COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 21 JUIN 1897,

PRÉSIDENCE DE M. A. CHATIN.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions abéliennes.* Note de M. H. **Poincaré**.

» *Toute fonction uniforme de p variables, 2p fois périodiques, est le quotient de deux fonctions* Θ.

» Ce théorème fondamental dans la théorie des fonctions abéliennes paraît avoir été connu de Riemann. Weierstrass en a découvert la démonstration, mais ne l'a pas publiée.

» M. Picard et moi nous avons publié dans les *Comptes rendus*, en collaboration, une démonstration de ce théorème fondamental; mais nous devions nous appuyer sur un théorème auxiliaire, que nous admettions et qui peut s'énoncer ainsi :

» *Entre* $p+1$ *fonctions uniformes de p variables, 2p fois périodiques, sans* *point singulier essentiel à distance finie, il y a toujours une relation algébrique.*

» Ce théorème auxiliaire semble avoir été connu de Weierstrass, qui n'en a pas non plus publié la démonstration.

» Depuis, M. Appell a publié, dans le *Journal de Liouville* (1891), une démonstration du théorème fondamental, fondée sur les propriétés d'une certaine équation fonctionnelle, et où il s'appuyait également sur un théorème relatif aux fonctions de deux variables que j'ai démontré dans le Tome II des *Acta mathematica*.

» Je voudrais aujourd'hui :

» 1° Démontrer le théorème auxiliaire ;

» 2° Donner une troisième démonstration du théorème fondamental.

» La démonstration du théorème auxiliaire se divise en trois parties :

» 1° Soient p fonctions périodiques $F_1, F_2, \ldots, F_p$; les zéros communs à ces p fonctions qui sont à l'intérieur du prismatoïde des périodes sont en nombre fini, à moins qu'elles ne forment une infinité continue.

» La démonstration est calquée sur celle qui montre que les zéros d'une fonction analytique d'une variable sont isolés.

» 2° Si les fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_p$ dépendent de plusieurs paramètres, et si l'on fait varier ces paramètres d'une manière continue, le nombre des zéros communs, s'il reste fini, demeure constant.

» On se sert, pour la démonstration, de l'intégrale de Kronecker, de la même façon que je m'en suis servi pour montrer que les zéros communs à p fonctions Θ sont au nombre de $p!$ (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. XI.)

» Comme conséquence immédiate, si p quelconques des $p+1$ fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_p, F_{p+1}$ ont des q zéros communs, alors p polynomes entiers en $F_1, F_2, \ldots, F_{p+1}$, l'un de degré K, les autres du premier degré, auront Kq zéros communs, à moins que leurs zéros ne forment une infinité continue.

» Soit $p=3$ pour fixer les idées.

» 3° Soit S un polynome d'ordre K en F_1, F_2, F_3, F_4; il contient

$$\frac{1}{24}(K+1)(K+2)(K+3)(K+4)$$

coefficients arbitraires. Soient ensuite

$$P_1, P_2, \ldots, P_n$$

n polynomes du premier degré en F_1, F_2, F_3, F_4. Considérons une combinaison quelconque de ces n polynomes deux à deux P_i et P_j. Considérons $(Kq+1)$ zéros communs à P_i et à P_j. Nous pourrons disposer des coefficients de S de façon que, pour chacune des combinaisons P_i, P_j, ces $(Kq+1)$ zéros annulent également S; cela sera possible pourvu que

$$(1)\qquad \frac{(K+1)(K+2)(K+3)(K+4)}{24} > \frac{n(n-1)(Kq+1)}{2}.$$

» Alors S, P_i et P_j ayant plus de Kq zéros communs en auront une infinité. Il résulte de là que, si Q_1 est un polynome quelconque du premier degré en F_1, F_2, F_3, F_4, les quatre polynomes S, P_i, P_j et Q_1 auront au moins un zéro commun.

» Mais alors S, P_i et Q_1 auront au moins $n-1$ zéros communs, et, si

$$(2)\qquad n-1 > Kq,$$

ils en auront une infinité.

» Donc si Q_2 est un polynome quelconque du premier degré, S, P_i, Q_1 et Q_2 auront au moins un zéro commun. Donc S, Q_1 et Q_2 en auront au moins n et, par conséquent, une infinité.

» Donc le polynome S présente une triple infinité de zéros; donc c'est une fonction uniforme qui s'annule, ainsi que ses dérivées de tous les ordres. Elle est donc identiquement nulle et il y a une relation algébrique entre les F.

» Il est facile de voir qu'on peut choisir K et n de façon à satisfaire aux inégalités (1) et (2).

» Le théorème auxiliaire est donc établi; passons à la démonstration nouvelle du théorème fondamental. J'ai dit que M. Appell s'était appuyé pour le démontrer sur une proposition que j'ai établie dans le Tome II des *Acta*. Mais il suffit de changer peu de chose à la démonstration de cette proposition elle-même pour que le théorème fondamental s'en déduise immédiatement.

» Supposons $p=2$ pour fixer les idées. Soit F une fonction périodique.

» Soient $x=\xi_1+i\xi_2$, $y=\xi_3+i\xi_4$, et considérons les ξ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à quatre dimensions. Il y aura une variété V à deux dimensions le long de laquelle F s'annulera. Soient $d\omega'$ un élément de cette variété; ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, ξ'_4 le centre de gravité de cet élément; soit r la distance des deux points ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 et ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, ξ'_4. Développons $\frac{1}{r^2}$ suivant les puissances des ξ et soit H ce qui reste de ce développement quand on a supprimé les termes de degrés o, 1 et 2. On aura

$$\Delta H = 0.$$

» Soit maintenant l'intégrale

$$\Phi = \int H \mu' d\omega',$$

où μ' est une fonction des ξ' convenablement choisie et où l'intégrale est étendue à tous les éléments de la variété V.

» 1° Cette intégrale est finie.

» 2° Elle satisfait à l'équation $\Delta\Phi = 0$ et elle est finie, sauf dans le voisinage de la variété V où la différence

$$\Phi - \log|F|$$

est finie.

» 3° Quand les variables augmentent d'une période, la fonction Φ augmente d'un polynome du premier degré par rapport aux ξ.

» Pour que Φ puisse être regardée comme la partie réelle d'une fonction imaginaire, il ne suffit pas que $\Delta\Phi$ soit nulle, mais Φ doit satisfaire à plusieurs autres équations du même genre

$$D_1\Phi = D_2\Phi = \ldots = 0.$$

» Cela n'a pas lieu; mais, d'après le Mémoire cité (*Acta*, t. II), nous aurons

$$D_1\Phi = g_1, \qquad D_2\Phi = g_2, \qquad \ldots,$$

où g_1, g_2 sont des fonctions entières satisfaisant à l'équation de Laplace. Nous verrions ici que g_1, g_2, ... sont périodiques et nous en conclurions que ce sont des constantes.

» Les équations sont d'ailleurs compatibles et il existera un polynome G du second degré, tel que

$$D_1 G = g_1, \qquad D_2 G = g_2, \qquad \ldots.$$

» Alors $\Phi - G$ sera la partie réelle d'une fonction imaginaire

$$\Phi - G + i\Psi.$$

» On verrait aisément qu'en augmentant les variables d'une période on augmente $\Phi - G$, et Ψ, de même que Φ, d'un polynome du premier degré par rapport aux ξ.

» La fonction

$$e^{\Phi - G + i\Psi}$$

est donc une *fonction intermédiaire*. C. Q. F. D. »

HYDRODYNAMIQUE. — *Expression des petites composantes transversales de la vitesse dans les écoulements graduellement variés des liquides.* Note de M. **Boussinesq.**

« I. Notre première approximation donne la même célérité ω à toutes les parties d'une intumescence quelconque. Donc le problème important de leur lente déformation requiert une approximation plus élevée; et celle-ci exige généralement l'évaluation, dans (25) (p. 1265), des termes de $\alpha - \eta$ et η qui dépendent de la variation du mouvement ([1]). Alors l'intégration du système (10) et, par le fait même, le calcul des accélérations u' deviennent inévitables.

» Nous poserons, pour définir le mode de distribution des vitesses aux divers points (y, z), ou (η, ζ), de la section σ d'abscisse x,

$$(39) \qquad \frac{u}{U} = \varphi + \varpi, \qquad \text{ou} \qquad u = U(\varphi + \varpi),$$

φ étant la fonction de η, ζ et de la forme de σ, qui exprimerait le rapport de u à U si le régime uniforme existait à la traversée de cette section, et ϖ, fonction à déterminer de η, ζ, x et t, représentant le petit écart dû à la variation du mouvement. Si nous désignons par le symbole d_c la différentielle *complète* de la quantité écrite à la suite, c'est-à-dire sa différentielle prise en suivant, durant l'instant dt, une même particule fluide (dans son mouvement moyen local), nous aurons successivement, vu que $u = U(\varphi + \varpi)$, que y, z ne figurent pas dans U, enfin que les termes non linéaires par rapport à v, w, ϖ et aux dérivées de u, U, φ en x et t sont négligeables,

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} u' &= (\varphi + \varpi)\frac{d_c U}{dt} + U\frac{d_c(\varphi + \varpi)}{dt} \\ &= \varphi\left(\frac{dU}{dt} + u\frac{dU}{dx}\right) + U\left(\frac{d\varphi}{dt} + u\frac{d\varphi}{dx} + v\frac{d\varphi}{dy} + w\frac{d\varphi}{dz}\right) + U\left(\frac{d\varpi}{dt} + u\frac{d\varpi}{dx}\right) \\ &= \frac{dU}{dt}\varphi + U\frac{dU}{dx}\varphi^2 + U\left(\frac{d\varphi}{dt} + U\varphi\frac{d\varphi}{dx} + v\frac{d\varphi}{dy} + w\frac{d\varphi}{dz}\right) + U\left(\frac{d\varpi}{dt} + U\varphi\frac{d\varpi}{dx}\right). \end{aligned} \right.$$

([1]) *Comptes rendus*, 8 juin, p. 1265.