blèmes les plus difficiles, aux recherches les plus ardues, sans redouter ni les longs exils dans les régions lointaines, ni les rigueurs des climats meurtriers. Après avoir mené à bonne fin des œuvres si diverses, sentant que bien d'autres resteront inachevées, vous demandez que vos recherches ne soient pas interrompues, et surtout qu'elles soient continuées dans cet esprit de persévérance et de sincérité qui est la règle de votre vie.

» C'est à l'Académie des Sciences que vous avez confié cette tâche : elle en comprend tout l'honneur et tous les devoirs.

» Soyez assuré, cher et très honoré Confrère, que l'Académie se conformera fidèlement à vos intentions; elle veillera à l'exécution scrupuleuse des travaux préparés dans votre observatoire d'Abbadia, en particulier de ce grand Catalogue d'étoiles, commencé par vos soins, et de ces études sur la direction et l'intensité de la gravité locale dont vous avez été le promoteur. Vous avez eu déjà la satisfaction de voir vos idées sur la variation possible de la latitude, quoique méconnues à l'origine, devenir aujourd'hui la préoccupation des astronomes; plus tard, quand les causes de ce phénomène seront démêlées, vous aurez le double honneur d'avoir posé le problème et d'avoir concouru puissamment à le résoudre.

» L'Académie sera donc heureuse de s'associer à l'accomplissement de vos vœux; elle vous offre, en témoignage de sa reconnaissance, cette médaille, à l'effigie d'Arago, qu'elle aime à décerner aux savants qui, à l'exemple de l'illustre Physicien-Astronome, contribuent, comme vous l'avez fait à divers titres, aux progrès de la Physique terrestre et astronomique. »

M. **d'Abbadie** répond :

« Permettez-moi, Monsieur le Président, de remercier, à mon tour, l'Académie pour avoir exaucé un de mes vœux les plus chers en acceptant un don que j'aurais voulu rendre plus digne d'Elle. C'est une grande satisfaction pour moi de laisser en si bonnes mains des travaux commencés et de sentir que mes désirs, confiés à Elle, sont en sécurité. »

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'équilibre d'un corps élastique.* Note de M. **H. Poincaré**.

« Le problème de l'équilibre élastique d'un corps peut s'énoncer analytiquement comme il suit :

» *Trouver trois fonctions* ξ, η, ζ *qui, à l'intérieur du corps, satisfassent* *aux équations*

$$
(1) \qquad \begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dx}+\mu\Delta\xi=0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dy}+\mu\Delta\eta=0 \\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dz}+\mu\Delta\zeta=0, \end{cases} \qquad \left(\theta=\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right),
$$

et qui, à la surface du corps, que j'appellerai S, *sont telles que les trois expressions*

$$
(2) \qquad \begin{cases} P_x=l\lambda\theta+\mu\left(l\dfrac{d\xi}{dx}+m\dfrac{d\zeta}{dy}+n\dfrac{d\xi}{dz}\right)+\mu\left(l\dfrac{d\xi}{dx}+m\dfrac{d\eta}{dx}+n\dfrac{d\zeta}{dx}\right), \\ P_y=l\lambda\theta+\mu\left(l\dfrac{d\eta}{dx}+m\dfrac{d\eta}{dy}+n\dfrac{d\eta}{dz}\right)+\mu\left(l\dfrac{d\xi}{dy}+m\dfrac{d\eta}{dy}+n\dfrac{d\zeta}{dy}\right), \\ P_z=l\lambda\theta+\mu\left(l\dfrac{d\zeta}{dx}+m\dfrac{d\zeta}{dy}+n\dfrac{d\zeta}{dz}\right)+\mu\left(l\dfrac{d\xi}{dz}+m\dfrac{d\eta}{dz}+n\dfrac{d\zeta}{dz}\right) \end{cases}
$$

(*où* l, m, n *sont les cosinus directeurs de la normale à* S, *c'est-à-dire à la surface du corps*) *prennent des valeurs données d'avance.*

» Je commencerai par résoudre le problème suivant : je chercherai trois fonctions ξ, η, ζ qui satisfont aux équations (1) non seulement à l'intérieur de S, mais à l'extérieur de S. Je supposerai que ces fonctions sont continues quand on traverse S, mais que leurs dérivées ne le sont pas. Les expressions (2) subissent donc une variation brusque quand on franchit cette surface; j'appellerai P_x, P_y, P_z les valeurs de ces expressions du côté interne; j'appellerai P_x^0, P_y^0, P_z^0 les valeurs qu'elles prennent du côté externe.

» Je suppose alors qu'on se donne les différences $P_x^0-P_x$, $P_y^0-P_y$, $P_z^0-P_z$, et je cherche à déterminer ξ, η, ζ.

» Pour cela, soient ξ', η', ζ' les potentiels de trois surfaces attirantes, coïncidant toutes trois avec S et dont les densités superficielles sont respectivement

$$
\frac{1}{4\pi}(P_x^0-P_x), \quad \frac{1}{4\pi}(P_y^0-P_y), \quad \frac{1}{4\pi}(P_z^0-P_z).
$$

Soient ensuite

$$
(\lambda+2\mu)\theta=\frac{d\xi'}{dx}+\frac{d\eta'}{dy}+\frac{d\zeta'}{dz}.
$$

Soit u le potentiel d'un volume attirant remplissant tout l'espace et dont la densité est $\frac{\theta}{4\pi}$.

» Les fonctions cherchées ξ, η, ζ nous seront données par les formules

$$\mu\xi = \xi' + (\lambda + \mu)\frac{du}{dx},$$
$$\mu\eta = \eta' + (\lambda + \mu)\frac{du}{dy},$$
$$\mu\zeta = \zeta' + (\lambda + \mu)\frac{du}{dz}.$$

Ce problème une fois résolu, proposons-nous de trouver trois fonctions ξ, η, ζ satisfaisant aux conditions

$$(3)\qquad \begin{cases} P_x^0 - P_x = k(P_x^0 + P_x) + 2X, \\ P_y^0 - P_y = k(P_y^0 + P_y) + 2Y, \\ P_z^0 - P_z = k(P_z^0 + P_z) + 2Z, \end{cases}$$

où k est une indéterminée et X, Y, Z trois fonctions données.

» Pour $k = 1$, ces conditions se réduisent à

$$P_x = -X, \qquad P_y = -Y, \qquad P_z = -Z,$$

de sorte que, si nous pouvons satisfaire aux équations (3) pour $k = 1$, nous aurons résolu le problème de l'équilibre élastique.

» Développons ξ, η, ζ, P_x, P_x^0, ..., suivant les puissances de k et soit ξ_n, η_n, ζ_n, $P_{n,x}$, $P_{n,x}^0$ les coefficients de k^n dans ces différents développements; il viendra

$$(4)\qquad \begin{cases} P_{0,x}^0 - P_{0,x} = 2X, \\ P_{n,x}^0 - P_{n,x} = P_{n-1,x}^0 + P_{n-1,x}. \end{cases}$$

Les équations (4) permettent alors, par le procédé exposé plus haut, de déterminer par récurrence ξ_0, η_0, ζ_0; puis ξ_1, η_1, ζ_1; puis ξ_2, η_2, ζ_2, ...

» Il s'agit de savoir quel est le rayon de convergence des séries et si ce rayon est plus grand que 1.

» Soient

$$J_{m,n} = \int(\xi_m P_{n,x} + \eta_m P_{n,y} + \zeta_m P_{n,z})\,d\omega,$$
$$J'_{m,n} = -\int(\xi_m P_{n,x}^0 + \eta_m P_{n,y}^0 + \zeta_m P_{n,z}^0)\,d\omega,$$

les intégrations sont étendues à tous les éléments $d\omega$ de S.

» J'observe d'abord que, en vertu d'un théorème analogue à celui de Green,

$$J_{m,n} = J_{n,m}, \qquad J'_{m,n} = J'_{n,m}.$$

» Les équations (4) me donnent ensuite

$$J'_{m,n} + J_{m,n} = J'_{m,n-1} - J_{m,n-1}.$$

» On en déduit que

$$J'_{m,n} = J_{0,m+n}, \qquad J'_{m,n} = J'_{0,m+n}.$$

» Cela nous permet d'écrire avec un seul indice J_{m+n} et J'_{m+n} au lieu de $J_{m,n}$ et de $J'_{m,n}$.

» J'observe ensuite que

$$J_{2m} = J_{m,m} > 0.$$

» Cette intégrale est en effet égale à l'intégrale triple

$$\int d\tau \left\{ \lambda\theta_m^2 + 2\mu \left[\sum \left(\frac{d\xi_m}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum\left(\frac{d\zeta_m}{dy} + \frac{d\eta_m}{dz}\right)^2 \right] \right\}$$

étendue à tout le volume du corps. De même, J'_{2m} est positif.

» On en conclut que le rapport $\frac{J_{2m+2}}{J_{2m}}$ va constamment en croissant, de même que $\frac{J'_{2m+2}}{J'_{2m}}$; de même le rapport $\frac{J'_{2m+2} + J_{2m+2}}{J'_{2m} + J_{2m}}$ croît toujours, mais il reste toujours plus petit que 1.

» Si l'on voulait se contenter d'un aperçu analogue à ceux dont on a si souvent usé en Physique mathématique, on pourrait raisonner comme il suit.

» Cherchons le rayon de convergence de notre série et admettons que cette convergence soit uniforme; alors on verrait que le rayon de convergence minimum sera le même que celui des séries

$$J_0 + k^2 J_2 + k^4 J_4 + \ldots,$$
$$J'_0 + k^2 J'_2 + k^4 J'_4 + \ldots.$$

» Ce rayon est au moins égal à 1 et il est plus grand que 1 si l'on peut assigner, au rapport $\frac{J'_{2m}}{J_{2m}}$, une limite supérieure finie et une limite inférieure plus grande que zéro.

» J'_{2m} ne peut s'annuler que si l'on a en tous les points extérieurs à S

$$(5) \quad \frac{d\xi_m}{dx} = \frac{d\eta_m}{dy} = \frac{d\zeta_m}{dz} = \frac{d\zeta_m}{dy} + \frac{d\eta_m}{dz} = \frac{d\xi_m}{dz} + \frac{d\xi_m}{dx} = \frac{d\eta_m}{dx} + \frac{d\xi_m}{dy} = 0.$$

» De même J_{2m} ne peut s'annuler que si les mêmes relations ont lieu en tous les points intérieurs à S.

» Or ces relations entraînent les suivantes :

$$(6) \quad \xi_m = a + qz - ry, \qquad \eta_m = b + rx - pz, \qquad \zeta_m = c + py - qx,$$

a, b, c, p, q, r étant des constantes.

» A l'extérieur de S, les relations (6) ne peuvent évidemment avoir lieu que si ces six constantes sont nulles, puisque ξ_m, η_m, ζ_m doivent être nulles à l'infini.

» Si donc

$$J'_{2m} = 0,$$

on aura

$$\xi_m = \eta_m = \zeta_m = 0,$$

d'où

$$J_{2m} = 0.$$

» Supposons maintenant que J_{2m} soit nul ; les relations (6) devront être satisfaites à l'intérieur de S et par conséquent sur S elle-même.

» D'autre part, nous devons supposer que les fonctions données X, Y, Z satisfassent aux conditions de l'équilibre d'un corps solide qui s'écrivent

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\int X\,d\omega = \int Y\,d\omega = \int Z\,d\omega = \int (yZ - zY)\,d\omega \\ &\qquad = \int (zX - xZ)\,d\omega = \int (xY - yX)\,d\omega = 0. \end{aligned}\right.$$

$d\omega$ est un élément de la surface S.

» Les conditions (7) entraînent les relations suivantes :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\int P^0_{m,x}\,d\omega = \int (zP_{m,y} = yP_{m,z})\,d\omega \\ &\qquad = \int P^0_{m,x}\,d\omega = \int (zP^0_{m,y} - yP^0_{m,z})\,d\omega = 0, \end{aligned}\right.$$

avec celles qu'on en déduit par symétrie.

» Si alors les relations (6) ont lieu à l'intérieur de S, et par conséquent aussi sur la surface S elle-même, on aura, en vertu des équations (8),

$$J'_{2m} = 0.$$

» Ainsi, J_{2m} ne peut s'annuler sans que J'_{2m} s'annule et inversement. Donc le rapport $\frac{J'_{2m}}{J_{2m}}$ ne peut ni s'annuler, ni devenir infini, et nous pouvons lui assigner une limite supérieure M et une limite inférieure $\frac{1}{M}$.

» On en conclut, par un procédé connu, l'inégalité

$$\frac{J'_{2m+2} + J_{2m+2}}{J'_{2m} + J_{2m}} < \left(\frac{1-M}{1+M}\right)^2,$$

ce qui prouve que le rayon de convergence est plus grand que $\frac{1+M}{1-M}$.

» Cette démonstration laisse à désirer, il y aurait lieu de la compléter; je signale cette question aux chercheurs; on pourrait employer, en les modifiant quelque peu, les procédés dont je me suis servi dans mes recherches sur la méthode de Neumann, avec laquelle la méthode exposée ici présente une parenté évidente. »

PATHOLOGIE EXTERNE. — *De l'utilité des photographies par les rayons X dans la pathologie humaine.* Note de MM. **Lannelongue, Barthélemy** et **Oudin**.

« La Communication de MM. Oudin et Barthélemy sur ce sujet nous a conduits à entreprendre un certain nombre de recherches, en vue de confirmer les premiers résultats d'abord, en vue aussi de savoir quel parti on pouvait tirer de l'emploi des rayons de Röntgen dans les questions de diagnostic. On comprendra tout de suite qu'en présence de la connaissance exacte d'un fait sur lequel on n'était pas fixé, la thérapeutique chirurgicale trouve des applications positives et plus ou moins étendues.

» C'est dans ce but qu'ont été entreprises des recherches dont je viens donner à l'Académie les premiers résultats. Je tiens à lui faire observer que le premier outillage que nous avons eu à notre disposition est encore insuffisant et qu'il s'est aussi ressenti de notre inexpérience. Si donc nous venons aujourd'hui publier quelques faits, c'est surtout pour répondre au sentiment de curiosité qui s'est traduit dans son sein lors de la présentation des plaques photographiques par M. Poincaré, et aussi pour dire que, véritablement, ce nouveau moyen est appelé à trouver des applications multiples en Chirurgie.

» Le premier fait est celui d'une pièce anatomique. C'est un fémur atteint d'ostéomyélite. L'un de nous a montré autrefois que la maladie connue sous ce nom était à tort considérée comme une périostite.

» Si cela était vrai, les altérations osseuses auraient dû se produire de la surface au centre de l'os; sur la photographie de la pièce on voit, au contraire, que la surface de l'os est intacte, tandis que les couches centrales, jusqu'à un demi-millimètre de la superficie, sont détruites, converties en cavernes; le tissu osseux y est extrêmement raréfié et réduit à quelques travées. Normalement, le tissu osseux compact, réduit ici à presque la minceur d'une feuille de papier, devrait avoir au moins un demi-centimètre d'épaisseur. C'est ce qui a permis à la lumière de le traverser et c'est la raison d'être des taches blanches qu'on remarque sur l'os.