

COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SEANCE DU LUNDI 8 AVRIL 1895.

PRÉSIDENCE DE M. MAREY.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **PRÉSIDENT** annonce à l'Académie que, en raison des fêtes de Pâques, la séance de lundi prochain 15 avril sera remise au mardi 16.

OPTIQUE. — *Sur le spectre cannelé.* Note de M. H. POINCARÉ.

« Il y aura bientôt cinquante ans que M. Fizeau, par une expérience célèbre, a cherché à mettre en évidence la permanence du mouvement lumineux pendant un très grand nombre d'oscillations.

» Si l'on fait interférer deux rayons de lumière blanche, dont la différence de marche est de plusieurs milliers de longueurs d'onde, on n'aperçoit pas de franges, mais si l'on fait tomber le faisceau sur un spectroscopé,

on voit que le spectre est sillonné de bandes obscures qui correspondent aux radiations simples qui sont éteintes par l'interférence.

» La signification de cette expérience a été contestée en vertu des considérations suivantes :

» Soit

$$\xi = F(t)$$

l'équation du mouvement lumineux en un point donné, ξ étant le déplacement de l'éther.

» Une fonction quelconque pouvant être exprimée par l'intégrale de Fourier, nous pouvons écrire

$$(1) \quad F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(q) e^{iqt} dq$$

ou

$$(2) \quad f(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-iqt} dt.$$

» Quelque compliqué que soit le mouvement lumineux, on pourra donc le considérer comme dû à la superposition d'une infinité d'ondes simples dont la période sera $\frac{2\pi}{q}$, dont l'amplitude sera $|f(q)| dq$ et la phase l'argument de $f(q)$.

» L'effet du spectroscope serait alors d'isoler ces ondes simples les unes des autres.

» Si l'on fait interférer deux rayons émanés d'une même source et dont la différence de marche est égale à h , l'équation du mouvement lumineux deviendra

$$\begin{aligned} \xi &= F(t) + F(t+h) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(q) [e^{iqt} + e^{iq(t+h)}] dq \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(q) e^{iqt} (1 + e^{iqh}) dq. \end{aligned}$$

» L'effet du spectroscope sera alors d'isoler la radiation dont la période est $\frac{2\pi}{q}$ et dont l'amplitude sera devenue

$$dq |f(q)| |1 + e^{iqh}|$$

et sera multipliée par conséquent par le facteur $|1 + e^{iqh}|$ de telle façon que pour une différence de marche convenable la radiation devra s'éteindre.

» On pourrait dire aussi que l'amplitude de cette radiation est égale au module de

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dq}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(t) + F(t+h)] e^{-iqt} dt \\ = \frac{dq}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-iqt} (1 + e^{iqh}) dt, \end{cases}$$

car

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F(t+h) e^{-iqt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-iq(t-h)} dt.$$

» A ce compte, l'expérience de MM. Fizeau et Foucault ne nous apprendrait rien sur la constitution de la lumière, puisque le résultat devrait être le même, quelle que soit la fonction $F(t)$.

» Mais une simple réflexion nous mettra en défiance contre cette manière de raisonner.

» Supposons que la fonction $F(t)$ soit nulle pour t négatif, qu'elle varie d'une façon quelconque depuis $t=0$ jusqu'à $t=t_0$; et qu'elle redevienne nulle pour $t > t_0$. L'intensité d'une radiation simple isolée par le spectroscopie devrait encore être calculée à l'aide de la formule (2); elle serait donc constante.

» Qu'est-ce à dire? Supposons qu'on braque un spectroscopie sur une bougie et qu'on allume cette bougie pendant un certain temps; la formule voudrait dire qu'on devrait voir quelque chose dans le spectroscopie après que la bougie serait éteinte et même avant qu'elle soit allumée.

» La formule est donc fautive; comment convient-il de la modifier. Pour nous en rendre compte, supposons d'abord que l'appareil dispersif soit un réseau.

» Pour calculer l'amplitude de la radiation envoyée par le réseau à un point M très éloigné dans une direction donnée, il suffit d'appliquer le principe de Huygens.

» Soit θ le temps que la lumière met pour aller d'un point P du réseau au point M. Soit $d\omega$ un élément de surface du réseau dont le centre sera P. Soit ψ une fonction qui sera égale à 1 ou à 0, suivant que l'élément $d\omega$ appartiendra ou non à une fente du réseau; on aura

$$\xi = \int F(t - \theta) \psi d\omega,$$

l'intégration devant être étendue à toute la surface du réseau.

Mais on aura

$$d\omega = K d\theta,$$

K étant un coefficient constant qui dépend de la longueur du réseau et de la *dévi*ation, c'est-à-dire de l'angle que fait la normale au réseau avec la direction PM; direction sensiblement constante pour tous les points du réseau, puisque le point M est très éloigné. D'autre part, ψ pourra être considéré comme une fonction de θ . On aura donc

$$\xi = K \int_{\theta_0}^{\theta_1} F(t - \theta) \psi(\theta) d\theta.$$

Les limites θ_0 et θ_1 sont les temps que met la lumière pour aller des extrémités du réseau au point M.

» La fonction ψ qui est égale tantôt à 1, tantôt à 0, est une fonction périodique de θ et la période que j'appelle $\frac{2\pi}{q}$ dépend de la déviation et de l'équidistance des traits du réseau.

» Je puis donc développer en série de Fourier et écrire

$$K\psi = \sum A_n e^{niq\theta},$$

n étant un entier qui varie de $-\infty$ à $+\infty$.

» On a donc

$$\xi = \sum A_n e^{niqt} \int_{\theta_0}^{\theta_1} F(t - \theta) e^{-niq(t-\theta)} d\theta.$$

» Tout se passe donc comme si nous avions une série de radiations dont la période serait $\frac{2\pi}{nq}$, mais dont l'amplitude et la phase, au lieu d'être rigoureusement constantes, varieraient avec une lenteur relative. Cette amplitude et cette phase ne seraient autre chose que le module et l'argument de l'intégrale

$$A_n \int_{\theta_0}^{\theta_1} F(t - \theta) e^{-niq(t-\theta)} d\theta.$$

» Parmi ces radiations, celles qui correspondent à $n = \pm 1$ agiront seules sur la rétine.

» Pour retrouver le résultat que nous avait donné l'intégrale de Fourier, il faudrait faire $\theta_0 = -\infty$, $\theta_1 = +\infty$; l'amplitude de la vibration (pour $n = 1$ par exemple) serait alors constante et proportionnelle au module

de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t - \theta) e^{-iq(t-\theta)} d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-iqt} dt.$$

» Mais la différence des limites $\theta_1 - \theta_0$, au lieu d'être infinie, est égale à autant de périodes qu'il y a de traits utilisés dans le réseau; elle est donc égale à un temps fort court.

» Supposons maintenant qu'on fasse tomber sur le réseau un faisceau formé de deux rayons interférents; l'amplitude sera alors proportionnelle au module de l'intégrale

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} [F(t - \theta) + F(t - \theta + h)] e^{-iq(t-\theta)} d\theta.$$

» L'expérience de M. Fizeau nous apprend que cette amplitude est proportionnelle à $(1 + e^{iqh})$; on doit donc avoir

$$(4 \text{ bis}) \quad \int_{t-\theta_1+h}^{t-\theta_0+h} F(t) e^{-iqt} dt = \int_{t-\theta_1}^{t-\theta_0} F(t) e^{-iqt} dt.$$

» Cette formule, analogue à la formule (4), n'est qu'une simple tautologie si l'on suppose comme dans la théorie incomplète $\theta_0 = -\infty$, $\theta_1 = +\infty$; il en sera de même si $\theta_1 - \theta_0$ est très grand par rapport à h , c'est-à-dire si le nombre des traits utilisés du réseau est très grand par rapport au nombre de périodes représenté par la différence de marche.

» Mais il n'en est plus de même dans le cas contraire. *L'expérience de Fizeau et Foucault nous enseigne alors que le mouvement lumineux présente une certaine espèce de permanence exprimée par l'équation (4 bis).*

» Si, par exemple, la différence de marche est de 10000 périodes et si l'on utilise 1000 traits du réseau, cette expérience nous apprend que le mouvement lumineux, pendant les périodes 0 à 1000, ne diffère pas du mouvement lumineux pendant les périodes 10000 à 11000, comme différencieraient par exemple deux mouvements lumineux émanés de deux sources différentes.

» Ainsi une analyse complète conduit précisément aux mêmes conséquences que la clairvoyance de M. Fizeau avait devinées d'avance.

» Les résultats seraient analogues avec un prisme; sans entrer dans le détail du calcul, on voit que la séparation des couleurs par la réfraction est encore, en dernière analyse, un phénomène d'interférence qui peut se calculer à l'aide du principe de Huygens; il est donc clair que dans la for-

mule finale n'interviendront que les valeurs de $F(t)$ pour des valeurs de t comprises entre $t - \theta_0$ et $t - \theta_1$, θ_0 et θ_1 étant la plus petite et la plus grande distances (exprimées en temps) du point M à la première surface réfringente. »

GÉODÉSIE. — *Translation de la capitale du Brésil; Plans et Rapports officiels;*
par M. H. FAYE.

« En 1891, le Congrès national du Brésil a décidé de mettre à l'ordre du jour la translation de la capitale dans une région plus saine et plus sûre; il a voté les fonds nécessaires pour les études relatives à cette question. Cette grande entreprise a été confiée le 18 avril 1892 à une Commission de 22 membres, chargée de déterminer les localités de ce vaste empire qui offriraient les plus sérieuses garanties de succès. M. Cruls, l'éminent directeur de l'observatoire de Rio, a été nommé président de cette Commission. Celle-ci s'est mise immédiatement à l'œuvre; ses investigations ont duré huit mois et elle a consigné, dans des Rapports détaillés, les résultats de ses recherches (1).

» J'ai l'honneur de présenter à l'Académie, au nom du Président, le travail de la Commission, composé d'une série de Rapports sur toutes les faces de la question et d'un grand nombre de plans, d'itinéraires et d'opérations astronomiques et géodésiques qui ont eu pour but principal de déterminer les coordonnées géographiques des sommets d'une aire de 14400^{kmq} comprenant le district proposé pour la capitale future.

» Ce district est situé sur le plateau central du Brésil, dans la région des monts Pyrénéens, l'aire étant comprise entre les parallèles de 15°40' et de 16°8' de latitude et entre les méridiens de 3^h18^m et 3^h24^m de longitude. L'altitude, de plus de 1000^m, permet de compter sur une température très douce, assez semblable à celle de l'extrême midi de la France dans la belle saison, et, considération tout à fait capitale, à cette hauteur, il n'y a pas à craindre l'impaludisme et les maladies spéciales qui règnent sur plusieurs côtes du Brésil. Les nombreuses rivières qui prennent leur source dans ces contrées assurent à la population qui viendra s'y agglomérer une grande provision d'eau excellente (plus de 1000^{lit} par tête pour un million d'habitants) et les chutes d'eau assez importantes garantissent l'exploit-

(1) Voir plus loin p. 767.