Sir Joseph Lister, Président de la Société Royale de Londres, Associé étranger de l'Académie des Sciences, représentant la Société Royale et le Collège Royal des Chirurgiens d'Angleterre,

Sir William Priestley, Membre du Parlement anglais, représentant l'Université d'Édimbourg et celle de Saint-André,

Sir Dyce Duckworth, au nom du Collège Royal de Médecine de Londres,

Sir John Evans, Trésorier de la Société Royale de Londres,

M. le Professeur Crookshank, au nom du Conseil du King's College,

M. A. Cornu, Président de l'Académie des Sciences,

M. Bergeron, Secrétaire perpétuel de l'Académie de Médecine,

M. Perrot, Directeur de l'École Normale supérieure,

M. Louis Passy, Secrétaire perpétuel de la Société d'Agriculture,

M. Tissier, Président de l'Association des Étudiants,

Enfin M. Duclaux, Membre de l'Académie des Sciences, Directeur de l'Institut Pasteur.

Tous les assistants sont alors descendus dans la crypte et ont défilé devant le tombeau.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Sur la méthode de Bruns*. Note de M. **Poincaré**.

« On sait que Bruns a démontré que le problème des trois corps n'admet pas d'autre intégrale algébrique que les intégrales connues (*Acta mathematica*, t. XI). L'importance de cette méthode, qui est certainement applicable à d'autres équations analogues, m'engage à signaler certains cas d'exception au théorème de Bruns et à rectifier certaines défectuosités de sa démonstration qui, heureusement, ne lui enlèvent pas sa valeur.

» Bruns considère des équations de la forme suivante :

$$(1)\qquad \frac{dx_i}{dt} = y_i, \quad \frac{dy_i}{dt} = A_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

» Les A_i sont des fonctions rationnelles des x_i et de s, et s est liée aux x_i par une équation algébrique

$$(2)\qquad F(s, x_i) = 0.$$

» Bruns montre d'abord que la recherche des intégrales algébriques du système (1) se ramène à celle des intégrales de la forme

$$\frac{\psi}{\psi'},$$

où ψ et ψ' sont deux polynomes entiers par rapport aux y dont les coefficients sont rationnels par rapport aux x et à s. On peut toujours supposer (et cela bien que nous ne supposions pas les fonctions A_i homogènes) que ψ ne contient que des termes d'ordre pair par rapport aux y, ou seulement des termes d'ordre impair.

» Cela posé, Bruns montre que, si ψ_0 est l'ensemble des termes de ψ dont le degré est le plus élevé par rapport aux y, on a identiquement

$$\sum y_i \frac{d\psi_0}{dx_i} = \psi_0 \omega, \tag{3}$$

où $\omega = \sum \omega_i y_i$ est un polynome homogène du premier degré par rapport aux y dont les coefficients sont rationnels en x et s.

» M. Bruns cherche à démontrer que

$$\sum \omega_i \, dx_i \tag{4}$$

est une différentielle exacte.

» Dans le cas où les coefficients de ψ_0 sont rationnels en x et indépendants de s, la démonstration ne laisse rien à désirer.

» Mais il n'en est pas de même s'ils dépendent de s. Le raisonnement de Bruns (*loc. cit.*, p. 37 et suiv.) soulève des objections. Il fait d'abord

$$y_3 = y_4 = \ldots = y_n = 0;$$

le polynome ψ_0 se réduit à un polynome ψ_{02}, ne dépendant que de y_1 et y_2; écartant par un artifice parfaitement légitime le cas où ψ_{02} serait identiquement nul, il écrit

$$\psi_2 = c_0 y_1^q + c_1 y_1^{q-1} y_2 + \ldots + c_q y_2^q.$$

» Il pose

$$\psi_{02} = c_0 \psi',$$

désigne par Ψ le produit des diverses valeurs de ψ' correspondant aux diverses racines de l'équation (2) en s, par H le dénominateur commun des coefficients de Ψ, de telle façon que $H\Psi$ soit un polynome entier en x et en y. Il montre que

$$y_1 \frac{dH\Psi}{dx_1} + y_2 \frac{dH\Psi}{dx_2} = 0.$$

» De cette équation il veut conclure (p. 38) que

$$H\Psi = (y_1 y_2 - y_2 x_1)^{pq}.$$

C'est là que la démonstration est en défaut. Cela serait vrai si ψ_{02}, et par conséquent $H\Psi$, était homogène en x_1 et en x_2; mais il n'en est pas ainsi. Bruns suppose, il est vrai, que les A_i et F sont homogènes en x et s; cela lui permet de supposer que ψ_0 est homogène en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mais alors, ψ_{02} est homogène en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et non pas en x_1 et x_2 seulement. Pour le rendre homogène en x_1 et x_2, il faudrait non seulement annuler y_3, $y_4, \ldots, y_n$, mais encore $x_3, x_4, \ldots, x_n$; mais alors la relation d'intégrabilité

$$\frac{d\omega_2}{dx_1} = \frac{d\omega_1}{dx_2}$$

ne serait plus démontrée qu'en supposant ces $n-2$ variables nulles.

» Au reste, il est aisé de former un exemple où le théorème de Bruns est en défaut. Supposons que l'équation (2) s'écrive

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

Considérons le polynome

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 - (x_1 y_3 - x_3 y_1)^2 - (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2,$$

qui satisfait à l'identité (3); il se décomposera en deux facteurs,

$$(x_1 y_2 - y_1 x_2)(x_1^2 - x_3^2) + (x_2 x_3 + x_1 s)(x_1 y_3 - y_1 x_3)$$

et

$$\frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_1^2} + \frac{x_2 x_3 - x_1 s}{x_1^2 (x_1^2 - x_3^2)} (x_1 y_3 - y_1 x_3).$$

Chacun de ces facteurs satisfera à l'identité (3) sans que l'expression (4) soit une différentielle exacte.

» Il importe donc de rechercher les cas d'exception. Supposons d'abord $n = 2$ et regardons x_1 et x_2 comme les coordonnées d'un point mobile dans un plan y_1 et y_2 comme les composantes de sa vitesse. Alors l'équation $\psi = 0$ représentera un système de droites dans un plan. Ces droites auront une enveloppe que j'appellerai E.

» D'un point du plan, on pourra mener à cette enveloppe plusieurs tangentes et le rapport $y' = \frac{y_1}{y_2}$ représentera le coefficient angulaire d'une de ces tangentes. Considérons maintenant le polynome ψ_0; s'il ne dépend pas de s, on retombera sur le cas où le théorème de Bruns s'applique; s'il dépend de s, on pourra trouver une quantité σ telle que 1° σ est rationnel en x et s; 2° σ est rationnel en x_1, x_2 et y', y' représentant le coefficient angulaire d'une des tangentes menées à E par le point x_1, x_2; 3° les coefficients de ψ_0 sont rationnels en x et σ; 4° aux diverses valeurs de σ correspondent autant de polynomes ψ_0 différents.

» Faisons décrire au point x_1, x_2 un contour fermé imaginaire très petit, quelconque; il pourra arriver que deux ou plusieurs valeurs de σ, ou que deux ou plusieurs valeurs de y' s'échangent entre elles; c'est la façon dont se fait cet échange qu'il s'agit de discuter.

» Pour que des valeurs de σ s'échangent, il faut que des valeurs de y' s'échangent et pour que des valeurs de y' s'échangent, il faut que le point x_1, x_2 tourne autour de la courbe E ou autour d'une tangente singulière à E; je veux dire une tangente d'inflexion ou une tangente en un point singulier. Nous restons donc en présence de deux hypothèses :

» 1° Le lieu des points où l'équation en σ (et par conséquent l'équation en s) a des racines égales comprend E;

» 2° Le lieu ne comprend pas E, mais comprend une tangente singulière à E.

» Cette deuxième hypothèse doit être rejetée; c'est ce que montre la discussion de la façon dont s'échangent les diverses valeurs de y', de σ et de s quand le point x_1, x_2 tourne, dans le voisinage du point de contact, autour d'une tangente singulière à E, ou d'une des branches de courbe qui la touchent.

» Ainsi E devra faire partie du lieu des points où l'équation (2) a des racines multiples.

» Soit maintenant $n = 3$ et supposons que x_1, x_2, x_3 soient les coordonnées d'un point mobile dans l'espace, y_1, y_2 et y_3 les composantes de sa vitesse. L'équation $\psi_0 = 0$ est alors celle d'un complexe de droites.

» Si le polynome ψ_0 est exceptionnel, c'est-à-dire si ses coefficients ne sont pas rationnels en x et s'il fait exception au théorème de Bruns, toutes les droites du complexe devront être tangentes à la surface, lieu des points où l'équation (2) a des racines égales.

» Supposons enfin n quelconque. Écrivons que l'équation en s (2) a des racines égales; nous obtiendrons une équation

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

qui pourra n'être pas irréductible, mais se décompose en plusieurs autres

$$\Phi_1(x_i) = 0, \qquad \Phi_2(x_i) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi_k(x_i) = 0.$$

Considérons l'une de ces équations

$$\Phi_h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

et formons l'équation en t,

$$\Phi_h(x_1 + y_1 t, x_2 + y_2 t, \ldots, x_n + y_n t) = 0.$$

Exprimons que cette équation en t a deux racines égales, nous obtiendrons une relation

$$\Theta_h(x_i, y_i) = 0.$$

» Il pourra se faire que Θ_h se décompose en plusieurs facteurs entiers en y_i, rationnels en x_i et en s. S'il en est ainsi, chacun de ces facteurs sera un polynome ψ_0 exceptionnel.

» *A chaque équation en s ne pourra donc correspondre qu'un nombre fini de polynomes ψ_0 exceptionnels et irréductibles.*

» Ces polynomes exceptionnels n'existent pas toujours, car Θ_h peut ne pas être décomposable en facteurs.

» Qu'arrive-t-il en particulier dans le cas du problème des trois corps?

» On peut former trois polynomes Θ; l'un d'eux est

$$\begin{aligned}&[(x_1 - x_4)(y_2 - y_5) - (x_2 - x_5)(y_1 - y_6)]^2\\ + &[(x_2 - x_5)(y_3 - y_6) - (x_3 - x_6)(y_2 - y_5)]^2\\ + &[(x_3 - x_6)(y_1 - y_4) - (x_1 - x_4)(y_3 - y_6)]^2.\end{aligned}$$

» Chacun d'eux se décompose en deux facteurs; il y a donc des polynomes ψ_0 exceptionnels, mais *ces polynomes sont imaginaires*. Or on peut toujours supposer, sans restreindre la généralité, que l'intégrale $\frac{\psi}{\psi'}$ est réelle.

» Le résultat de M. Bruns se trouve donc confirmé; je suis heureux d'avoir pu compléter son élégante analyse sur un point de détail. »

ANATOMIE GÉNÉRALE. — *Une théorie nouvelle sur la cicatrisation et le rôle de l'épithélium antérieur de la cornée dans la guérison des plaies de cette membrane;* par M. **L. Ranvier.**

« Dans une Communication antérieure ([1]), m'appuyant sur les phénomènes que j'avais observés dans l'endothélium du péritoine, j'avais été conduit à formuler une théorie nouvelle sur la cicatrisation. Cette théorie a guidé quelques histologistes dans leurs recherches sur l'inflammation,

([1]) *De l'endothélium du péritoine et des modifications qu'il subit dans l'inflammation expérimentale; comment il faut comprendre la guérison des plaies par réunion immédiate* (*Comptes rendus*, t. CXII, p. 842; 1891).