y, Z bezeichneten.

2. Ausserdem nimmt er die Hauptprincipien der von Cauchy aufgestellten Reflexionstheorie an, nach der die drei Verschiebungskomponenten ebenso wie ihre Differentialquotienten erster Ordnung kontinuirlich sein würden, allerdings unter der Bedingung, dass neben den transversalen Strahlen, welche der Beobachtung zugänglich sind, auch die nicht wahrnehmbaren longitudinalen Wellen berücksichtigt werden.

Wir haben früher (§ 216) die Folgerungen der Principien von Cauchy näher in's Auge gefasst. Wenn ξ_1, η_1, ζ_1 die drei Verschiebungskomponenten des transversalen Lichtes bedeuten (wobei die xz-Ebene als Einfallsebene und die xy-Ebene als Trennungsebene gewählt wird), so sind die Grössen

$$\eta_1, \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} - \frac{\partial \eta_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial z} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \frac{\partial \xi_1}{\partial y}$$

kontinuirliche Funktionen. Auch ξ_1 ist eine solche Funktion, wenn die imaginäre Geschwindigkeit der longitudinalen Wellen in allen Medien dieselbe ist; aber selbst wenn diese Bedingung nicht erfüllt wird, bleibt ξ_1 wenigstens noch angenähert kontinuirlich.

Die drei Komponenten der wirklichen Schwingung sind hier X, Y, Z, so dass also X, Y und

---

[1]) Journal de Liouville (2) **13.**

$$\xi = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \qquad \eta = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \qquad \zeta = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$$

kontinuirlich sind. Dies sind aber genau dieselben Resultate, zu denen die Theorie von Neumann und von Mac Cullagh geführt hatte; es besteht somit eine vollkommene Uebereinstimmung zwischen beiden Theorien.

Bei den anisotropen Medien ist es von Wichtigkeit, genau zu bestimmen, was man unter dem longitudinalen Strahl zu verstehen hat; die longitudinalen Schwingungen fallen hier nicht in die Richtung des Strahls, sondern sie stehen senkrecht zur Wellenebene.

Die Theorie von Sarrau würde zu demselben Resultat führen, wenn man, anstatt von den Annahmen Cauchy's auszugehen, das Vorhandensein einer Uebergangsschicht und eine kontinuirliche Aenderung der Koefficienten des mit W_2 bezeichneten Polynoms vorausgesetzt hätte.

Vereinigt man die Theorie der Doppelbrechung von Fresnel (§ 149) mit den Principien der Reflexions-Theorie von Cauchy, so gelangt man dagegen zu Resultaten, die mit den Beobachtungen unvereinbar sind.

Anders verhält es sich aber, wenn man annimmt, dass die wahre Schwingung diejenige von Fresnel sei, und dass eine Uebergangsschicht vorhanden ist; die Resultate, zu denen man auf diese Weise geführt wird, unterscheiden sich nicht von denen, die man aus den beiden anderen Theorien ableiten kann.

Durch die Annahme einer Uebergangsschicht kann man aus den Erscheinungen der Krystall-Reflexion keinen Schluss über die Richtigkeit einer der drei Theorien ziehen, welche über die Doppelbrechung aufgestellt worden sind; die Gleichungen des § 218 behalten nämlich immer dieselbe Form, unabhängig davon, welche von den drei Theorien angenommen wird; nur die physikalische Deutung ist verschieden. Bei Fresnel stellen die Grössen X, Y, Z, bei Neumann ξ, η, ζ und bei Fresnel u, v, w die Komponenten der wahren Schwingung dar, aber die analytische Form der Gleichungen und folglich auch die Erscheinungen, welche der Beobachtung zugänglich sind, bleiben in allen drei Fällen dieselben.

Metall-Reflexion.

227. Fortpflanzung des Lichtes in einem absorbirenden Medium. — Die undurchsichtigen Medien, wie z. B. die Metalle, dürfen nicht als absolut undurchlässig für das Licht betrachtet werden, da dünne Blättchen eine gewisse Durchsichtigkeit besitzen; man muss vielmehr annehmen, dass sie ein sehr grosses Absorptionsvermögen besitzen.

Wir wollen nun sehen, in welcher Weise man die Fortpflanzung des Lichtes in einem derartigen Medium zu verstehen hat.

Die drei Verschiebungskomponenten werden die reellen Theile von Funktionen der Form

$$\xi = A\, e^{iP}, \qquad \eta = B\, e^{iP}, \qquad \zeta = C\, e^{iP},$$

sein, wo

$$P = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z - V t).$$

Die Grössen A, B, C, welche der Amplitude der Schwingung proportional sind, müssen in dem Maasse, als der Strahl sich fortpflanzt, sehr rasch abnehmen. Die natürlichste Annahme wird sein, dass A, B, C die Form

$$A = A_0\, e^{-Q}, \qquad B = B_0\, e^{-Q}, \qquad C = C_0\, e^{-Q}$$

besitzen, wobei

$$Q = l x + m y + n z,$$

und A_0, B_0, C_0, l, m, n Konstanten sind.

Wie man sieht, hat man bei der Fortpflanzung einer ebenen Welle in einem absorbirenden Medium zwei Ebenen zu betrachten, die eine wichtige Rolle spielen; nämlich die Wellenebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

und die Absorptionsebene

$$l x + m y + n z = 0.$$

Die Ausdrücke für ξ, η, ζ kann man noch schreiben

$$\xi = A_0\, e^{iP'}, \qquad \eta = B_0\, e^{iP'}, \qquad \zeta = C_0\, e^{iP'}$$

wenn man setzt

$$P' = \left[\left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha - i l\right) x + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\beta - i m\right) y + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\gamma - i n\right) z - \frac{2\pi}{\lambda} V t\right].$$

Es geht also alles so vor sich, wie wenn die Wellenebene die Gleichung hätte

$$P'' = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha - i\,l\right)x + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\beta - i\,m\right)y + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\gamma - i\,n\right)z = 0,$$

und wie wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit die Form hätte

$$V' = \frac{V}{\sqrt{\left(\alpha - \frac{i\,l\,\lambda}{2\pi}\right)^2 + \left(\beta - \frac{i\,m\,\lambda}{2\pi}\right)^2 + \left(\gamma - \frac{i\,n\,\lambda}{2\pi}\right)^2}}.$$

Wir wollen die Ebene $P'' = 0$ die komplexe Wellenebene und die Geschwindigkeit V' die komplexe Geschwindigkeit der Welle nennen.

Damit der Strahl in dem Maasse, als er sich fortpflanzt, immer schwächer wird, ist es nöthig und hinreichend, dass die Normale zur Wellenebene, die in Richtung der Fortpflanzung des Strahls fällt, und die Normale zur Absorptionsebene in Richtung der Auslöschung des Lichtes einen spitzen Winkel bilden. Diese Bedingung wird ausgedrückt durch

$$\alpha\,l + \beta\,m + \gamma\,n > 0.$$

Der imaginäre Theil von $\frac{1}{V'^2}$ ist nun gleich

$$-\frac{\lambda}{\pi V^2}(\alpha\,l + \beta\,m + \gamma\,n);$$

dieser Theil muss also negativ sein.

Ein absorbirendes Medium verhält sich demnach so, wie wenn sein Brechungskoefficient komplex wäre. Dieser Koefficient sei

$$m(\cos\chi - i\sin\chi).$$

Da der Brechungskoefficient umgekehrt proportional der Geschwindigkeit ist, d. h. hier proportional $\frac{1}{V'}$, und da der imaginäre Theil des Quadrates von $\frac{1}{V'}$ negativ sein muss, so wird der Winkel χ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen.

228. Nach diesen Voraussetzungen wollen wir uns folgende Aufgabe stellen:

Ein Lichtstrahl falle unter einem Einfallswinkel φ auf eine Metallfläche; es soll dann die Richtung der komplexen Wellenebene, der Wellenebene, der Absorptionsebene und der Absorptionskoefficient bestimmt werden.

Die Absorptionsebene kann nur die Trennungsebene der Medien sein, die wir als xy-Ebene wählen; die Einfallsebene nehmen wir zur xz-Ebene.

Es sei r' der Winkel der komplexen Wellenebene mit der xy-Ebene, d. h. der komplexe Brechungswinkel, ferner r der Winkel der reellen Wellenebene mit der xy-Ebene, d. h. der reelle Brechungswinkel.

Die komplexe Wellenebene muss die Gleichung haben

$$x \sin r' + z \cos r' = 0$$

wo:

$$\sin r' = \frac{\sin \varphi}{m} (\cos \chi + i \sin \chi). \tag{1}$$

Andererseits ist

$$P = \frac{2\pi}{\lambda} (x \sin r + z \cos r - V t),$$

und

$$Q = \varkappa z,$$

wenn $\varkappa$ den Absorptionskoefficient bedeutet.

Die Gleichung der komplexen Wellenebene lautet dann

$$x \frac{2\pi}{\lambda} \sin r + z \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cos r - i \varkappa\right) = 0;$$

es ist also

$$\operatorname{tang} r' = \frac{\frac{2\pi}{\lambda} \sin r}{\frac{2\pi}{\lambda} \cos r - i \varkappa}.$$

Aus Gleichung (1) ergibt sich leicht $\cot r'$ in der Form

$$\cot r' = A - i B;$$

man hat dann

$$\cot r = A, \qquad \varkappa = \frac{2\pi B \sin r}{\lambda};$$

hierdurch ist der reelle Brechungswinkel und der Absorptionskoefficient bestimmt.

229. Bewegungsgleichungen des Lichtes in einem absorbirenden Medium. — Man hat verschiedene Formen für die Bewegungsgleichungen in einem absorbirenden Medium vorgeschlagen. Eine der allgemeinsten ist diejenige von Voigt[1]), welche lautet:

[1]) Göttinger Nachrichten 1884, S. 137 ff.

$$(2) \qquad \varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \Delta \xi + a \xi + b \frac{\partial \xi}{\partial t} + c \frac{\partial \Delta \xi}{\partial t} + e \frac{\partial^2 \Delta \xi}{\partial t^2},$$

und zwei analoge Gleichungen für η und ζ, zu denen man noch die Bedingung für die Transversalität, $\theta = 0$, hinzufügen muss.

Die elektromagnetische Lichttheorie hat **Maxwell** zu einer Gleichung von derselben Form geführt, bei der aber die Koefficienten a, c und e Null sind.

Diese Gleichungen oder andere analoge können über die Fortpflanzung des Lichtes in den wenig absorbirenden Medien, die ein Linien- oder Bandenspektrum erzeugen, offenbar keinen Aufschluss geben; so viel partielle Differentialquotienten von ξ man auch einführen mag, man wird doch niemals der grossartigen Mannigfaltigkeit dieser Spektra Genüge thun können. Dagegen scheinen diese Gleichungen die optischen Erscheinungen, welche die Metalle zeigen, hinreichend gut zu erklären.

Wir suchen die Gleichung (2) zu erfüllen durch

$$\xi = \mathrm{A}\, e^{\frac{2 i \pi}{\mathrm{V}' \tau} (\alpha' x + \beta' y + \gamma' z - \mathrm{V}' t)}.$$

Der reelle Theil dieser Exponentialgrösse wird dann der wahre Werth von ξ sein; τ ist die Periode der Schwingung, V' die komplexe Fortpflanzungsgeschwindigkeit, α', β', γ' die Richtungskosinus der komplexen Wellenebene, so dass man hat

$$(3) \qquad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1.$$

Setzt man diesen Werth von ξ in (2) ein, so findet man unter Berücksichtigung von (3)

$$(4) \qquad \mathrm{V}'^2 \left(a - \frac{2 i \pi b}{\tau} + \frac{4 \pi^2 \varrho}{\tau^2} \right) = \frac{4 \pi^2}{\tau^2} \left(1 + \frac{2 i \pi c}{\tau} + \frac{4 \pi^2 e}{\tau^2} \right).$$

Diese Gleichung zeigt, dass die komplexe Geschwindigkeit V' von τ und demnach von der Wellenlänge abhängt, dagegen nicht von der Richtung der Wellenebene.

Der komplexe Brechungskoefficient $\frac{\sin r'}{\sin \varphi}$ ist daher eine Konstante, die von der Farbe abhängt, aber nicht von dem Einfallswinkel. Dies würde bei dem reellen Brechungswinkel $\frac{\sin r}{\sin \varphi}$ nicht der Fall sein.

230. Theorie von Cauchy[1]. — Cauchy nimmt an, dass die Hypothesen, auf denen die Theorie der Glasreflexion beruht, auch noch auf die Metallreflexion angewendet werden können.

Aus diesen Hypothesen folgt, wie wir sahen, dass die Funktionen

$$\xi, \quad \eta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

kontinuirlich sind, wenn man die Trennungsebene zur xy-Ebene wählt.

Wir haben gefunden, dass in einem metallischen Medium die Bewegungsgleichungen dieselben sind, wie wenn der Brechungskoefficient komplex wäre. Andererseits sind nach den Vorstellungen von Cauchy die Grenzbedingungen dieselben, wie in dem Fall der Glasreflexion. Man braucht also die Rechnungen nicht wieder aufzunehmen, da die Formeln der Glasreflexion anwendbar bleiben; es genügt, in denselben den Brechungskoefficienten durch seinen komplexen Werth zu ersetzen.

Bekanntlich führt bei der Glasreflexion die Theorie von Cauchy und diejenige von Fresnel zu denselben Resultaten. Fresnel zeigt, dass das Verhältniss der reflektirten zur einfallenden Schwingung gleich

$$\frac{\sin(r - \varphi)}{\sin(r + \varphi)}$$

ist, wenn das Licht in der Einfallsebene polarisirt ist, und gleich

$$\frac{\operatorname{tang}(\varphi - r)}{\operatorname{tang}(\varphi + r)},$$

wenn das Licht senkrecht zu dieser Ebene polarisirt ist.

Die Winkel φ und r sind der Einfalls- und der Brechungswinkel. Bezeichnet man mit N den Brechungskoefficienten, so sind diese beiden Verhältnisse gleich

$$A = \frac{\cos\varphi - \sqrt{N^2 - \sin^2\varphi}}{\cos\varphi + \sqrt{N^2 - \sin^2\varphi}} \quad \text{und} \quad A' = \frac{N^2\cos\varphi - \sqrt{N^2 - \sin^2\varphi}}{N^2\cos\varphi + \sqrt{N^2 - \sin^2\varphi}}.$$

Diese Formeln lassen sich leicht aus den früher (§ 203) mitgetheilten ableiten.

Wenn α, β, γ die Richtungskosinus der reflektirten Welle, λ die Wellenlänge und V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im

[1]) Nouveaux exercices de mathématiques, Journal de Liouville (1) 7, S. 338.

ersten Medium bedeutet, so wird die Verschiebung, die von der reflektirten Welle herrührt, der reelle Theil von

$$A\,e^{i\,P} \qquad \text{oder} \qquad A'\,e^{i\,P}$$

sein, wobei

$$P = \frac{2\,i\,\pi}{\lambda}\,(\alpha\,x + \beta\,y + \gamma\,z - V\,t)$$

ist. Geht man zur Metallreflexion über, so muss man der Grösse N einen komplexen Werth geben; A und A' sind dann imaginär und man hat

$$A = A_0\,e^{i\,\psi}, \qquad A' = A'_0\,e^{i\,\psi'}.$$

Die Verschiebung für das reflektirte Licht wird dann

$$A_0 \cos\,(P + \psi)\,,$$

wenn die Polarisationsebene mit der Einfallsebene zusammenfällt, und

$$A_0' \cos\,(P + \psi')\,,$$

wenn dieselbe senkrecht dazu steht.

Es findet also elliptische Polarisation statt, und die Phasendifferenz der beiden Komponenten des reflektirten Strahls wird gleich $\psi - \psi'$.

Der Versuch bestätigt die Formeln von Cauchy hinreichend gut.

Kapitel VIII.

Astronomische Aberration.

231. Bei den bisherigen Betrachtungen der verschiedenen optischen Erscheinungen haben wir immer vorausgesetzt, dass die Schwingungsbewegung, auf der das Licht beruht, in einem besonderen Fluidum, dem Aether, stattfindet, das in allen durchsichtigen materiellen Medien ebenso, wie in dem Weltenraum ausgebreitet ist. Es ist schlechterdings unmöglich, die Fortpflanzung des Lichtes von der Sonne zur Erde zu begreifen, ohne dass man das Vorhandensein eines elastischen Medium annimmt; dagegen erscheint es überflüssig und vielleicht sogar unphilosophisch, das Vorhandensein des Aethers in den materiellen Medien vorauszusetzen. Indessen scheint die Thatsache der astronomischen Aberration, welche die relative Bewegung des Aethers und des von ihm durchsetzten ponderablen Medium klar beweist, der Zurückweisung dieser Hypothese entschieden entgegenzustehen; oder man würde wenigstens, wenn man diese Hypothese verlassen wollte, bei der Erklärung der astronomischen Aberration so bedeutenden Schwierigkeiten begegnen, dass es vorzuziehen ist, sie aufrecht zu erhalten. Wir wollen nun einige Worte über die Erscheinung selbst sagen.

Wenn man einen Stern durch ein Fernrohr betrachtet, so befindet sich bekanntlich der Stern nicht auf der Geraden, welche das optische Centrum des Objektivs mit dem Schnittpunkt des Fadenkreuzes verbindet, d. h. nicht auf der optischen Axe des Instruments: wir sehen also den Stern nicht in seiner wahren Richtung. Der Winkel, den diese Richtung mit der optischen Axe des Fernrohrs bildet, heisst die Aberration; derselbe kann bis zu 20″ erreichen.

232. Erklärung von Bradley. — Die erste Erklärung der Aberrationserscheinung rührt von Bradley her; dieselbe gründet sich übrigens auf die zur damaligen Zeit angenommene Emissionstheorie. Es sei OA (Fig. 30) eine Gerade, die nach Grösse und Richtung die

Geschwindigkeit darstellt, mit der die vom Stern ausgehenden Lichtpartikelchen behaftet sind; der auf der Erdoberfläche befindliche Beobachter, der an der Bewegung derselben Theil nimmt, kann nur die relative Geschwindigkeit der Partikelchen wahrnehmen.

Diese Geschwindigkeit erhält man durch Zusammensetzen der wirklichen Geschwindigkeit OA und der Geschwindigkeit OB, die gleich, aber entgegengesetzt gerichtet derjenigen Geschwindigkeit ist, mit welcher der Beobachter sich fortbewegt; diese relative Geschwindigkeit ist also OC. Der Beobachter wird den Stern in der Richtung CO anstatt in der Richtung AO sehen; die Aberration ist also gleich dem Winkel φ. Dieser Winkel erreicht offenbar ein Maximum, wenn das Parallelogramm OACB rechtwinklig wird; in diesem Fall erhält man

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{OB}{OA}.$$

Die Lichtgeschwindigkeit OA beträgt nun ungefähr 300000 km in der Sekunde und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines Punktes der Erdoberfläche 30 km, so dass man angenähert findet

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{30}{300000} = \frac{1}{10000}.$$

Der Winkel φ, welcher diesem Werth entspricht, beträgt, wie gesagt, ungefähr 20″.

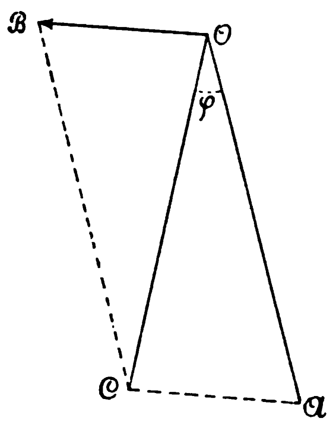

Fig. 30.

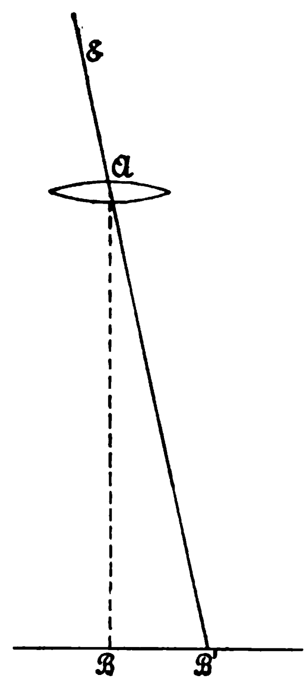

Fig. 31.

238. Elementare Erklärung nach der Undulationstheorie. — Auch mit Hülfe der Undulationstheorie ist die elementare Erklärung der Erscheinung einfach. Es sei A (Fig. 31) der optische Mittelpunkt eines Fernrohrobjektivs, B der Fadenkreuz-Schnittpunkt und AE die

Richtung eines von einem Sterne E kommenden Lichtstrahls. Wenn die Erde unbeweglich wäre, würden die drei Punkte E, A, B auf einer Geraden liegen; in Folge der Erdbewegung ist aber der Punkt B in der Zeit, welche der Lichtstrahl zum Durchlaufen des Weges AB′ braucht, nach B′ gelangt. Der Lichtstrahl, der das Auge des Beobachters trifft, hat also die wirkliche Richtung EAB′, während seine scheinbare Richtung mit der optischen Axe zusammenfällt, d. h. mit einer durch B′ gelegten Parallelen zu BA; die Aberration ist somit der Winkel $BAB' = \varphi$. Bezeichnen wir mit V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Lichtwellen in dem unbewegten Aether und mit v die Geschwindigkeit eines Punktes der Erdoberfläche parallel zu BB′, so erhalten wir

$$\sin \varphi = \frac{BB'}{AB'} = \frac{v\,t}{V\,t} = \frac{v}{V}.$$

Da der Winkel φ sehr klein ist, kann man den Werth desselben mit seiner Tangente oder seinem Sinus vertauschen; demnach finden wir für das Maximum von φ denselben Werth, wie bei der Erklärung von Bradley.

Diese Ueberlegung setzt voraus, dass der in dem Fernrohr enthaltene Aether im Raum unbeweglich ist, dass er also nicht an der Erdbewegung theilnimmt. Wenn nämlich ein elastisches Medium sich verschiebt, so nehmen die von ihm fortgeleiteten Schwingungen an dieser Bewegung Theil. So hängt bekanntlich die Schallgeschwindigkeit in bewegter Luft von der Geschwindigkeit der Luft ab, und der Einfluss des Windes auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles ist ein deutlicher Beweis für diese Thatsache. Wenn demnach der in dem Fernrohr enthaltene Aether sich mit diesem bewegen würde, so wäre die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in dem Fernrohr die Resultante der Geschwindigkeit V und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit v des elastischen Medium. Da aber andererseits der Beobachter an der Erdbewegung theilnimmt, so wäre die relative Lichtgeschwindigkeit für ihn die Resultante aus V′ und $-v$, d. h. V. Die beobachteten Erscheinungen würden also dieselben sein, wie wenn der Beobachter und der Aether unbewegt wären; demnach würde im Widerspruch mit dem Versuch keine Aberration auftreten.

234. Der in einem bewegten Medium enthaltene Aether wird theilweise mitgenommen. — Ist nun aber der Aether thatsächlich unbeweglich, wenn er ein stärker brechendes Medium als Luft durchsetzt? Ein Versuch auf der Greenwicher Sternwarte gibt hierauf die Antwort, dass der Aether theilweise mitgenommen wird, und dass die Geschwindigkeit dieser Bewegung von dem Brechungskoefficienten der betreffenden Substanz abhängt, durch welche das Licht hindurchgeht. Auch in der Luft müsste eine partielle Mitnahme des Aethers stattfinden, die allerdings sehr gering ist, da die Luft nur schwach bricht; damit wir aber die vorige Erklärung in aller Strenge anwenden können, müssen wir voraussetzen, dass das Fernrohr luftleer ist.

Der Versuch auf der Greenwicher Sternwarte bestand darin, dass man einen Stern mit einem luftgefüllten Fernrohr anvisirte und sodann dieses Fernrohr mit Wasser füllte; es wurde dabei festgestellt, dass in beiden Fällen die scheinbare Lage des Sterns dieselbe bleibt. Wir wollen diesen Versuch analysiren und die Folgerungen desselben aufsuchen.

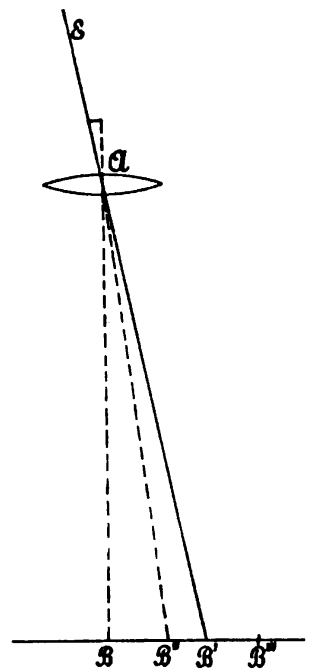

Fig. 32.

Es sei EAB′ (Fig. 32) die Fortpflanzungsrichtung des Lichtes in dem als luftleer angenommenen Fernrohr nach der Hypothese, dass der Aether nicht an der Bewegung der Erde theilnimmt. Wenn wir annehmen, dass dasselbe auch bei dem in Wasser enthaltenen Aether stattfindet, so würde der Strahl EA, der schief in dieses Medium eintritt, in der Richtung AB″ gebrochen, die näher an der Normalen liegt; das Bild des Sternes würde also in B″ entstehen. Da sich nun das Licht in dem Wasser langsamer als in dem leeren Raum fortpflanzt, so wird sich der Schnittpunkt B des Fadenkreuzes in Folge der Erdbewegung in einem Punkt B‴ rechts von B′ befinden, wenn die Lichtschwingungen in die Ebene des Fadenkreuzes gelangt sind. Da die Punkte B″ und B‴ links und rechts von B′ liegen, so können sie nicht zusammenfallen, und das Bild des Sternes würde sich folglich nicht mehr im Schnittpunkte des Fadenkreuzes befinden. Um also mit dem Experiment im Einklang zu bleiben, müssen wir annehmen, dass der Aether, in dem sich das Licht fortpflanzt, im Wasser durch die Erdbewegung wenigstens theilweise mitgenommen wird.

Wir wollen nun die Geschwindigkeit bestimmen, mit welcher der Aether mitgenommen wird. Bezeichnet man mit i und r den Einfalls- und den Brechungswinkel des Lichtes, wenn dasselbe durch das mit Wasser gefüllte Fernrohr hindurchgeht, so ist

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n.$$

Da die Winkel i und r sehr klein sind, so können die Sinus mit den Tangenten vertauscht werden, und die vorstehende Beziehung wird

$$n = \frac{\operatorname{tang} i}{\operatorname{tang} r} = \frac{\operatorname{tang} \mathrm{BAB}'}{\operatorname{tang} \mathrm{BAB}''} = \frac{\mathrm{BB}'}{\mathrm{BB}''}.$$

Hieraus folgt

$$\mathrm{BB}'' = \frac{1}{n} \mathrm{BB}'. \tag{1}$$

Nennen wir andererseits V′ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Wasser und v die Geschwindigkeit der Mitnahme desselben im Fernrohr, und drücken wir die Thatsache aus, dass das Licht in B‴ ankommt, wenn B dahin gelangt, so erhalten wir

$$\mathrm{AB}''' = \mathrm{V}' t', \qquad \mathrm{BB}''' = v t',$$

woraus folgt

$$\frac{\mathrm{AB}'''}{\mathrm{BB}'''} = \frac{\mathrm{V}'}{v}.$$

Auf dieselbe Weise findet man

$$\frac{\mathrm{AB}'}{\mathrm{BB}'} = \frac{\mathrm{V}}{v}.$$

Wenn wir die wenig verschiedenen Längen AB′ und AB‴ als gleich ansehen und die vorigen beiden Gleichungen durch einander dividiren, so erhalten wir

$$\mathrm{BB}''' = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V}'} \mathrm{BB}',$$

oder, da der Brechungskoefficient gleich dem Verhältniss der Geschwindigkeiten ist,

$$\mathrm{BB}''' = n\, \mathrm{BB}'. \tag{2}$$

Damit die Schwingungen des in dem Wasser enthaltenen Aethers zu derselben Zeit in B‴ ankommen, wie der Schnittpunkt des Fadenkreuzes, muss die Mitnahmegeschwindigkeit des Aethers derart sein, dass der Punkt B″ die Strecke B″B‴ während der Zeit durchlaufen hat, die das Licht braucht, um von A nach B‴ zu gelangen. Die Gleichungen (1) und (2) geben uns für den Werth von B″B‴

$$\mathrm{B}''\mathrm{B}''' = \mathrm{BB}''' - \mathrm{BB}'' = \left(n - \frac{1}{n}\right) \mathrm{BB}' = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \mathrm{BB}''';$$

da aber $B B''' = v t'$ ist, so erhalten wir

$$B'' B''' = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v t'.$$

Die Mitnahmegeschwindigkeit des Aethers hat also den Werth $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v$.

235. Fizeau stellte Versuche zu dem Zwecke an, die Mitnahme des Aethers durch ein materielles bewegtes Medium zu beweisen. Bei diesen Versuchen gehen zwei von derselben Lichtquelle kommende Strahlen durch zwei parallele, mit Wasser gefüllte Röhren, die ungefähr 1,50 m lang sind; an den Enden derselben entstehen Interferenzstreifen, die man mit einem Mikrometerokular beobachtet. Lässt man nun das Wasser in beiden Röhren in entgegengesetzter Richtung strömen, so tritt eine Verschiebung der Streifen ein. Diese Verschiebung betrug bei einer Geschwindigkeit des Wassers in den Röhren von 7 m 2,4 Mikrometertheile, oder fast eine halbe Streifenbreite, da einer ganzen Streifenbreite 5 Mikrometertheile entsprechen. Die Berechnung nach der Hypothese, nach welcher die Mitnahmegeschwindigkeit des Aethers durch den Ausdruck $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v$ gegeben ist, führt für die Verschiebung zu einem Werth, der dem obigen sehr nahe kommt. Ausserdem fand die Verschiebung nach rechts oder nach links statt, je nachdem das Wasser sich im einen oder anderen Sinne bewegte.

Die Streifenverschiebung musste wohl von dieser Bewegung herrühren, denn dadurch, dass man die beiden Lichtstrahlen vor dem Interferiren derselben mit Hülfe von Spiegeln durch beide Röhren hindurchgehen liess, konnte man die Gangunterschiede vermeiden, die von ungleichen Aenderungen der Temperatur und des Druckes in den Röhren hätten herrühren können.

Als man dieselben Versuche in der Weise wiederholte, dass man das Wasser durch Luft ersetzte, erhielt man ein negatives Resultat; auch die Rechnung führt zu einer unmerklichen Streifenverschiebung selbst für beträchtliche Werthe der Luftgeschwindigkeit.

Kürzlich nahmen zwei amerikanische Physiker, Michelson und Morley, die Versuche von Fizeau mit einem Apparat von grossen Dimensionen wieder auf[1]). Das Wasser strömte hierbei in Röhren von 6 m Länge unter einem Druck von 23 m Wasserhöhe. Die Verschiebung des mittleren Streifens betrug fast eine ganze

[1]) American Journal of Science, 31. Mai 1886.

(0,899) Streifenbreite. Wurde statt des Wassers Luft mit einer Geschwindigkeit von 25 m in der Sekunde angewendet, so war die Streifenverschiebung unmerklich. Die Versuche von Fizeau werden also dadurch vollständig bestätigt.

236. Lichtgeschwindigkeit in einem bewegten Medium. — Wir haben zwei Arten von Lichtgeschwindigkeiten zu betrachten, deren eine auf Axen bezogen ist, die im Raume fest sind, während die andere sich auf bewegliche Axen bezieht, die mit dem bewegten Medium unveränderlich fest verbunden sind.

Um die Geschwindigkeit in Bezug auf feste Axen zu erhalten, müssen wir die absolute Geschwindigkeit mit der Mitnahmegeschwindigkeit $\left(1-\frac{1}{n^2}\right) v$ des Aethers zusammensetzen. Wenn φ den Winkel dieser beiden, durch AB und BC (Fig. 33) dargestellten Geschwindigkeiten bezeichnet, so wird die gesuchte Geschwindigkeit

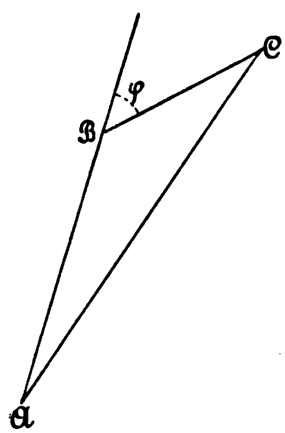

Fig. 33.

$$AC = V' \cos A + \left(1-\frac{1}{n^2}\right) v \cos C.$$

Da der Winkel A sehr klein ist, können wir seinen Kosinus Eins setzen; dadurch vernachlässigen wir die Grössen zweiten Grades der Aberration. Hierzu sind wir berechtigt, denn die Aberration beträgt im Maximum 20″ oder $\frac{1}{10000}$, das Quadrat davon ist der $^1/_{10000}$te Theil von 20″, oder $^1/_{500}$ Sekunde. Wir erhalten somit

$$AC = V' + v\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\cos\varphi.$$

Betrachten wir jetzt Axen, die mit dem bewegten Medium verbunden sind, so müssen wir in dem vorhergehenden Ausdruck die absolute Mitnahmegeschwindigkeit $v\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ ersetzen durch die relative Geschwindigkeit

$$v\left(1-\frac{1}{n^2}\right) - v = -\frac{v}{n^2} = -v'.$$

Demnach erhalten wir für die Lichtgeschwindigkeit in Bezug auf diese Axen

$$V' - v' \cos\varphi.$$

237. Zeit, welche das Licht gebraucht, um von einem Punkt eines bewegten Medium zu einem anderen zu gelangen. — Wir wollen einen Lichtstrahl betrachten, der von einem Punkt A_0 zu einem Punkt A_n eines bewegten Medium auf der gebrochenen Linie A_0, $A_1 \ldots A_n$ gelangt (Fig. 34). Für den Weg von A_1 nach A_2 wird der Strahl eine Zeit $\frac{A_1 A_2}{V' - v' \cos\varphi}$ brauchen. Durch Entwicklung dieser Grösse nach wachsenden Potenzen von v' und unter Vernachlässigung der höheren Potenzen erhalten wir

$$\frac{A_1 A_2}{V'} + \frac{A_1 A_2 \cos\varphi}{V'^2} v'.$$

Wenn wir eine Gerade xy parallel zur Geschwindigkeit des bewegten Medium legen, so ist der Winkel, welchen die verschiedenen Theile der gebrochenen Linie mit dieser Geraden einschliessen,

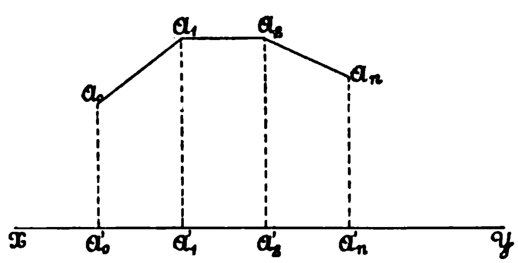

Fig. 34.

genau der Aberrationswinkel φ, der in den vorigen Ausdruck eingeht; demnach ist $A_1 A_2 \cos\varphi$ gleich der Projektion $A_1' A_2'$ von $A_1 A_2$ auf xy und die Zeit, welche das Licht zum Durchlaufen der Strecke $A_1 A_2$ braucht, wird

$$\frac{A_1 A_2}{V'} + \frac{A_1' A_2'}{V'^2} v'.$$

Nun ist $v' = \frac{v}{n^2}$ und $V' = \frac{V}{n}$, wo v die fortschreitende Geschwindigkeit des Medium und V die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum bedeutet; ersetzt man die Grösse v' und V' in der vorigen Summe durch ihre Werthe, so erhält man

$$\frac{A_1 A_2}{V'} + A_1' A_2' \frac{v}{V^2}.$$

Die Zeit, die das Licht braucht, um von A_0 nach A_n zu gelangen, wird die Summe von ähnlichen Grössen sein, d. h.

$$\sum \frac{A_1 A_2}{V'} + \frac{v}{V^2} A_0' A_n'.$$

Das erste Glied $\sum \frac{A_1 A_2}{V}$ stellt die Zeit dar, die das Licht bei dem in Ruhe befindlichen Medium brauchen würde, das zweite hängt nur von der Lage der Endpunkte ab, dagegen nicht von dem Wege, den das Licht durchläuft, um von dem einen zu dem anderen Punkte zu gelangen.

238. Optische Erscheinungen in einem bewegten Medium. — Eine wichtige Folgerung aus der vorhergehenden Formel ist der Umstand, dass die Gesetze der Reflexion und Brechung, sowie die

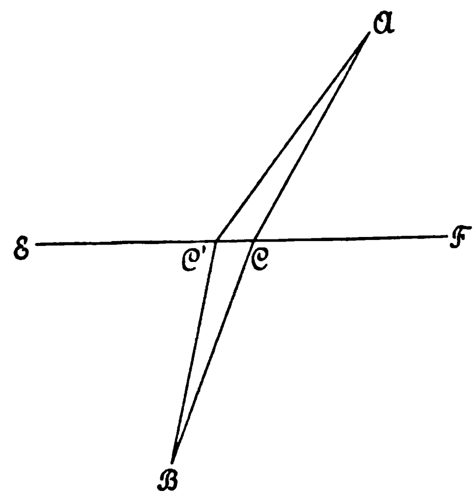

Fig. 35.

Interferenzerscheinungen durch die Erdbewegung nicht beeinflusst werden.

Wir wollen speciell die Brechung betrachten. Wenn A und B (Fig. 35) zwei Punkte sind, die in verschiedenen Medien liegen, so ist der vom Licht eingeschlagene Weg ACB so beschaffen, dass die zur Zurücklegung dieses Weges gebrauchte Zeit ein Minimum ist. Um zu zeigen, dass die Brechungsgesetze dieselben bleiben, wenn die beiden Medien in Ruhe sind oder sich bewegen, braucht man nur zu zeigen, dass ACB auch der kürzeste Weg ist, wenn die beiden Medien sich in gleicher Bewegung befinden.

Es sei T die Zeit, die das Licht bei ruhenden Medien braucht, um auf dem kürzesten Wege von A nach B zu gelangen, ferner T' die Zeit zur Zurücklegung eines unendlich nahe liegenden Weges AC'B. Ist ACB der Weg, welcher den Brechungsgesetzen entspricht, so hat man $T < T'$. Nach dem früher Gesagten sind nun die Zeiten, die zum Durchlaufen der Wege ACB und AC′B in dem Fall gebraucht werden, wo beide Medien eine Geschwindigkeit v besitzen, gleich

$$T_1 = T + \frac{v}{V^2} A'B', \qquad T_1' = T' + \frac{v}{V^2} A'B',$$

wenn $A'B'$ die Projektion von AB auf eine zur Geschwindigkeit v parallele Gerade bedeutet. Ist also $T < T'$, so gilt auch $T_1 < T_1'$, und der kürzeste Weg bei ruhenden Medien wird auch noch der kürzeste sein, wenn die Medien sich in Bewegung befinden. Die Gesetze der Brechung sind folglich in beiden Fällen dieselben.

Auch die Interferenzerscheinungen der Lichtstrahlen hängen nicht von der Bewegung des Medium ab, in dem sie entstehen. Sind T und T′ die Zeiten, die zwei Strahlen brauchen, um von einem Punkt A_0 zu A_n zu gelangen, wenn das Medium sich in Ruhe befindet, so werden diese beiden Zeiten um dieselbe Grösse vermehrt, wenn man ein bewegtes Medium annimmt. Die Differenz der Zeiten unterscheidet sich demnach in beiden Fällen nicht, und die Interferenzerscheinungen bleiben ungeändert.

Die optischen Erscheinungen können somit nur durch die relativen Bewegungen der Lichtquelle und der ponderablen Materie gegenüber dem Beobachter beeinflusst werden. Dies tritt bei der Aberration ein, wo der Beobachter und der beobachtete Stern nicht dieselbe Geschwindigkeit haben; ebenso bei dem Versuche von Fizeau, wo das in den Röhren enthaltene Wasser sich in relativer Bewegung zu dem Beobachter befindet.

239. Hypothesen von Fresnel. — Die Erklärungen, die wir von der Aberration gegeben haben, und die Folgerungen aus der Gleichung für die vom Licht in einem bewegten Medium gebrauchte Zeit beruhen auf der Hypothese, dass die Mitnahmegeschwindigkeit des in einem Medium enthaltenen Aethers gleich $v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ ist. Der Brechungskoefficient n ist aber keine Konstante, sondern er variirt mit der Farbe des Lichtstrahls und ist in einem doppelbrechenden Medium nicht derselbe für den ordentlichen und den ausserordentlichen Strahl. Es folgt hieraus, dass die Mitnahmegeschwindigkeit des Aethers nicht dieselbe ist, wenn man einen ausserordentlichen oder einen ordentlichen Strahl, oder auch zwei Strahlen verschiedener Farbe betrachtet. Durch hinreichend genaue Versuche konnte man auch thatsächlich beweisen, dass der ordentliche und der ausserordentliche Strahl nicht in gleichem Maasse mitgenommen werden.

Auch darf man nicht, wie es Fresnel zu thun scheint, annehmen, dass die Mitnahmegeschwindigkeit des Aethers unabhängig von der Wellenlänge des Lichtes und gleich dem Mittelwerthe aus denjenigen Werthen ist, die man für unendlich viele verschiedene Wellenlängen erhält.

Fresnel setzt voraus, dass bei einem durchsichtigen, bewegten Medium die durch die Bewegung desselben mitgenommene Aethermasse gleich dem Ueberschuss der in dem bewegten Medium enthaltenen Masse über die in einem gleichen Volumen der Umgebung befindliche Masse sei. Nennt man ϱ_0 die Dichte des Aethers in letzterem Fall, ϱ die Dichte desselben in dem bewegten Medium, so wird $\varrho - \varrho_0$ die Dichte des mitbewegten Aethers sein. Um die scheinbare Geschwindigkeit der Mitbewegung des in dem bewegten Medium enthaltenen Aethers zu finden, brauchen wir nur die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der beiden Moleküle M und M' zu suchen, deren eines M von der Masse ϱ_0 in Ruhe bleibt, während das andere M' von der Masse $\varrho - \varrho_0$ die Geschwindigkeit v des bewegten Medium besitzt. Bezeichnen wir mit v_1 die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, so erhalten wir durch Anwendung des Theorems von den Bewegungsgrössen

$$(\varrho - \varrho_0 + \varrho_0)\, v_1 = (\varrho - \varrho_0)\, v + \varrho_0 \times 0\,,$$

und hieraus

$$v_1 = \frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho}\, v\,.$$

Nun ist nach der Fresnel'schen Theorie, wenn man mit V_0 und V die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Lichtwellen in den Medien von der Dichte ϱ_0 und ϱ bezeichnet,

$$\frac{\varrho_0}{\varrho} = \frac{V^2}{V_0^{\,2}} = \frac{1}{n^2}\,;$$

demnach erhält man für die scheinbare Geschwindigkeit der Aetherbewegung

$$v_1 = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v\,.$$

Es ist dies nur ein kurzer Ueberblick, mit dem man sich schwerlich zufrieden geben kann, doch wollen wir suchen, die Anschauung Fresnel's durch eine strengere Analyse zu rechtfertigen.

240. Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einem bewegten Medium. — Man kann sich von der scheinbaren Mitbewegung des

Aethers Rechenschaft geben, wenn man die Fortpflanzung einer ebenen Welle in einem bewegten Medium betrachtet, und annimmt, dass die Verschiebung der Aethermoleküle von der Verschiebung der materiellen Moleküle abhängt. Bezeichnen wir die x-Komponenten der Verschiebungen der Aethermoleküle und der materiellen Moleküle resp. mit ξ und ξ_1, so erhalten wir in dem Fall, wo das materielle Medium in keiner fortschreitenden Bewegung begriffen ist, die folgenden Gleichungen (vgl. § 142):

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \Delta \xi - \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mathrm{M}(\xi_1 - \xi) \tag{1}$$

$$\varrho_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = \mathrm{M}(\xi - \xi_1). \tag{2}$$

Nun wollen wir annehmen, dass der Aether sich in Ruhe befindet, dass aber das materielle Medium eine fortschreitende Bewegung von einer zur Wellenebene senkrechten Geschwindigkeit v besitzt; als xy-Ebene wählen wir eine zur Wellenebene parallele Ebene und sehen zu, was aus den vorhergehenden Gleichungen wird.

ξ_1 ist nur eine Funktion von z und t; wenn das Medium sich in Ruhe befindet, ist die Geschwindigkeit des materiellen Moleküls zur Zeit t gleich $\frac{\partial \xi_1}{\partial t}$; aber in Folge der fortschreitenden Bewegung, die dieses Medium erfährt, wächst die z-Koordinate der Gleichgewichtslage des Moleküls in der Zeit dt um $v\,dt$. Der Zuwachs von ξ_1 wird demnach für einen Zuwachs dt der Zeit

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} dt + \frac{\partial \xi_1}{\partial z} dz = \frac{\partial \xi_1}{\partial t} dt + \frac{\partial \xi_1}{\partial z} v\,dt,$$

und die Geschwindigkeit des materiellen Moleküls hat zur Zeit t den Werth

$$w = \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \frac{\partial \xi_1}{\partial z} v.$$

Die Beschleunigung ist zu demselben Zeitpunkt

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Ersetzt man in diesem Ausdruck w durch seinen Werth, so erhält man für die Beschleunigung

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z\, \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z^2}.$$

Die Bewegungsgleichung des materiellen Moleküls lautet also unter Vernachlässigung des Quadrats von v

$$(3) \qquad \varrho_1 \left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} + 2\, v\, \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z\, \partial t} \right) = \mathrm{M}\, (\xi - \xi_1).$$

Diese Gleichung muss an Stelle von (2) treten. Gleichung (1) reducirt sich bei dem angenommenen Axensystem auf

$$(4) \qquad \varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \mathrm{M}\, (\xi_1 - \xi),$$

da ξ auch nur von z und t abhängt.

Durch Addition der beiden letzten Gleichungen eliminirt man M und erhält so

$$(5) \qquad \varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \varrho_1 \left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} + 2\, v\, \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z\, \partial t} \right) = \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}.$$

Wir nehmen an, dass M sehr gross ist; Gleichung (4) zeigt dann, dass $\mathrm{M}\,(\xi - \xi_1)$ endlich ist. Hieraus folgt, dass $\xi_1 - \xi$ sehr klein ist und wir können in erster Annäherung $\xi = \xi_1$ setzen. Gleichung (5) wird dann

$$(6) \qquad (\varrho + \varrho_1) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + 2\, v\, \varrho_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z\, \partial t} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}.$$

Die Bewegungsgleichung für das Vakuum erhält man aus der vorigen Gleichung, wenn man $\varrho_1 = 0$ annimmt; bekanntlich ist in diesem Fall die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$\mathrm{V} = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}.$$

Nimmt man an, dass die Lichtbewegung sich in einem ruhenden materiellen Medium fortpflanzt, so muss man in Gleichung (6) $v = 0$ setzen und erhält dann für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit den Werth

$$\frac{1}{\sqrt{\varrho + \varrho_1}}.$$

Der Brechungskoefficient der Substanz ist demnach

$$n = \sqrt{\frac{\varrho + \varrho_1}{\varrho}}.$$

Um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in dem Fall zu finden, wo sich das materielle Medium in fortschreitender Bewegung in Richtung der z-Axe befindet, wollen wir die Gleichung (6) durch den Werth

$$\xi = e^{\frac{2i\pi}{\lambda}(z - Vt)}$$

zu erfüllen suchen. Wir erhalten dann

$$(\varrho + \varrho_1) V^2 - 2 V v \varrho_1 = 1,$$

woraus folgt

$$V^2 = \frac{1}{\varrho + \varrho_1} + \frac{2 v V \varrho_1}{\varrho + \varrho_1}.$$

Dieser Werth von V unterscheidet sich wenig von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einem unbewegten Medium; deshalb können wir auf der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung V durch seinen angenäherten Werth $\frac{1}{\sqrt{\varrho_1 + \varrho}}$ ersetzen, und erhalten so

$$V^2 = \frac{1}{\varrho + \varrho_1} + \frac{2 v \varrho_1}{(\varrho_1 + \varrho)\sqrt{\varrho + \varrho_1}},$$

oder, da wir die Grössen, welche das Quadrat von v enthalten, vernachlässigt haben,

$$V = \frac{1}{\sqrt{\varrho + \varrho_1}} + \frac{v \varrho_1}{\varrho + \varrho_1}.$$

Alles geht so vor sich, wie wenn der Aether mit einer Geschwindigkeit gleich

$$\frac{v \varrho_1}{\varrho + \varrho_1}$$

mitgenommen würde. Diese Gleichung kann man übrigens schreiben

$$v\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho + \varrho_1}\right),$$

oder, da $n = \sqrt{\frac{\varrho + \varrho_1}{\varrho}}$,

$$v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Man findet also wieder denselben Ausdruck wie bei der Theorie von Fresnel. Dies ist aber nur eine erste Annäherung, da $\xi_1 - \xi$

nicht Null, sondern nur sehr klein ist; die Differenz ist von der Ordnung der Dispersion.

Die Analyse in § 142 zeigt, dass das Verhältniss $\frac{\xi_1}{\xi}$, das nahe gleich eins ist, von der Wellenlänge abhängt. Um die Versuche zu erklären, die, wie wir sahen, für die Geschwindigkeit der Mitbewegung $v\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ ergeben, wo *n der Brechungskoefficient für die betrachtete Farbe ist,* muss man annehmen, dass dies Verhältniss *für jede beliebige Farbe* unabhängig von v ist; wir kennen aber keine Theorie, welche diese Annahme rechtfertigt.

Schlussfolgerungen.

241. Bei der Untersuchung aller Erscheinungen haben wir mehrere Theorien parallel neben einander betrachtet, die gleich gut die beobachteten Thatsachen erklären. Diese Theorien lassen sich stets in eine der beiden folgenden Gruppen bringen: diejenigen, wo die Elasticität des Medium als konstant angenommen wird, wie bei Fresnel, und diejenigen, bei denen man mit Neumann annimmt, dass die Dichte ϱ des Aethers konstant ist. Wir fanden keinen Grund dafür, einer dieser Hypothesen den Vorzug vor der anderen zu geben. Nur die Erklärung der Aberration durch theilweise Mitbewegung des Aethers kann zu Gunsten der Fresnel'schen Hypothese sprechen, denn die Mitbewegung des Aethers setzt voraus, dass die Dichte des Aethers nicht in allen Medien dieselbe ist. Doch ist es, wie bemerkt, schwierig, die Aberrationserscheinungen ausreichend zu erklären, und keine Theorie genügt vollständig. Auch hier ist also kein Grund vorhanden, sich für eine Theorie zu entscheiden.

Die Unmöglichkeit, eine Entscheidung zu treffen, zeigt uns, dass die mathematischen Theorien der physikalischen Erscheinungen nur als ein, allerdings sehr werthvolles, Hülfsmittel betrachtet werden können; wir dürfen also nicht zu Sklaven derselben werden, sondern müssen sie verwerfen, wenn sie sich im formellen Widerspruch mit den Versuchen befinden.

242. Es gibt einen ganz allgemeinen Grund, aus dem wir zwischen den besprochenen optischen Theorien keine Wahl treffen können. Bekanntlich sind die Bewegungsgleichungen in einem elastischen isotropen oder anisotropen Medium linear und haben konstante Koefficienten. Eine allgemeine Eigenschaft der Gleichungen dieser Art ist die, dass, wenn ξ_1 und ξ_2 zwei Integrale einer solchen Gleichung darstellen, die Grösse $A\xi_1 + B\xi_2$ im Allgemeinen ebenfalls eine Lösung ist. Wir können also den optischen Problemen auf unendlich viele Arten genügen.

Ausserdem ist, wie wir sahen, eine der Bewegungsgleichungen in einem elastischen isotropen Medium

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \Delta \xi - \frac{\partial \Theta}{\partial x}. \tag{1}$$

Wenn wir die beiden Seiten dieser Gleichung nach einer beliebigen Variablen differentiiren, erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \xi'}{\partial t^2} = \Delta \xi' + \frac{\partial \Theta'}{\partial x}.$$

Genügt also eine Funktion der Gleichung (1), so ist dies für einen beliebigen Differentialquotient dieser Funktion ebenfalls der Fall.

Bezeichnen wir nun mit ξ, η, ζ die Verschiebungskomponenten eines Aethermoleküls in der Fresnel'schen Theorie, die den Bewegungsgleichungen von der Form (1) genügen, so werden dies in gleicher Weise die Differentialquotienten ξ'_x, ξ'_y, ξ'_z, η'_x .... thun, und man kann leicht zeigen, dass dies auch mit den Binomen $\zeta'_y - \eta'_z$, $\xi'_z - \zeta'_x$, $\eta'_x - \xi'_y$ der Fall ist.

Nun sind aber bekanntlich die Verschiebungskomponenten eines Aethermoleküls in der Neumann'schen Theorie mit diesen Binomen identisch, folglich werden auch sie Lösungen der Bewegungsgleichungen darstellen. Man kann also sicher sein, dass alle Erscheinungen, die sich durch die Fresnel'sche Theorie erklären lassen, ebensogut durch die Neumann'sche Theorie erklärt werden können; auch das Umgekehrte ist natürlich der Fall.

Unter Umständen indessen traten in den Bewegungsgleichungen variable Konstanten auf, so z. B. bei der Theorie von Sarrau und bei der Betrachtung der Uebergangsschicht bei der Reflexion. Da uns aber das Gesetz der Veränderung der Koefficienten vollständig unbekannt ist, so genügen einige Annahmen, um die Theorie mit den Versuchen in Uebereinstimmung zu bringen, und wir können über die Berechtigung der Theorie keine Entscheidung treffen.

243. Die Betrachtung einer besonderen Erscheinung, der Polarisation durch Beugung, schien eine Entscheidung zwischen der Theorie von Fresnel und der von Neumann möglich zu machen. Man glaubte durch Rechnung zu dem Resultat gekommen zu sein, dass die Drehung der Polarisationsebene in beiden Theorien nicht denselben Werth hat. Die Rechnungen waren aber sicher ungenau, denn da die Bewegungsgleichungen konstante Koefficienten haben, so kann, wie wir schon hervorhoben, kein Unterschied zwischen den Resultaten der beiden Theorien auftreten. Doch wurden in Folge dieser Rechnungen nach dieser Richtung Versuche unternommen. Dieselben sind sehr schwierig, da die Ablenkung eines gebeugten Strahls sehr gering und die daraus entstehende Drehung der Polarisationsebene ausserordentlich klein ist. Um die Ablenkung des gebeugten Strahls zu vergrössern, wendete man Gitter an, aber die Erscheinung wird dann verwickelter, da gleichzeitig Beugung und Brechung oder Reflexion auftritt; auch zeigten die Versuche weder Uebereinstimmung unter einander, noch mit den Folgerungen aus der Theorie von Fresnel oder der von Neumann.

Kürzlich nahm Gouy dieselbe Aufgabe ohne vorgefasste Meinung wieder auf und erhielt eine beträchtliche Ablenkung des gebeugten Strahles, indem er die Lichtquelle, welche durch den Brennpunkt einer Sammellinse gebildet wurde, an den Rand eines Schirmes brachte. Die Resultate seiner Versuche für den Werth der Drehung der Polarisationsebene zeigen keine bessere Uebereinstimmung mit den beiden Theorien über die Polarisation. Auch die Theorie der Beugung findet sich nicht bestätigt, denn Gouy stellte fest, dass die Erscheinungen von der Form des Schirmrandes und der Natur dieses Schirmes abhingen. Diese Abweichung der Versuche Gouy's von der Theorie Fresnel's darf uns nicht überraschen, denn wir hoben hervor, dass es unmöglich ist, eine Lösung der Gleichung

$$\Delta \xi + \alpha^2 \xi = 0$$

zu finden, die genau den Bedingungen des Problems entspricht. Die Theorie der Diffraktion, die wir aufstellten, konnte nur angenähert genügen, aber die Annäherung ging unter den gewöhnlichen Bedingungen der Beugungsversuche sehr weit, denn die vernachlässigten Grössen sind dann ausserordentlich klein. Dies ist jedoch nicht mehr bei den Bedingungen der Fall, unter denen Gouy seine Versuche anstellte.