

SUR L'INTÉGRATION ALGÈBRE DES ÉQUATIONS
DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE ET DU PREMIER DEGRÉ.

Par M. H. POINCARÉ, à Paris.

Adunanza del 23 maggio 1897.

J'ai publié sur ce sujet un premier article, qui a paru dans les *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (tome V, année 1891). Je me suis occupé de nouveau de la même question dans ces derniers temps, dans l'espoir que je parviendrais à généraliser les résultats obtenus. Cet espoir a été déçu. J'ai obtenu cependant quelques résultats partiels, que je prends la liberté de publier, estimant qu'on pourra s'en servir plus tard pour obtenir, par un nouvel effort, une solution plus satisfaisante du problème.

C'est à ce premier article que je renverrai quand je parlerai de « la 1^{re} partie de ce travail ». J'adopterai d'ailleurs la même terminologie et les mêmes notations que dans cette 1^{re} partie.

C'est ainsi que la lettre $\sum$ représentera une sommation portant sur toutes les valeurs critiques de C et tous les facteurs u . La lettre S en caractères gras représentera une sommation étendue à une seule valeur critique de C et à tous les facteurs u , correspondant à cette valeur. La lettre S en caractères ordinaires représentera une sommation étendue à tous les nœuds.

Soit C une valeur remarquable quelconque et soit

$$f + C\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_k^{\alpha_k} = v_1^{\alpha'_1} v_2^{\alpha'_2} \dots v_k^{\alpha'_k}$$

l'identité correspondante.

Nous aurons toujours les relations :

$$p = S \alpha_i n_i = S \alpha'_i n'_i, \quad \lambda = S \alpha'_i \lambda'_i.$$

Soit maintenant H_{ik} le nombre des points d'intersection des courbes $u_i = 0$, $u_k = 0$ situés en des cols; et H'_{ik} le nombre des points d'intersection des courbes $v_i = 0$, $v_k = 0$ situés en des cols. Comme $v_i = 0$ équivaut à b_i courbes $u_i = 0$ confondues et $v_k = 0$ à b_k courbes $u_k = 0$ confondues, on aura :

$$H'_{ik} = b_i b_k H_{ik}.$$

Le nombre total des intersections de $v_i = 0$, $v_k = 0$ sera :

$$(1) \quad n'_i n'_k = S \lambda'_i \lambda'_k \mu v + H'_{ik}.$$

Celui des intersections de $v_i = 0$ avec une courbe $f + C_i \varphi = 0$ quelconque sera :

$$p n'_i = S \lambda \lambda'_i \mu v,$$

d'où

$$n'_i S \alpha'_i n'_k = S [\lambda'_i \mu v S \alpha'_k \lambda'_k]$$

ou

$$\alpha'_i n_i^2 + \sum_i \alpha'_i n'_i n'_k = \alpha'_i S \lambda_i^2 \mu v + \sum_i \alpha'_i S \lambda'_i \lambda'_k \mu v.$$

Or

$$\sum_i \alpha'_i n'_i n'_k = \sum_i \alpha'_i S \lambda'_i \lambda'_k \mu v + \sum_i \alpha'_i H'_{ik},$$

d'où

$$(2) \quad \alpha'_i n_i'^2 = \alpha'_i S \lambda_i'^2 \mu v + \sum_k \alpha'_k H'_{ik}.$$

Soient $x_1, x_2, \dots, x_k$ des indéterminées; multiplions l'équation (1) par $2 \alpha'_i \alpha'_k x_i x_k$, l'équation (2) par $\alpha'_i x_i^2$ et faisons la somme de toutes les équations analogues; il viendra :

$$(3) \quad [S \alpha'_i x_i n_i']^2 = S \mu v [S \alpha'_i x_i \lambda_i']^2 - SS \alpha'_i \alpha'_k H'_{ik} (x_i - x_k)^2.$$

Le signe SS se rapporte à une sommation portant sur toutes les combinaisons des indices i et k , chaque combinaison intervenant une fois.

La formule (3) est la généralisation évidente de la formule qui est au début de la page 181.

D'autre part :

$$n_i' = b_i n_i, \quad \alpha_i' = \frac{\alpha_i}{b_i}.$$

La formule (3) devient alors :

$$(3^{bis}) \quad [S \alpha_i n_i x_i]^2 = S \mu v \left[S \alpha_i x_i \frac{\lambda_i'}{b_i} \right]^2 - SS \alpha_i \alpha_k H_{ik} (x_i - x_k)^2.$$

Le terme $\frac{\lambda_i'}{b_i}$ est égal à λ_i , si le facteur u , n'est pas singulier.

Plusieurs cas sont à considérer, suivant la nature de la valeur remarquable C . Si C est de 1^{re} espèce, les α_i , les α_i' et les b_i sont tous égaux à 1 et on a simplement :

$$[S n_i x_i]^2 = S \mu v [S \lambda_i x_i]^2 - SS H_{ik} (x_i - x_k)^2.$$

Si C est d'une des 3 dernières espèces et que les α aient un diviseur commun δ , et si l'on pose :

$$\alpha_i = \alpha_i'' \delta,$$

on pourra diviser l'équation (3^{bis}) par δ^2 et l'écrire :

$$(3^{ter}) [S \alpha_i'' n_i x_i]^2 = S_{\mu \nu} \left[S \alpha_i'' x_i \frac{\lambda_i'}{b_i} \right]^2 - S S \alpha_i'' \alpha_i'' H_{\mu \nu} (x_i - x_{\nu})^2.$$

Les coefficients α_i'' sont alors premiers entre eux.

Recherche des valeurs remarquables.

Considérons une valeur remarquable de C et la relation (3^{bis}) correspondante. Soit q le nombre des facteurs distincts dans lequel se décompose le polynôme $f + C\varphi$; je dis que le nombre des cols qui interviennent dans la formule (3^{bis}) correspondante est au moins égal à $q - 1$, de telle sorte que l'on a :

$$S S H_{\mu \nu} \geq q - 1.$$

Si, en effet, il n'en était pas ainsi, on pourrait mettre $f + C\varphi$ sous la forme d'un produit de deux facteurs, qui ne seraient d'ailleurs pas forcément irréductibles, et tels qu'il n'y aurait pas de col pour lequel ces deux facteurs s'annulent à la fois. Alors, d'après ce que nous avons vu dans la première partie de ce travail, le polynôme $f + C\varphi$ serait décomposable pour toutes les valeurs de C , ce que nous ne supposons pas.

Pour nous en rendre compte, représentons chacun de nos q facteurs par un point, et joignons deux de ces points par un trait, s'il existe un col pour lequel les deux facteurs correspondants à ces points s'annulent à la fois. S'il y a moins de $q - 1$ cols, il y aura aussi moins de $q - 1$ traits; et il sera impossible d'aller d'un quelconque de nos q points à un autre quelconque de ces q points en suivant les traits ainsi tracés.

Nos q points seront donc répartis au moins en deux groupes, de telle sorte qu'on puisse en suivant les traits aller d'un point d'un groupe à un autre point du même groupe, mais non passer d'un groupe à l'autre.

Soit alors U le produit de tous les facteurs u_i correspondant au premier groupe, chacun de ces facteurs étant affecté de l'exposant

α , correspondant. Soit V le produit de tous les facteurs u_i correspondant à tous les autres groupes, chacun d'eux affecté de son exposant. On aura :

$$f + C\varphi = UV$$

et il n'y aura pas de col pour lequel U et V s'annulent à la fois. Soit B le nombre des cols.

Soit A_1 le nombre des valeurs remarquables de la 1^{ère} espèce; Q_1 le nombre total des facteurs correspondants, c'est-à-dire la somme de tous les nombres q relatifs à ces diverses valeurs remarquables de la 1^{ère} espèce.

Soit A_2 et Q_2 , A_3 et Q_3 , A_4 et Q_4 , A_5 et Q_5 les nombres correspondants pour les valeurs remarquables de la 2^{de}, de la 3^{ème}, de la 4^{ème} et de la 5^{ème} espèce.

D'après le résultat que nous venons d'obtenir on aura :

$$B \geq Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 - A_1 - A_2 - A_3 - A_4$$

et comme d'après la définition des valeurs des 4 premières espèces

$$Q_1 \geq 2A_1, \quad Q_2 \geq 2A_2, \quad Q_3 \geq 2A_3, \quad Q_4 \geq 2A_4,$$

il viendra :

$$B \geq A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$$

D'autre part, d'après la définition des valeurs de la 5^{ème} espèce, on aura :

$$Q_5 = A_5.$$

Enfin, d'après le théorème d'Halphen (loco citato, page 187):

$$A_1 + A_2 + A_3 \leq 2.$$

Ces inégalités limitent le nombre des valeurs remarquables et même les nombres Q_i . En effet le nombre des cols B est connu,

Mais on peut aller plus loin. Soit une valeur remarquable de l'une des deux premières espèces; soit

$$f + C\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} u_3^{\alpha_3} u_4^{\alpha_4}$$

la décomposition correspondante; je suppose quatre facteurs pour fixer les idées. Les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ doivent être premiers entre eux. Représentons ces quatre facteurs par les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 ; ces 4 points devront être joints au moins par trois traits correspondant chacun à un col. Je suppose pour fixer les idées que ces trois traits soient les traits $M_1 M_2, M_2 M_3, M_3 M_4$. A chacun de ces traits correspondra un col que nous devons choisir parmi les B cols de notre équation différentielle; comme ces cols sont connus et en nombre fini, nous ne pourrons faire qu'un nombre fini d'hypothèses.

Considérons le col qui correspond au trait $M_1 M_2$; ses entiers caractéristiques μ et ν seront connus et nous devrons avoir :

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\mu}{\nu} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\nu}{\mu}.$$

Nous n'avons ici à choisir qu'entre deux hypothèses; il en serait de même en ce qui concerne les cols qui correspondent aux deux autres traits et les rapports correspondants $\frac{\alpha_2}{\alpha_3}$ et $\frac{\alpha_4}{\alpha_3}$.

En résumé, *les rapports des quatre exposants α_i sont connus*, ou plutôt nous ne pouvons faire en ce qui les concerne qu'un *nombre fini d'hypothèses*.

Mais, si la valeur remarquable est de l'une des deux premières espèces, les nombres α_i sont premiers entre eux; nous connaissons donc les nombres α_i eux-mêmes.

Si, au contraire, la valeur remarquable est de l'une des trois dernières espèces, les nombres α_i ne sont plus premiers entre eux; mais nous pouvons poser :

$$\alpha_i = \alpha'_i \delta,$$

le nombre δ étant le plus grand commun diviseur des α_i ; nous connaissons alors les nombres α'_i qui sont premiers entre eux; mais nous ne connaissons pas δ .

En résumé, au sujet du nombre des valeurs remarquables des cinq espèces, du nombre des facteurs correspondant à chacune d'elles, des exposants α_i relatifs aux valeurs remarquables des deux premières espèces, des nombres α'_i relatifs aux valeurs remarquables des trois dernières espèces, nous ne pouvons faire qu'un nombre fini d'hypothèses : *Les deux plus grands communs diviseurs δ_1 et δ_2 relatifs aux deux valeurs remarquables des trois dernières espèces, si elles existent, demeurent complètement inconnus.*

Valeurs des n_i .

Adoptons, au sujet du nombre des valeurs remarquables de chaque espèce, de même qu'au sujet des exposants α_i ou α'_i , une des hypothèses en nombre fini que nous pouvons faire. Il nous reste à déterminer les deux nombres δ_1 et δ_2 , les deux nombres p et λ , ainsi que les nombres n_i et λ_i .

D'un autre côté, nous ne pouvons faire qu'un nombre fini d'hypothèses au sujet de ceux de nos facteurs qui sont critiques ou hypercritiques, ou doublement singuliers par rapport aux divers nœuds. Ces hypothèses pourront être examinées successivement. Nous adopterons donc l'une d'entre elles; les nombres b_i pourront alors être regardés comme connus, ainsi que les rapports des exposants α'_i .

Nous aurons alors, pour déterminer les nombres n_i , les relations suivantes :

$$(4) \quad m + 2 = 2p - \sum (\alpha_i - 1)n_i, \quad p = S \alpha_i n_i = S \alpha'_i n'_i.$$

Ces relations peuvent suffire si le nombre des valeurs remarquables de C n'excède pas deux. Dans ce cas, en effet, on aura :

$$p = S \alpha_i n_i$$

pour chacune des deux valeurs remarquables, et, en addition

les deux équations ainsi obtenues, il viendra :

$$2p = \sum \alpha_i n_i.$$

En remplaçant dans l'équation qui donne $m + 2$, on trouve :

$$m + 2 = \sum \alpha_i n_i - \sum (\alpha_i - 1) n_i = \sum n_i.$$

Les nombres n_i et le degré p sont donc limités.

Mais il n'en est plus de même si le nombre des valeurs remarquables est supérieur à 2. Il y a lieu de se demander alors si les équations (4) comportent une infinité de solutions en nombres entiers.

Discutons cette question, en considérant d'abord les exposants α_i comme donnés.

Soit q le nombre des valeurs remarquables, $C_1, C_2, \dots, C_q$ ces valeurs, K le nombre des facteurs relatifs à C_1 . Soient :

$$\alpha_1^1, \alpha_1^2, \dots, \alpha_1^K$$

$$n_1^1, n_1^2, \dots, n_1^K$$

les valeurs des nombres α_i et n_i correspondant à ces K facteurs.

Soit :

$$\alpha_1^1 < \alpha_1^2 < \dots < \alpha_1^K.$$

Les équations (4) nous donnent alors :

$$\sum n_i = (q - 2)p + m + 2.$$

D'autre part, si $a_1, a_2, \dots, a_q$ sont q nombres positifs tels que

$$a_1 + a_2 + \dots + a_q = q - 2,$$

on aura :

$$(q - 2)p = a_1 S \alpha_1^1 n_1^1 + a_2 S \alpha_2^1 n_2^1 + \dots + a_q S \alpha_q^1 n_q^1,$$

d'où :

$$(5) \quad \sum n_i = a_1 S \alpha_1^i n_1^i + \dots + a_q S \alpha_q^i n_q^i + m + 2.$$

L'équation (5) est évidemment impossible si l'on peut choisir les nombres a_k de telle sorte que l'on ait à la fois

$$a_1 \alpha_1^i > 1, \quad a_2 \alpha_2^i > 1, \quad \dots, \quad a_q \alpha_q^i > 1;$$

c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{1}{\alpha_1^i} + \frac{1}{\alpha_2^i} + \dots + \frac{1}{\alpha_q^i} < q - 2.$$

Donc, pour que les équations (4) admettent des solutions, *il faut* que :

$$(5) \quad \frac{1}{\alpha_1^i} + \frac{1}{\alpha_2^i} + \dots + \frac{1}{\alpha_q^i} > q - 2.$$

Maintenant, dans quels cas les équations (4) admettront-elles une infinité de solutions ? Pour cela il faut et il suffit que les équations (4^{bis}) en p et en n_i ,

$$(4^{bis}) \quad 2p = \sum (\alpha_i - 1) n_i, \quad p = S \alpha_i n_i,$$

admettent des solutions positives.

Si l'on peut trouver des nombres a_k tels que :

$$(6) \quad a_k \alpha_k^i < 1 < a_k \alpha_k^k \quad (k = 1, 2, \dots, q)$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_q = q - 2,$$

il est clair que les équations (4^{bis}) admettront des solutions positives; on pourra, en effet, satisfaire aux conditions :

$$(7) \quad S n_i^1 = a_1 S \alpha_1^1 n_1^1, \quad S n_i^2 = a_2 S \alpha_2^2 n_2^2 \dots$$

Réciproquement, pour que les équations (4^{bis}) admettent des solutions positives, il suffit que les équations (7) en admettent, les nombres a_i étant convenablement choisis; il suffit donc que l'on puisse satisfaire aux conditions (6).

Mais pour qu'on puisse satisfaire aux conditions (6) il faut et il suffit que l'on ait à la fois l'inégalité :

$$(5) \quad \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_q} = \sum \frac{1}{\alpha_i} > q - 2$$

et l'inégalité :

$$(8) \quad \sum \frac{1}{\alpha_i^2} < q - 2.$$

En résumé, si les inégalités (5) et (8) ont lieu à la fois, les équations (4) admettent une infinité de solutions.

Si l'inégalité (5) a lieu seule, elles peuvent en comporter un nombre fini ou n'en comporter aucune.

Si enfin l'inégalité (5) n'a pas lieu, elles n'en admettent aucune.

Nous avons supposé jusqu'ici que les nombres α_i étaient connus. Cela est vrai en ce qui concerne les valeurs remarquables des deux premières espèces. Mais cela n'est plus vrai s'il existe des valeurs des trois dernières espèces. En ce qui concerne ces dernières, nous ne connaissons que les α_i'' ; mais nous ne connaissons pas les deux plus grands communs diviseurs δ_1 et δ_2 , relatifs aux deux valeurs des trois dernières espèces qui peuvent exister. Posons alors :

$$A_i = \sum \frac{1}{\alpha_i},$$

la sommation s'étendant seulement aux valeurs des deux premières espèces.

Soit $\frac{1}{A_i}$ le plus petit des nombres α_i'' relatifs à la première des valeurs des trois dernières espèces, si cette valeur existe; si elle n'existe pas, nous ferons $A_i = 0$.

Soit de même $\frac{1}{A_2}$ le plus petit des nombres α_i'' relatifs à la seconde valeur des trois dernières espèces; si elle n'existe pas nous prendrons $A_2 = 0$. Nous pouvons toujours supposer $A_1 > A_2$. L'inégalité (5) devient alors :

$$A_0 + \frac{A_1}{\delta_1} + \frac{A_2}{\delta_2} > q - 2.$$

Si $A_0 > q - 2$, l'inégalité sera satisfaite quels que soient les nombres δ_1 et δ_2 .

Si $A_0 + A_1 > q - 2$, $A_0 + A_2 < q - 2$, on pourra prendre δ_2 aussi grand qu'on voudra, mais δ_1 sera limité.

Si $A_0 + A_2 > q - 2$, $A_0 < q - 2$, on pourra prendre l'un des deux nombres δ_1 et δ_2 (mais non tous deux à la fois) aussi grand que l'on voudra.

Si enfin $A_0 + A_1 < q - 2$, les deux nombres δ_1 et δ_2 seront tous deux limités.

Ainsi donc, dans le cas où on aura

$$A_0 + A_1 < q - 2$$

et où l'inégalité (8) ne sera pas satisfaite, même dans l'hypothèse $\delta_1 = \delta_2 = 0$, on ne pourra faire au sujet des nombres δ_1 et δ_2 qu'un nombre fini d'hypothèses et les équations (4) n'auront qu'un nombre fini de solutions.

Le degré p est donc limité.

Il existe donc des cas très étendus où, comme dans celui que j'ai examiné dans la première partie de ce travail, le degré p est limité et où, par conséquent, le problème de l'intégration algébrique peut être regardé comme résolu.

Valeurs des λ_i .

Les nombres λ_i doivent satisfaire à certaines équations analogues aux équations (4).

Considérons d'abord un nœud dicritique, nous **devrons** avoir:

$$(9) \quad \lambda = \sum \alpha_i \lambda_i, \quad 2 = 2\lambda - \sum (\alpha_i - 1) \lambda_i.$$

Les équations (9) tout-à-fait analogues aux équations (4) se discuteraient de la même manière et cette discussion conduirait au même résultat.

Si les inégalités (5) et (8) ont lieu à la fois, les équations (9) admettent une infinité de solutions.

Si l'inégalité a lieu seule, elles peuvent en comporter un nombre fini ou n'en comporter aucune.

Si l'inégalité (5) n'a pas lieu, elles n'en admettent aucune.

Envisageons maintenant un nœud monocritique.

Dans ce cas la première équation (6) doit être remplacée par la suivante :

$$(9^{bis}) \quad \lambda = \sum \alpha_i \lambda_i + \varepsilon_1 \alpha_1 \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) + \varepsilon_2 \alpha_2 \left(\frac{1}{\nu} - 1 \right);$$

α_1 est l'exposant du facteur critique, α_2 celui du facteur hypercritique; ε_1 est égal à 0 ou à 1, suivant que le facteur critique correspond ou non à la valeur remarquable envisagée; et ε_2 est défini de la même manière en ce qui concerne le facteur hypercritique.

De même, la seconde équation (9) doit être remplacée par

$$(9^{ter}) \quad (2\lambda - 2) + \alpha_1 \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) + \alpha_2 \left(1 - \frac{1}{\nu} \right) = \sum (\alpha_i - 1) \lambda_i.$$

Nous avons q équations (9^{bis}) correspondant aux q valeurs remarquables; en les additionnant on trouve :

$$q\lambda = \sum \alpha_i \lambda_i + \alpha_1 \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) + \alpha_2 \left(\frac{1}{\nu} - 1 \right)$$

et en combinant avec (9^{ter})

$$(10) \quad \sum \lambda_i = (q - 2)\lambda + 2.$$

Soient encore $a_1, a_2, \dots, a_q$ q nombres positifs tels que

$$a_1 + a_2 + \dots + a_q = q - 2.$$

Désignons par λ_i^1 les nombres λ_i relatifs à la valeur remarquable C_1 , de même que nous avons désigné par n_i^1 les nombres n_i relatifs à cette valeur remarquable C_1 .

Nous pourrions écrire :

$$\begin{aligned} \sum \lambda_i &= a_1 \sum \alpha_i^1 \lambda_i^1 + a_2 \sum \alpha_i^2 \lambda_i^2 + \dots + a_q \sum \alpha_i^q \lambda_i^q + \\ &+ a'_1 \alpha_1 \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) + a'_2 \alpha_2 \left(\frac{1}{\nu} - 1 \right) + 2; \end{aligned}$$

a'_i est celui des nombres a_i qui se rapporte à la valeur remarquable correspondant au facteur critique et a'_i est défini de même par rapport au facteur hypercritique.

Pour que les équations (9^{bis}) et (9^{ter}) admettent une infinité de solutions, il faut et il suffit que les équations

$$\lambda = S \alpha_i \lambda_i, \quad 2\lambda = \sum (\alpha_i - 1) \lambda_i$$

admettent des solutions positives; c'est-à-dire que les inégalités (5) et (8) aient lieu.

Si l'on observe maintenant que les nombres λ_i et n_i ne sont pas indépendants, mais qu'ils sont liés par les relations (3) et (3^{bis}), on pourra espérer que nos équations (4), (9^{bis}) et (9^{ter}) n'admettront qu'un nombre fini de solutions *compatibles avec les relations (3)* alors même que les inégalités (5) et (8) auraient lieu.

Mais cet espoir serait trompé en général; on serait conduit à une discussion qu'il est inutile de développer ici et qui conduirait à la résolution d'une équation de Pell ou d'une équation analogue. L'équation de Pell, on le sait, admet une infinité de solutions.

Cas des neuf nœuds dicritiques.

On se trouve donc en présence de difficultés que je ne puis encore surmonter. Je me bornerai donc à traiter un cas particulier.

simple, où la nature de ces difficultés apparaît clairement, bien qu'on puisse en triompher.

Supposons $m = 4$ et que tous les nœuds soient dicritiques; d'après ce que nous avons vu dans la première partie de ce travail, le genre des courbes $f + C\varphi = 0$ sera égal à 1.

D'autre part, le nombre des points singuliers sera

$$m^2 + m + 1 = 21.$$

Je supposerai que ces 21 points singuliers sont 9 nœuds dicritiques et 12 cols.

Par les 9 nœuds je puis faire passer une cubique. Soit p le degré de la courbe $f + C\varphi = 0$; elle aura avec la cubique $3p$ points d'intersection dont un certain nombre seront confondus avec les nœuds. Si on envisage les neuf nombres λ relatifs aux neuf nœuds et la somme $S\lambda$ de ces neuf nombres, on aura :

$$3p = S\lambda + b,$$

b étant le nombre des points d'intersection mobiles situés en dehors des nœuds.

On aura d'autre part :

$$p^2 = S\lambda^2,$$

d'où :

$$(x^2 p^2 + 6xp + 9) = S(x^2 \lambda^2 + 2x\lambda + 1) + 2xb,$$

$$(1) \quad (xp + 3)^2 = S(x\lambda + 1)^2 + 2xb.$$

D'autre part on a, en appelant q le genre de la courbe $f + C\varphi = 0$,

$$\frac{(p-1)(p-2)}{2} = S \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} + q,$$

ou

$$p^2 - 3p + 2 = S\lambda^2 - S\lambda + 2q,$$

ou enfin

$$2(q - 1) + b = 0,$$

ce qui conduit à deux solutions :

$$q = 1, \quad b = 0; \quad \text{ou} \quad q = 0, \quad b = 2.$$

C'est la première qui convient, puisque $q = 1$ d'après ce que nous avons vu dans la première partie; on a donc $b = 0$ et la cubique n'a pas de point d'intersection mobile avec les courbes $f + C\varphi = 0$. L'équation (1) se réduit donc à

$$(xp + 3)^2 = S(x\lambda + 1)^2;$$

et en faisant $x = -\frac{3}{p}$ et multipliant par p^2 :

$$S(3\lambda - p)^2 = 0,$$

ce qui montre que tous les λ sont égaux entre eux et égaux à $\frac{p}{3}$.

Soient $u_1, u_2, \dots, u_9$ les arguments elliptiques des neuf nœuds sur la cubique; on devra avoir :

$$S\lambda u \equiv 0,$$

c'est-à-dire égale une période (des fonctions elliptiques envisagées).

Donc Su est égal à une période divisée par λ , c'est-à-dire par $\frac{p}{3}$.

Si nous connaissons l'équation différentielle, nous connaissons les neuf nœuds, nous connaissons donc la cubique et les neuf arguments elliptiques u . Nous verrons donc si Su est commensurable avec une période. C'est là une condition nécessaire pour que l'intégration algébrique soit possible.

Supposons-là remplie; le nombre λ est par là-même connu.

Considérons 8 de nos nœuds; peut-on construire une courbe de degré 3λ admettant ces 8 nœuds comme points d'ordre λ ?

Une courbe de degré 3λ est déterminée par

$$\frac{3\lambda(3\lambda + 3)}{2}$$

points. D'autre part, un point multiple d'ordre λ compte pour

$$\frac{\lambda(\lambda + 1)}{2}$$

conditions. Il nous restera donc :

$$\frac{9\lambda(\lambda + 1)}{2} - 8\frac{\lambda(\lambda + 1)}{2} = \frac{\lambda(\lambda + 1)}{2}$$

points disponibles.

Imposons-nous encore que le neuvième nœud soit un point multiple d'ordre $\lambda - 1$, ce qui fait

$$\frac{\lambda(\lambda - 1)}{2}$$

conditions; il reste

$$\frac{\lambda(\lambda + 1)}{2} - \frac{\lambda(\lambda - 1)}{2} = \lambda$$

conditions.

Menons par le neuvième nœud $\lambda - 1$ droites quelconques non tangentes à la cubique et imposons-nous que ces $\lambda - 1$ droites rencontrent la courbe d'ordre 3λ en λ points confondus. De sorte que, ou bien le neuvième nœud sera encore un point multiple d'ordre λ , ou bien ces $\lambda - 1$ droites seront les $\lambda - 1$ tangentes à la courbe au neuvième nœud. Cela fait encore $\lambda - 1$ conditions; il nous restera donc encore un paramètre.

Cela posé, les 9λ points d'intersection de la cubique avec la courbe d'ordre 3λ , seront λ points confondus avec les 8 premiers nœuds, $\lambda - 1$ points confondus avec le neuvième nœud, et un point inconnu.

Soit u_{10} l'argument elliptique de ce point inconnu, on aura :

$$\lambda(u_1 + u_2 + \dots + u_8) + (\lambda - 1)u_9 + u_{10} = 0.$$

Or, par hypothèse,

$$S\lambda u \equiv 0.$$

Donc :

$$u_9 \equiv u_{10}.$$

Donc le point inconnu se confond avec le neuvième nœud; nous avons donc λ droites, à savoir la tangente à la cubique et les $\lambda - 1$ droites construites plus haut, qui rencontrent la courbe d'ordre 3λ en λ points confondus. Le neuvième nœud est donc un point multiple d'ordre λ de la courbe d'ordre 3λ .

Nous avons donc défini un faisceau de courbes d'ordre 3λ admettant nos 9 nœuds comme points multiples d'ordre λ .

Soit $\psi = 0$ l'une de ces courbes.

Cherchons en quels points cette courbe touche l'une des courbes définies par nos équations différentielles, équations que j'écrirai comme dans la 1^{ère} partie :

$$(2) \quad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Le lieu des points où une des courbes définies par les équations (2) peut toucher la courbe $\psi = 0$ est

$$(3) \quad L \frac{d\psi}{dx} + M \frac{d\psi}{dy} + N \frac{d\psi}{dz} = 0.$$

Comme par hypothèse L , M et N sont d'ordre 3, et ψ d'ordre 3λ , le premier membre de (3) est un polynôme homogène d'ordre

$$3\lambda + 3.$$

Le nombre total des points d'intersection de (3) et de $\psi = 0$ est donc :

$$9\lambda(\lambda + 1).$$

Considérons maintenant l'un de nos 9 nœuds dicritiques; soient x_0, y_0, z_0 ses coordonnées; nous pourrions toujours supposer que ce point n'est pas sur la droite de l'infini $z = 0$, ce qui nous permettra de supposer $z_0 = 1$.

Développons ψ suivant les puissances de $x - x_0z, y - y_0z$; il viendra :

$$\psi = \psi_\lambda + \psi_{\lambda+1} + \dots + \psi_{2\lambda},$$

en appelant ψ_k un ensemble de termes homogènes de degré k en $x - x_0z$ et $y - y_0z$, multipliés par $z^{\lambda-k}$.

Le nœud considéré est un point multiple d'ordre λ de $\psi = 0$ et les directions des λ tangentes sont données par l'équation homogène :

$$\psi_\lambda = 0.$$

Développons de même

$$zL - xN, \quad zM - yN$$

suitant les puissances croissantes de $x - x_0z, y - y_0z$; il viendra :

$$zL - xN = A z^\lambda (x - x_0z) + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4,$$

$$zM - yN = A z^\lambda (y - y_0z) + \eta'_2 + \eta'_3 + \eta'_4,$$

les η_k et les η'_k étant des polynômes homogènes d'ordre k en $x - x_0z, y - y_0z$ multipliés par $z^{\lambda-k}$.

Il est à remarquer que le coefficient A est le même dans les deux formules; c'est précisément ce qui caractérise les nœuds dicritiques.

Comment trouver les termes du degré le moins élevé en

$(x - x_0 z)$, $(y - y_0 z)$ dans le 1^{er} membre de (3)? Appelons Θ le 1^{er} membre de (3); il viendra :

$$3 \lambda \psi = x \frac{d\psi}{dx} + y \frac{d\psi}{dy} + z \frac{d\psi}{dz},$$

d'où :

$$(4) \quad z \Theta - 3 \lambda N \psi = (zL - xN) \frac{d\psi}{dx} + (zM - yN) \frac{d\psi}{dy}.$$

Les termes de degré le moins élevé du 2^d membre sont évidemment :

$$A z^4 \left[(x - x_0 z) \frac{d\psi_2}{dx} + (y - y_0 z) \frac{d\psi_2}{dy} \right] = A \lambda z^4 \psi_2.$$

Les termes de degré le moins élevé de N sont $N_0 z^4$; $N_0 z^4$ étant ce que devient N quand on y change x et y en $x_0 z$ et $y_0 z$.

L'ensemble des termes du degré le moins élevé de Θ sera donc :

$$\lambda z^3 \psi_2 (3 N_0 + A).$$

Les λ tangentes à la courbe $\Theta = 0$ sont donc les mêmes que les λ tangentes à la courbe $\psi = 0$.

Le nœud considéré compte donc pour $\lambda(\lambda + 1)$ intersections et les 9 nœuds pour $9\lambda(\lambda + 1)$ intersections.

Donc, ou bien les deux courbes se confondent, ou bien elles n'ont pas d'autre point d'intersection que les nœuds.

Mais il y a plus; je dis que je puis toujours supposer que la courbe $\Theta = 0$ admet nos 9 nœuds comme points multiples d'ordre $\lambda + 1$.

En effet, nous ne changeons pas nos équations différentielles en changeant L , M , N en $L + xH$, $M + yH$, $N + zH$ (H étant un polynôme homogène quelconque du 3^{ème} ordre).

On change ainsi Θ en

$$\Theta + 3 \lambda H \psi.$$

Soit u , l'un de nos 9 nœuds. Soit H_i la valeur que prend H en ce point et soit $3\lambda A_i \psi_\lambda$ l'ensemble des termes de Θ qui sont d'ordre λ en $x - x_0 z$, $y - y_0 z$.

Pour que la courbe

$$\Theta + 3\lambda H\psi = 0$$

admette nos 9 nœuds comme points d'ordre $\lambda + 1$, il faut et il suffit que l'on ait les 9 équations

$$(5) \quad H_i + A_i = 0. \quad (i = 1, 2, \dots, 9)$$

Peut-on choisir les 10 coefficients de H de façon à satisfaire à ces 9 équations? Il ne pourrait y avoir doute que si tous les déterminants formés à l'aide des coefficients de ces 9 équations à 10 inconnues s'annulent tous à la fois. Mais s'il était ainsi, les équations

$$(5^{me}) \quad H_i = 0$$

admettraient une double infinité de solutions. C'est-à-dire qu'on pourrait faire passer par nos 9 nœuds un faisceau de cubiques et que Su serait une période.

Mais nous avons supposé que Su étant commensurable avec une période et de telle façon que λ soit le plus petit nombre tel que λSu soit une période. Donc, si $\lambda > 1$, Su n'est pas une période. Donc on peut satisfaire aux équations (5). Donc, on peut toujours supposer que $\Theta = 0$ admet 9 points multiples d'ordre $\lambda + 1$.

Nous admettrons désormais qu'il en est ainsi.

La courbe $\Theta = 0$ est d'ordre $3(\lambda + 1)$ et elle a, en nos 9 nœuds, $9(\lambda + 1)$ points d'intersection avec notre cubique.

Nous sommes donc en présence de deux hypothèses :

1° Ou bien la courbe $\Theta = 0$ se décompose en la cubique et une courbe d'ordre 3λ .

2° Ou bien elle n'a pas d'autre point d'intersection avec la cubique que les nœuds. Mais alors on aurait :

$$(\lambda + 1)Su \equiv 0,$$

et comme on a déjà

$$\lambda Su \equiv 0,$$

il viendrait

$$Su \equiv 0,$$

ce qui est contraire à ce que nous avons supposé, puisque Su n'est pas une période.

La seconde hypothèse doit donc être rejetée.

Donc la courbe $\Theta = 0$ se décompose; et les deux composantes sont, d'une part la cubique, d'autre part une courbe d'ordre 3λ admettant les 9 nœuds comme points multiples d'ordre λ et appartenant par conséquent à notre faisceau.

Soit $F = 0$ l'équation de notre cubique; celle d'une courbe quelconque du faisceau sera

$$a\psi + bF^\lambda = 0,$$

a et b étant des coefficients arbitraires; et en effet, la cubique, prise λ fois, fait évidemment partie du faisceau.

On aura donc :

$$\Theta = F(a\psi + bF^\lambda).$$

Soit maintenant :

$$\theta = L \frac{dF}{dx} + M \frac{dF}{dy} + N \frac{dF}{dz};$$

θ sera évidemment un polynôme du 6^{ème} degré.

La courbe $\theta = 0$ passe évidemment par chacun des nœuds et sa tangente au nœud est celle de la cubique; on le démontrerait comme plus haut.

Les deux courbes $\theta = 0$ et $F = 0$ ont donc 18 points d'intersection aux nœuds; donc :

Ou bien θ se décompose en deux facteurs dont F .

Ou bien les deux courbes n'ont d'autre point commun que les

nœuds, ce qui entraînerait la congruence

$$2 Su \equiv 0.$$

Cette congruence n'a pas lieu (si $\lambda > 2$).

Donc θ est divisible par F .

Soit donc

$$\theta = PF,$$

P étant un polynôme du 3^{ème} degré.

Mais nous avons vu plus haut que les termes de degré λ en $x - x_0z$ et en $y - y_0z$ dans θ sont :

$$\lambda z^{\lambda} \psi_{\lambda}(3 N_0 + A).$$

On verrait de même que les termes du 1^{er} degré en $x - x_0z$ et $y - y_0z$ dans θ sont

$$\lambda z^{\lambda} F_1(3 N_0 + A),$$

en représentant par F_1 l'ensemble des termes du 1^{er} degré de F .

Mais, d'après l'hypothèse faite plus haut, chaque nœud sera un point d'ordre $\lambda + 1$ pour $\theta = 0$ et on a par conséquent :

$$3 N_0 + A = 0.$$

Donc, les termes du 1^{er} degré de θ disparaissent. Chaque nœud est donc un point double pour $\theta = 0$.

La courbe $P = 0$ passe donc par les 9 nœuds.

Si les cubiques $P=0$, $F=0$ étaient distinctes, on aurait donc :

$$Su \equiv 0,$$

ce qui n'a pas lieu. Donc :

$$\theta = cF^3,$$

c étant un coefficient constant.

Nous pouvons alors nous demander s'il est possible, étant donné un polynôme F du 3^{ème} degré, de trouver 3 polynômes L, M, N du 4^{ème} degré, tels que

$$\theta = 3 F^2.$$

Il est clair que ce problème comporte une infinité de solutions.

Soient P, Q, R trois polynômes quelconques du 2^d degré; si nous posons :

$$\begin{aligned} L &= xF + R \frac{dF}{dy} - Q \frac{dF}{dz} \\ (a) \quad M &= yF + P \frac{dF}{dz} - R \frac{dF}{dx} \\ N &= zF + Q \frac{dF}{dx} - P \frac{dF}{dy}, \end{aligned}$$

il viendra évidemment :

$$L \frac{dF}{dx} + M \frac{dF}{dy} + N \frac{dF}{dz} = 3 F^2.$$

C'est d'ailleurs la solution la plus générale, comme on s'en assurerait en remarquant que si L', M', N' sont trois polynômes du 4^{ème} degré satisfaisant à l'identité

$$L' \frac{dF}{dx} + M' \frac{dF}{dy} + N' \frac{dF}{dz} = 0,$$

le polynôme L' devra être égal à la somme de $\frac{dF}{dy}$ et de $\frac{dF}{dz}$ multipliés respectivement par deux polynômes du 2^d degré.

Cela posé, donnons à nos polynômes L, M, N la forme (a) et cherchons quels seront les points singuliers de nos équations différentielles. Ces points singuliers sont donnés par

$$\frac{L}{x} = \frac{M}{y} = \frac{N}{z}$$

et on voit tout-de-suite qu'ils se divisent en deux catégories.

Nous avons d'abord neuf points satisfaisant aux équations :

$$\begin{aligned}
 (\beta) \quad & x \frac{dF}{dx} + y \frac{dF}{dy} + z \frac{dF}{dz} = 0, \\
 & xP + yQ + zR = 0.
 \end{aligned}$$

Nous avons ensuite douze points satisfaisant aux équations :

$$\frac{P}{\frac{dF}{dx}} = \frac{Q}{\frac{dF}{dy}} = \frac{R}{\frac{dF}{dz}}.$$

Les neuf premiers points sont sur la cubique F ; ce sont eux qui devraient être nos neufs nœuds dicritiques.

Ils sont à l'intersection de $F=0$ avec une autre cubique. On aura donc :

$$Su \equiv 0.$$

Le faisceau $f + C\varphi = 0$ devra alors se réduire à un faisceau de cubiques

$$F + CF_1 = 0,$$

de telle façon que $\lambda = 1$.

On pourrait, il est vrai, se demander si on ne peut pas faire passer par ces 9 nœuds trois courbes de degré 3λ , linéairement indépendantes et admettant les 9 nœuds comme points multiples d'ordre λ .

On aurait alors non plus un faisceau mais un *réseau* de courbes d'ordre 3λ , et l'équation de ce réseau pourrait se mettre sous la forme :

$$F^\lambda + C'F_1^\lambda + C''\Phi = 0,$$

où C' et C'' seraient des constantes arbitraires et Φ un polynôme d'ordre 3λ indécomposable.

Mais cela est impossible; soit en effet M un point quelconque du plan; par ce point passeraient une infinité de courbes du réseau,

formant un faisceau. Deux quelconques de ces courbes se couperaient en $9\lambda^2$ points aux nœuds et en un point au point M . En tout $9\lambda^2 + 1$ points d'intersection. Cela est absurde, puisque les deux courbes sont d'ordre 3λ .

Ainsi nous devons conclure que $\lambda = 1$.

Nous avons, il est vrai, laissé de côté un cas; celui où λ serait égal à 2, où l'on aurait par conséquent :

$$2 \sum u \equiv 0$$

et où la courbe $\theta = 0$, au lieu de se décomposer en deux cubiques dont l'une serait $F = 0$, serait tangente aux neuf nœuds à $F = 0$.

Dans ce cas on peut construire un faisceau de courbes du 6^{ème} degré admettant les neuf nœuds comme points doubles. Soit $f_1 + Cf_2 = 0$ l'équation de ce faisceau. On peut, quel que soit p , construire un faisceau de courbes de degré $6p$ admettant les neuf nœuds comme points multiples d'ordre $2p$. L'équation de ce faisceau est

$$f_1^p + Cf_2^p = 0.$$

Mais on ne peut pas, pour la même raison que tout à l'heure, construire un réseau de pareilles courbes.

On peut donc supposer $p = 1$ et par conséquent le faisceau $f + C\varphi = 0$ ne pourrait être autre chose que le faisceau du 6^{ème} degré que nous venons de construire.

Supposons donc $\lambda = 2$.

L'équation du faisceau peut se mettre sous la forme :

$$F^2 + C\varphi = 0,$$

φ étant du 6^{ème} degré.

La valeur $C = 0$ est alors une valeur remarquable de C .

Les équations connues :

$$m + 2 = 2p - \sum (x_i - 1)n_i$$

$$2 = 1$$

deviennent alors :

$$6 = 6\lambda - (\lambda - 1)3 - \sum'(\alpha_i - 1)\mu_i,$$

$$2 = 2\lambda - (\lambda - 1) - \sum'(\alpha_i - 1)\lambda_i,$$

le signe $\sum'$ représentant une sommation s'étendant à tous les facteurs μ_i correspondant à toutes les valeurs critiques de C autres que $C=0$.

Mais si $\lambda = 2$, la dernière de ces équations se réduit à

$$\sum'(\alpha_i - 1)\lambda_i = 1.$$

Cette équation ne peut être satisfaite que d'une seule manière. Il ne doit y avoir, en dehors de $C=0$, qu'une seule valeur critique pour laquelle on aura :

$$\lambda_i = 1, \quad \alpha_i = 2.$$

D'autre part, la première équation donne :

$$\sum'(\alpha_i - 1)\mu_i = 3;$$

ou, puisqu'il n'y a qu'une seule valeur critique et que $\alpha_i = 2$:

$$\mu_i = 3.$$

Ainsi, pour cette valeur critique, $F^2 + C\varphi$ doit se réduire au carré d'un polynôme du 3^{ème} degré, F_1 , de sorte que la cubique $F_1 = 0$ passe par nos neuf nœuds. On aura donc :

$$S\mu \equiv 0,$$

ce qui nous ramène au cas précédent.

Ainsi, dans ce cas très particulier, que j'ai étudié peut être un peu longuement, nous sommes parvenus à limiter le degré des courbes algébriques $f + C\varphi = 0$; mais pour cela les considérations

purement arithmétiques ne nous ont pas suffi; nous avons dû recourir au théorème d'Abel, qui nous a appris que

$$\lambda S u \equiv 0.$$

Cette circonstance doit nous faire mieux comprendre la nature des difficultés à vaincre.

Étude des points singuliers.

Dans le voisinage d'un point singulier, il existe deux séries que nous avons appelées X_1 et X_2 et qui sont ordonnées suivant les puissances de $\frac{x}{z} - \frac{x_0}{z_0}$, $\frac{y}{z} - \frac{y_0}{z_0}$ (loco citato, p. 165). Réciproquement, on peut égaler les différences

$$\frac{x}{z} - \frac{x_0}{z_0}, \quad \frac{y}{z} - \frac{y_0}{z_0}$$

à des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de X_1 et de X_2 .

Soit alors

$$\frac{f}{\varphi} = \text{constante}$$

l'intégrale générale de notre équation différentielle. Si nous divisons le numérateur et le dénominateur par z^p , les quotients $\frac{f}{z^p}$ et $\frac{\varphi}{z^p}$ seront des polynômes entiers par rapport aux différences $\frac{x}{z} - \frac{x_0}{z_0}$, $\frac{y}{z} - \frac{y_0}{z_0}$; ce seront donc des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de X_1 et de X_2 . Soient S_1 et S_2 ces séries; nous aurons :

$$\frac{f}{z^p} = S_1, \quad \frac{\varphi}{z^p} = S_2$$

et notre intégrale générale s'écrira :

$$\frac{S_1}{S_2} = \text{constante.}$$

Supposons d'abord que notre point singulier soit un nœud dicritique; l'intégrale générale de l'équation pourra s'écrire :

$$\frac{X_1}{X_2} = \text{constante.}$$

Donc $\frac{S_1}{S_2}$ est une fonction de $\frac{X_1}{X_2}$; elle ne change donc pas quand on multiplie X_1 et X_2 par une même constante k . Si donc je désigne par S_1^p et S_2^p les groupes de termes homogènes de degré p dans S_1 et dans S_2 , nous aurons :

$$\frac{k S_1^1 + k^2 S_1^2 + k^3 S_1^3 + \dots}{k S_2^1 + k^2 S_2^2 + k^3 S_2^3 + \dots} = \frac{S_1^1 + S_1^2 + S_1^3 + \dots}{S_2^1 + S_2^2 + S_2^3 + \dots}.$$

Le premier membre doit donc être indépendant de k .

D'autre part, $S_1^1, S_1^2, \dots, S_1^{\lambda-1}$ doivent s'annuler ainsi que $S_2^1, S_2^2, \dots, S_2^{\lambda-1}$, tandis que S_1^λ et S_2^λ sont différents de zéro; et en effet les courbes $f + C\varphi = 0$ doivent avoir au point considéré un point multiple d'ordre λ à tangentes distinctes.

On aura donc, quel que soit k :

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{k^\lambda S_1^\lambda + k^{\lambda+1} S_1^{\lambda+1} + \dots}{k^\lambda S_2^\lambda + k^{\lambda+1} S_2^{\lambda+1} + \dots}$$

ou, en faisant tendre k vers zéro :

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{S_1^\lambda}{S_2^\lambda}.$$

Ainsi : la fraction rationnelle $\frac{f}{\varphi}$ est le quotient de deux polynômes entiers homogènes d'ordre λ en X_1 et X_2 .

Considérons maintenant un nœud monocritique : l'intégrale gé-

nérale est alors de la forme :

$$\frac{X_1^p}{X_2^p} = \text{constante.}$$

Le rapport $\frac{S_1}{S_2}$ ne doit donc pas changer quand on change X_1 et X_2 en $X_1 k^v$ et $X_2 k^p$. Soit alors

$$A X_1^m X_2^n$$

un terme quelconque de l'une des séries S_1 ou S_2 ; ce terme se changera en

$$A X_1^m X_2^n k^{mv+np},$$

je dirai alors qu'il est de la classe $mv + np$. Soient alors S_1^p et S_2^p l'ensemble des termes de classe p de S_1 et de S_2 ; nous aurons encore :

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{k S_1^1 + k^2 S_1^2 + \dots}{k S_2^1 + k^2 S_2^2 + \dots}.$$

Comme la courbe $f + C\varphi = 0$ doit présenter λ branches de courbes de la forme

$$X_1^p = \gamma X_2^q$$

passant au point considéré (cfr. loco citato, p. 170), les premiers termes qui ne s'annuleront pas au numérateur et au dénominateur de la fraction précédente seront les termes $k^{\lambda\mu\nu} S_1^{\lambda\mu\nu}$ et $k^{\lambda\mu\nu} S_2^{\lambda\mu\nu}$, de sorte que nous aurons, quel que soit k :

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{k^{\lambda\mu\nu} S_1^{\lambda\mu\nu} + \dots}{k^{\lambda\mu\nu} S_2^{\lambda\mu\nu} + \dots}$$

et en faisant $k = 0$:

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{S_1^{\lambda\mu\nu}}{S_2^{\lambda\mu\nu}}.$$

Ainsi : la fraction rationnelle $\frac{f}{\varphi}$ est le quotient de deux polynômes entiers homogènes d'ordre λ en X_1^p et X_2^p .

Il reste à examiner le cas d'un col qui est un peu plus compliqué.

Si l'intégration algébrique est possible, les séries X_1 et X_2 existent certainement encore; l'intégrale générale devient :

$$X_1^p X_2^q = \text{constante.}$$

Donc, $\frac{S_1}{S_2}$ ne change pas quand on change X_1 en $k^v X_1$ et X_2 en $k^{-v} X_2$. Un terme en $X_1^m X_2^n$ est alors multiplié par $k^{mv - n\mu}$ et peut être appelé de classe $mv - n\mu$; seulement il peut y avoir des termes de classe négative.

Soit encore :

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{\sum k^p S_1^p}{\sum k^p S_2^p}.$$

Le numérateur, comme le dénominateur, sont développables (pour les valeurs de k voisines de 1) suivant les puissances positives ou négatives de k ; il en est de même de

$$f \sum k^p S_2^p - \varphi \sum k^p S_1^p = 0.$$

Cette fonction de k devant être identiquement nulle ne peut l'être que si tous les coefficients du développement sont nuls; on a donc :

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{S_1^p}{S_2^p},$$

en choisissant p de telle façon que S_1^p ne soit pas identiquement nul. Seulement ici S_1^p et S_2^p peuvent contenir une infinité de termes. Ce ne sont plus des polynômes, ce sont des séries.

Soit M_1 un nœud quelconque; soient μ_1 et ν_1 ses entiers caractéristiques; X_1^1, X_2^1 les deux séries X_1 et X_2 correspondantes. Nous

pourrons toujours former ces deux séries si nous connaissons l'équation différentielle. Ces deux séries convergeront dans un certain domaine D_1 ; soit ensuite Δ_1 un domaine plus étendu que D_1 ; nous pourrons encore définir dans ce domaine les deux fonctions X_1^1 et X_1^2 par le procédé de la continuation analytique.

Soit M_2 un second nœud, μ_2 et ν_2 ses entiers caractéristiques; X_2^1 et X_2^2 les deux séries X_1 et X_2 correspondantes; elles convergeront dans un certain domaine D_2 et on pourra, par continuation analytique, définir les fonctions X_2^1 et X_2^2 dans un domaine plus étendu Δ_2 .

Supposons que Δ_1 et Δ_2 aient une partie commune; dans cette partie commune les quatre fonctions X_1^1 , X_1^2 , X_2^1 , X_2^2 seront définies; et nous devons avoir une relation entre

$$Z_1 = \frac{(X_1^1)^{\mu_1}}{(X_1^2)^{\nu_1}} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{(X_2^1)^{\mu_2}}{(X_2^2)^{\nu_2}}.$$

Dans le cas où l'intégration algébrique est possible, on voit quelle est la forme de cette relation; la fonction $\frac{f}{\varphi}$ doit être une fonction rationnelle de Z_1 , d'une part, de Z_2 , d'autre part.

Il faut donc qu'une fonction rationnelle de Z_1 soit égale à une fonction rationnelle de Z_2 .

Soit x_0 , y_0 , z_0 un point de la partie commune à Δ_1 et à Δ_2 ; connaissant nos quatre fonctions X dans cette partie commune par continuation analytique, nous saurons développer Z_1 et Z_2 suivant les puissances de $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$; soit Z_1^0 et Z_2^0 les valeurs de Z_1 et Z_2 au point x_0 , y_0 , z_0 ; nous saurons développer $Z_2 - Z_1^0$ suivant les puissances de $Z_1 - Z_1^0$.

Nous aurons donc la relation cherchée entre Z_1 et Z_2 sous une forme où entre une série infinie; mais cela ne nous permet pas encore de reconnaître si on peut la mettre sous la forme d'une égalité entre deux fonctions rationnelles.

Introduction des Fonctions Fuchsiennes.

Considérons d'abord un nœud dicritique et supposons que nous nous donnions : 1° les valeurs remarquables $C_1, C_2, \dots, C_t$; 2° le

nombre λ ; 3° les nombres λ , et les exposants α , relatifs aux différents facteurs correspondant aux q valeurs remarquables.

Soit M_i l'un des communs multiples des exposants α , correspondant à la valeur remarquable C_i .

Construisons un polygone fuchsien R_0 de la 1^{re} famille et du 1^{er} genre; supposons que nous ayons $2q - 2$ sommets répartis en q cycles. Le premier cycle comprendra un seul sommet A_1 , le second, le troisième, etc., et l'avant dernier cycles comprendront chacun deux sommets que j'appellerai A_1 et A'_1 , A_2 et A'_2 , ..., A_{q-1} et A'_{q-1} ; le dernier cycle comprendra un seul sommet A_q . La somme des angles du k^{me} cycle sera $\frac{2\pi}{M_k}$ et il y aura une fonction fuchsienne qui sera égale à C_k au point A_k . Soit $F(\zeta)$ cette fonction fuchsienne; égalons-la à $-\frac{f}{\varphi}$ et écrivons :

$$F(\zeta) = -\frac{f}{\varphi}.$$

Nous avons vu plus haut que $\frac{f}{\varphi}$ devait être une fonction rationnelle du rapport $\frac{X_1}{X_2}$ que j'appellerai Z ; nous aurons donc :

$$F(\zeta) = R(Z),$$

R désignant une fonction rationnelle. Je dis que Z sera une fonction uniforme de ζ .

Si, en effet, $F(\zeta)$ décrit un contour fermé, plusieurs valeurs de Z ne pourront s'échanger que si ce contour contient l'un des points C_i ; et si on tourne autour d'un point C_i et que $\alpha_1^i, \alpha_2^i, \dots, \alpha_{\lambda_i}^i$ soient les exposants correspondants nous verrons s'échanger, par permutation circulaire, d'une part λ_i^1 groupes de α_1^i valeurs, d'autre part λ_i^2 groupes de α_2^i valeurs, etc.

Si ζ décrit un contour fermé, il faut d'abord que ce contour enveloppe un des sommets de R_0 , pour que $F(\zeta)$ tourne autour d'un des points C_i . Si ζ tourne autour d'un sommet, $F(\zeta)$ tourne

M_i fois autour de C_i et comme M_i est multiple de tous les exposants α_i , Z revient à la même valeur.

Donc Z est fonction uniforme de ζ . C. Q. F. D.

Or Z , pour une même valeur de $F(\zeta)$, peut prendre λ valeurs. Considérons donc λ polygones fuchsien congruents à R_0 , que j'appellerai

$$R_0, R_1, \dots, R_{\lambda-1}.$$

L'ensemble de ces polygones constituera un polygone fuchsien S_0 . Ce polygone S_0 , en associant convenablement ses côtés en paires de côtés conjugués, engendrera un groupe fuchsien dont les substitutions n'altéreront pas Z .

Donc Z est fonction fuchsienne de ζ .

La surface du polygone R_0 (au point de vue de la géométrie non euclidienne) sera :

$$q - 2 - \sum \frac{1}{M_i}$$

(en prenant pour unité celle du quadrilatère dont les 4 angles sont nuls). Celle de S_0 devra donc être :

$$\lambda \left[q - 2 - \sum \frac{1}{M_i} \right].$$

D'autre part, le nombre des cycles de sommets de S_0 sera en général

$$\sum \lambda_i.$$

Ce nombre pourrait se réduire si la somme des angles relatifs à un de ces cycles était égale à 2π ; on pourrait alors assembler les polygones R_i de façon à faire disparaître ce cycle. Mais cette somme d'angles est égale à

$$2\pi \frac{\alpha_i}{M_i},$$

α_i et M_i étant les nombres α_i et M_i correspondant au cycle envi-

sagé. Mais comme M_i est un commun multiple *quelconque* des α_i , je pourrai toujours supposer $M_i > \alpha_i$.

Nous pouvons donc toujours supposer que le nombre des cycles de S_0 est précisément $\sum \lambda_i$.

Quel est le nombre des côtés? Le polygone R_0 a $2q - 2$ côtés; quand on y annexe R_1 , on a en tout $2(2q - 2)$ côtés; mais comme R_0 a un côté commun avec R_1 et que cette paire de côtés disparaît, il reste pour le polygone $R_0 + R_1$ un nombre de côtés égal à

$$2(2q - 2) - 2.$$

Annexons encore R_2 , nous ajoutons $2q - 2$ côtés; mais R_2 a au moins un côté commun avec $R_0 + R_1$; cela fait une paire de côtés à supprimer et il reste

$$3(2q - 2) - 2.2$$

côtés pour le polygone $R_0 + R_1 + R_2$. Ce nombre doit être diminué si R_2 a plus d'un côté commun avec $R_0 + R_1$.

En général S_0 aura :

$$\lambda(2q - 2) - 2\lambda + 2$$

côtés, si R_i n'a qu'un côté commun

$$R_0 + R_1 + \dots + R_{i-1}.$$

Dans le cas contraire ce nombre devrait être diminué.

En général le nombre des côtés sera

$$\lambda(2q - 2) - 2\lambda + 2 - 2b,$$

b étant un entier positif ou nul.

D'après une formule que j'ai donnée dans les *Acta Mathematica*, tome I, on a, si $2n$ est le nombre des côtés, q le nombre des cycles, p le genre du polygone fuchsien :

$$p = \frac{n + 1 - q}{2}.$$

Nous aurons donc ici

$$p = \frac{\lambda(q-1) - \lambda + 2 - b - \sum \lambda_i}{2},$$

ou

$$2p + b = \lambda(q-2) + 2 - \sum \lambda_i.$$

Or nous avons trouvé plus haut

$$\sum \lambda_i = \lambda(q-2) + 2.$$

On a donc

$$2p + b = 0.$$

Or les nombres p et b sont positifs ou nuls; on a donc :

$$p = 0, \quad b = 0.$$

Ainsi : le genre du polygone fuchsien S_0 est nul et le nombre de ses côtés est $2\lambda(q-2) + 2$.

Il faudrait rechercher maintenant comment sont assemblés les divers polygones partiels R_i dont l'ensemble compose S_0 , et comment les côtés de S_0 sont conjugués deux à deux.

Je désignerai par $A_{i,k}$ et $A'_{i,k}$ les sommets du polygone R_i qui sont homologues aux sommets $A_i = A_{i,0}$ et $A'_i = A'_{i,0}$ du polygone R_0 .

Considérons alors le côté $A_{1,k}A'_{2,k}$; ou bien il coïncidera avec un côté $A_{1,k}A_{2,k}$ du polygone R_k , les deux polygones R_1 et R_2 ayant un côté commun; ou bien ce sera un côté de S_0 , mais alors il sera conjugué d'un autre côté $A_{1,k}A_{2,k}$ de S_0 .

Dans l'un et l'autre cas, je dirai que l'indice k est le conséquent de l'indice i , et l'indice i l'antécédent de l'indice k . Chacun de nos λ indices aura ainsi un conséquent et un antécédent.

Considérons alors la substitution T_i qui change chacun de ces indices en son conséquent. C'est une substitution de λ lettres, et si

$$\alpha_1^i, \alpha_2^i, \dots, \alpha_i^i, \dots$$

$$\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_i^i, \dots$$

sont les nombres α_i et λ_i relatifs à la valeur remarquable C_i , les λ_i lettres se répartiront en λ_i^1 groupes de α_i^1 lettres, ... en λ_i^i groupes de α_i^i lettres, ... et la substitution T_i permutera circulairement les lettres de chaque groupe.

Considérons maintenant le côté $A'_{21}A'_{31}$; il coïncidera avec un côté $A_{21}A_{31}$ de $R_{2,1}$ ou bien il sera un côté de Σ_0 et sera conjugué du côté $A_{21}A_{31}$.

Dans les deux cas, définissant les conséquents à un nouveau point de vue, je dirai que b est le conséquent de k .

J'appellerai T_i la substitution de λ_i lettres qui change chaque indice en son conséquent.

On définirait de même les substitutions $T_2, T_3, \dots, T_{q-1}$ qui correspondent aux côtés $A'_1A'_2, A'_2A'_3, \dots, A'_{q-1}A'_q$ de la même façon que T_1 et T_2 correspondent aux côtés $A_1A'_2$ et $A'_1A'_2$.

Les $q-1$ substitutions T_i devront satisfaire à certaines conditions. Nous avons déjà vu quelles sont celles que doit remplir T_1 et comment les lettres doivent se répartir en groupes tels que T_1 permute circulairement les lettres d'un même groupe.

Soient maintenant

$$\alpha_1^1, \alpha_1^2, \dots, \alpha_1^F$$

$$\lambda_1^1, \lambda_1^2, \dots, \lambda_1^F$$

les nombres α_i et λ_i relatifs à la valeur C_i .

On pourra répartir les λ_i indices en groupes tels que la substitution $T_i^{-1} T_i^{-1}$ permute circulairement les lettres d'un même groupe.

Nous devons avoir λ_i^1 groupes de α_i^1 lettres, λ_i^2 groupes de α_i^2 lettres, ... λ_i^F groupes de α_i^F lettres ($k = 2, 3, \dots, q-1$).

Soient enfin

$$\alpha_i^1, \alpha_i^2, \dots, \alpha_i^Q$$

$$\lambda_i^1, \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^Q$$

les nombres α_i et λ_i relatifs à la valeur C_q .

Les λ indices pourront se répartir en groupes tels que T_{q-1} permutent circulairement les lettres d'un même groupe.

Nous devons avoir λ_q^1 groupes de α_q^1 lettres, ..., λ_q^Q groupes de α_q^Q lettres.

Une question se pose alors; existe-t-il des substitutions T satisfaisant à toutes ces conditions? et par conséquent existe-t-il un polygone S_0 ?

Nous avons vu plus haut que $\frac{f}{\varphi}$ devait être une fonction rationnelle de $Z = \frac{X_1}{X_2}$:

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{P(X_1, X_2)}{Q(X_1, X_2)},$$

P et Q étant deux polynômes homogènes d'ordre λ .

Soit C_k une valeur remarquable quelconque, A_k et B_k deux constantes telles que $B_k = A_k C_k$. Alors le polynôme:

$$A_k P + B_k Q$$

devra se décomposer en facteurs, et l'on aura:

$$(1) \quad A_k P + B_k Q = U_1^{\alpha_1^k} U_2^{\alpha_2^k} \dots U_R^{\alpha_R^k},$$

U_k étant un polynôme d'ordre λ_k^1 .

La question proposée revient alors à la suivante. Peut-on toujours trouver des polynômes P et Q satisfaisant aux conditions (1)?

Nous disposons des indéterminées suivantes:

1° Les $2\lambda + 2$ coefficients des polynômes P et Q .

2° Les q constantes A_k , d'où l'on déduit les q constantes B_k par les équations $B_k = A_k C_k$; les C_k sont supposés donnés.

3° Les $\sum (\lambda_k + 1)$ coefficients des facteurs U .

D'autres part, nous avons à satisfaire aux conditions (1) qui sont des identités entre deux polynômes d'ordre λ .

Chacune d'elles correspond donc à $\lambda + 1$ conditions; cela fait donc en tout $q(\lambda + 1)$ conditions.

Si donc nous appelons N le nombre total des facteurs U_i , de telle sorte que

$$\sum (\lambda_i + 1) = \sum \lambda_i + N,$$

nous avons

$$N + 2\lambda + 2 + q + \sum \lambda_i$$

paramètres qui doivent satisfaire à $q(\lambda + 1)$ conditions; il nous reste donc

$$N + 2\lambda + 2 + q + \sum \lambda_i - q(\lambda + 1)$$

paramètres arbitraires. Or, en vertu des équations :

$$q\lambda = \sum \alpha_i \lambda_i, \quad 2\lambda + \sum (\alpha_i - 1) \lambda_i = 2,$$

ce nombre se réduit à $4 + N$.

Remarquons que les équations (1) sont homogènes si on y regarde :

- 1° les coefficients de P et Q comme étant d'ordre λ ,
- 2° les constantes A_i comme étant d'ordre λ ,
- 3° les coefficients d'un facteur U_i de degré λ , comme étant d'ordre 2λ .

En effet, il est aisé de vérifier qu'en adoptant cette convention les deux membres de (1) sont homogènes d'ordre 2λ .

Mais il y a plus, ces équations (1) sont doublement homogènes; je veux dire que, si ξ et η désignent deux indéterminées, elles ne changent pas quand on change

$$(2) \quad A_i, \quad P, \quad Q, \quad U_i$$

en

$$(3) \quad A_i \xi^\lambda, \quad P \eta^\lambda, \quad Q \eta^\lambda, \quad U_i \xi^{\lambda_i} \eta^{\lambda_i}.$$

Adjoignons aux équations (1) d'autres relations en nombre

$N + 2$ entre nos inconnues; je suppose que ces nouvelles relations présentent la même homogénéité double que les équations (1); c'est-à-dire ne changent pas quand les quantités (2) se changent dans les quantités (3).

Nous avons alors $N + 2 + q(\lambda + 1)$ équations homogènes; le nombre total des inconnues est $N + 4 + q(\lambda + 1)$; mais ces équations étant doublement homogènes sont en réalité des équations entre les rapports des coefficients des $A_i P$ et des $A_i Q$ élevés à la puissance $\frac{1}{\lambda}$ et des coefficients des U_i élevés à la puissance $\frac{1}{\lambda_i}$.

Le nombre de ces rapports *réellement distincts* est seulement $N + 2 + q(\lambda + 1)$. Nous avons donc autant d'équations que d'inconnues et comme des équations homogènes ne sont jamais impossibles, nous pourrions toujours en tirer nos inconnues.

Ainsi, si les équations (1) sont distinctes, les rapports de nos inconnues dépendront de $N + 2$ paramètres arbitraires et nos inconnues elles-mêmes de $N + 4$ paramètres.

Si les équations (1) n'étaient pas distinctes, les inconnues dépendraient de plus de $N + 4$ paramètres.

Il semble donc que notre problème comporte toujours une infinité de solutions. Mais il importe d'observer que ces solutions ne sont pas réellement distinctes.

En effet, si dans les polynômes P , Q et U_i on remplace X_i et X_j par

$$\alpha X_i + \beta X_j \quad \text{et} \quad \gamma X_i + \delta X_j,$$

les équations (1) ne cesseront pas d'être satisfaites. Or cette transformation dépend de 4 paramètres α , β , γ , δ . Donc voilà une quadruple infinité de solutions qui ne diffèrent pas essentiellement les unes des autres.

D'autre part, l'équation (1) ne change pas si l'on y change

$$U_1, \quad U_2, \quad \dots \quad U_K, \quad A_i$$

en

$$\mu_1 U_1, \quad \mu_2 U_2, \quad \dots \quad \mu_K U_K, \quad A_i \mu_1^{\alpha_1} \mu_2^{\alpha_2} \dots \mu_K^{\alpha_K}.$$

Voilà une transformation qui dépend des K paramètres μ ; comme nous pouvons opérer de même sur nos q équations (1), cela nous fait autant de paramètres μ que de facteurs U , c'est-à-dire N . En tenant compte de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, cela fait une transformation dépendant de $N + 4$ paramètres.

Nous aurons donc une $(N + 4)^{\text{me}}$ infinité de solutions qui ne différeront pas essentiellement les unes des autres.

Si donc les équations (1) sont distinctes, le problème ne comportera qu'un nombre fini de solutions essentiellement différentes.

Maintenant, les équations (1) sont-elles distinctes? La considération des fonctions fuchsiennes permet de l'affirmer.

Si, en effet, les valeurs remarquables C_i sont données, on pourra construire d'une seule manière le polygone fuchsien R_0 ; on pourra ensuite assembler d'un nombre fini de manières λ polygones

$$R_0, R_1, \dots, R_{\lambda-1}$$

pour former le polygone S_0 .

C'est parmi les polygones S_0 ainsi formés, en nombre fini, qu'il faut choisir ceux qui conviennent à la question. Les considérations qui précèdent montrent qu'il y en aura toujours, mais il ne peut y en avoir qu'un nombre fini.

En résumé, si l'on se donne les valeurs remarquables C_i , si l'on se donne les entiers λ et λ , assujettis seulement aux conditions

$$\lambda = S \alpha_i \lambda_i, \quad 2\lambda - \sum (\alpha_i - 1) \lambda_i = 2,$$

on pourra toujours former les polynômes P et Q et le polygone S_0 et on ne pourra le faire que d'un nombre fini de manières.

Extension aux nœuds monocritiques.

Considérons un nœud monocritique; soient X_1 et X_2 les deux séries correspondantes, et soit

$$Z = \frac{(X_1)^p}{(X_2)^q}.$$

Nous avons vu plus haut que $-\frac{f}{\varphi}$ est une fonction rationnelle de Z dont le numérateur et le dénominateur sont d'ordre λ :

$$-\frac{f}{\varphi} = R(Z).$$

Soit C_i une valeur remarquable; lorsque $-\frac{f}{\varphi}$ tournera autour de C_i , les λ valeurs de Z tirées de l'équation qui précède s'échangeront entre elles. Soit u_i un facteur de $f + C_i \varphi$; soient λ_i et α_i les deux nombres correspondants; si ce facteur n'est pas singulier, nous aurons λ_i groupes de α_i valeurs de Z , et les valeurs de chacun de ces groupes s'échangeront circulairement quand $-\frac{f}{\varphi}$ tournera autour de C_i .

Si le facteur est critique, α_i est divisible par μ ; nous avons alors $\lambda_i - 1$ groupes de α_i valeurs de Z et 1 groupe de $\frac{\alpha_i}{\mu}$ valeurs qui s'échangent circulairement.

Si le facteur est hypercritique, α_i est divisible par ν et nous avons $\lambda_i - 1$ groupes de α_i valeurs et 1 groupe de $\frac{\alpha_i}{\nu}$ valeurs qui s'échangent circulairement.

Si enfin le facteur est doublement singulier, α_i est divisible par $\mu \nu$ et nous avons $\lambda_i - 2$ groupes de α_i valeurs, 1 groupe de $\frac{\alpha_i}{\mu}$ valeurs et 1 groupe de $\frac{\alpha_i}{\nu}$ valeurs qui s'échangent circulairement.

Formons encore le polygône R_0 et formons la fonction fuchsienne $F(\zeta)$. Posons :

$$F(\zeta) = R(Z).$$

Z sera encore une fonction fuchsienne de ζ .

Le polygône S_0 correspondant sera formé de λ polygônes partiels

$$R_0, R_1, \dots, R_{\lambda-1}.$$

Le nombre des cycles de sommets est encore $\sum \lambda_i$.
Celui des côtés sera

$$\lambda(2q - 2) - 2\lambda + 2 - 2b,$$

b étant positif ou nul. On en déduit, p étant le genre de S_0 :

$$2p + b = \lambda(q - 2) + 2 - \sum \lambda_i.$$

Revenons aux formules qui, dans la première partie de ce travail, remplissent les lignes 6 à 12 de la page 173. Pour chaque accord monocritique, nous aurons q de ces formules, correspondant aux q valeurs remarquables; additionnons-les, il viendra:

$$q\lambda = \sum \alpha_i \lambda_i + \alpha_1 \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) + \alpha_2 \left(\frac{1}{\nu} - 1 \right).$$

Nous avons trouvé d'autre part, page 175, formule (δ):

$$(2\lambda - 2) + \alpha_1 \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) + \alpha_2 \left(1 - \frac{1}{\nu} \right) = \sum (\alpha_i - 1) \lambda_i;$$

on tire de là:

$$\lambda(q - 2) + 2 = \sum \lambda_i,$$

d'où

$$2p + b = 0,$$

et comme p et b ne peuvent être négatifs:

$$p = b = 0.$$

On définirait comme précédemment les substitutions:

$$T_1, T_2, \dots, T_{p-1}$$

et pour chacune des substitutions

$$T_1, \quad T_2 T_1^{-1}, \quad T_3 T_2^{-1}, \quad \dots, \quad T_i T_{i-1}^{-1}, \quad T_i$$

nous savons comment les λ indices se répartissent en groupes de lettres se permutant circulairement. Chacun de ces groupes correspondra d'ailleurs à un cycle de sommets du polygône S_0 .

Pourra-t-on toujours former un polygône S_0 satisfaisant à toutes ces conditions ?

Nous aurons encore :

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{P(X_1^\mu, X_2^\nu)}{Q(X_1^\mu, X_2^\nu)},$$

P et Q étant deux polynômes homogènes d'ordre λ .

Nous aurons encore

$$(1) \quad A_i P + B_i Q = U_i^{\alpha_i^1} U_i^{\alpha_i^2} \dots U_i^{\alpha_i^K}.$$

Cependant, si le facteur U_i , par exemple, était critique, il faudrait dans le 2^d membre de (1) remplacer $U_i^{\alpha_i^1}$ par

$$(X_1^\mu)^{\frac{\alpha_i^1}{\mu}} U_i^{\alpha_i^1},$$

U_i' étant un polynôme homogène d'ordre $\lambda_i^1 - 1$. S'il était hypercritique, il faudrait remplacer $U_i^{\alpha_i^1}$ par

$$(X_2^\nu)^{\frac{\alpha_i^1}{\nu}} U_i^{\alpha_i^1};$$

et s'il était doublement singulier, il faudrait remplacer $U_i^{\alpha_i^1}$ par

$$(X_1^\mu)^{\frac{\alpha_i^1}{\mu}} (X_2^\nu)^{\frac{\alpha_i^1}{\nu}} U_i^{\alpha_i^1},$$

U_i' étant un polynôme homogène d'ordre $\lambda_i^1 - 2$.

De combien d'indéterminées disposons-nous ?

1° Des $2\lambda + 2$ coefficients de P et de Q .

2° Des q constantes A_i .

3° Des coefficients des polynômes U_i et U'_i .

Ces coefficients sont au nombre de $\lambda_i + 1$ pour un polynôme U_i , de λ_i pour un polynôme U'_i simplement singulier, de $\lambda_i - 1$ pour un polynôme U'_i doublement singulier.

Le nombre total est donc

$$\sum (\lambda_i + 1) - 2 = \sum \lambda_i + N - 2,$$

en appelant N le nombre total des facteurs.

Nous avons donc en tout

$$N + 2\lambda + q + \sum \lambda_i$$

indéterminées.

D'autre part, nous avons q équations (1) qui équivalent à $q(\lambda + 1)$ conditions, de sorte qu'il reste

$$N + 2\lambda - q\lambda + \sum \lambda_i$$

paramètres arbitraires.

En vertu de l'équation

$$\sum \lambda_i = (q - 2)\lambda + 2$$

ce nombre se réduit à $N + 2$.

Si donc les équations (1) sont distinctes, le problème comporte une $(N + 2)^{\text{e}}$ infinité de solutions.

Mais d'une solution on peut en déduire une $(N + 2)^{\text{e}}$ infinité d'autres. On peut, en effet, sans cesser de satisfaire aux équations (1) :

1° changer X_1^p et X_1^q

en αX_1^p et βX_1^q ;

2° changer $U_1, U_2, \dots, U_K, A_k$

en $\mu_1 U_1, \mu_2 U_2, \dots, \mu_K U_K, A_k \mu_1^{\alpha_1^k} \mu_2^{\alpha_2^k} \dots \mu_K^{\alpha_K^k}.$

Nous n'avons donc qu'un nombre fini de solutions essentiellement distinctes. Nous en aurions un nombre infini si les équations (1) n'étaient pas distinctes; mais cela ne se peut pas, puisqu'on ne peut assembler les polygones

$$R_0, R_1, \dots, R_{\lambda-1}$$

que d'un nombre fini de manières.

Nous arrivons donc à la même conclusion que plus haut: *Il y a toujours des polygones S_0 et il n'y en a jamais qu'un nombre fini.*

Le polygone V_0 .

Nous venons de voir comment on pourrait construire le polygone fuchsien R_0 ; et comment il existait un polygone S_0 correspondant à chacun des nœuds tant dicritiques que monocritiques.

Soit G le groupe fuchsien engendré par R_0 ; soit g le groupe fuchsien engendré par S_0 . Le groupe g sera un sous-groupe de G ; c'est un sous-groupe « d'indice λ », puisque la surface (non-euclidienne) de S_0 est égale à λ fois celle de R_0 .

A chacun des nœuds correspondra ainsi un sous-groupe g . Soit Γ le groupe formé des substitutions communes à tous les sous-groupes g .

Je dis que Γ sera un groupe fuchsien, c'est-à-dire que Γ sera un sous-groupe d'indice fini de G .

Nous avons posé plus haut

$$\frac{f}{\varphi} = -F(\zeta)$$

et nous avons vu que $F(\zeta)$ devait être une fonction rationnelle de

$$Z = \frac{X_1}{X_2}$$

dans le cas d'un nœud dicritique et de

$$Z = \frac{(X_1)^r}{(X_2)^r}$$

dans le cas d'un nœud monocritique.

Soit alors k le nombre des nœuds et soit :

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_k$$

les diverses fonctions Z relatives à ces divers nœuds.

Tous les Z_i seront fonctions fuchsiennes de ζ ; et $F(\zeta)$ sera fonction rationnelle de chacun des Z_i .

A chaque valeur de $F(\zeta)$ correspondra par conséquent un nombre fini de valeurs de Z_1 , un nombre fini de valeurs de $Z_2, \dots$, un nombre fini de valeurs de Z_k .

A chaque valeur de $F(\zeta)$ (ou, ce qui revient au même, à chaque point du polygone R_0) correspondra donc un nombre fini de systèmes de valeurs des Z_i . Soit Λ ce nombre fini. Soient alors $R_1, R_2, \dots$ les différents polygones fuchiens congruents à R_0 . Soit M_0 un point de R_0 ; soient $M_1, M_2, \dots$ les points correspondants de $R_1, R_2, \dots$.

A chacun des points M_i correspondra un système de valeurs des Z_i . Soient alors

$$(5) \quad M_0, M_1, \dots, M_{\Lambda-1}$$

Λ points M_i correspondant à Λ systèmes différents de valeurs des Z_i . Alors si l'on considère un autre point M_i , ce point correspondra au même système de valeurs que l'un des points (5), puisque le nombre total des systèmes de valeurs est égal à Λ .

Nous dirons que deux points M_i sont équivalents s'ils correspondent à un même système de valeurs des Z_i , et que deux polygones R_i sont équivalents si les points M_i correspondants sont équivalents.

Les substitutions du groupe Γ sont alors précisément celles qui changent les polygones R_i en des polygones équivalents.

On voit que Γ est un sous-groupe de G d'indice Λ .

Le polygône V_0 qui engendrera Γ , se composera de l'agrégation de Λ polygônes R_i et sa surface (non euclidienne) sera Λ fois celle de R_0 .

Deux hypothèses sont possibles :

Ou bien le polygône V_0 est de genre zéro; alors il existe une fonction fuchsienne ξ , telle que tous les Z_i et $\frac{f}{\varphi}$ soient des fonctions rationnelles de ξ .

Ou bien le polygône V_0 sera de genre plus grand que zéro, et il y aura deux fonctions ξ et η , liées par une relation algébrique et telles que les Z_i et $\frac{f}{\varphi}$ soient fonctions rationnelles de ξ et de η .

Paris, 7 mai 1897.

H. POINCARÉ.