

CINÉMATIQUE

ET

MÉCANISMES

COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS
PUBLIÉS PAR L'ASSOCIATION AMICALE DES ÉLÈVES ET ANCIENS ÉLÈVES
DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

3
CINÉMATIQUE

ET

MÉCANISMES

POTENTIEL ET MÉCANIQUE DES FLUIDES

COURS PROFESSÉ A LA SORBONNE

PAR

H. Poincaré
H. POINCARÉ

Membre de l'Institut

RÉDIGÉ PAR A. GUILLET

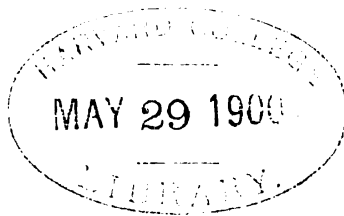


PARIS

GEORGES CARRÉ ET C. NAUD, ÉDITEURS

3, RUE RACINE, 3

—
1899



Pierce fund

CINÉMATIQUE

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE PREMIER

CINÉMATIQUE

Définition. — La *cinématique* est l'étude de tous les mouvements possibles considérés en eux-mêmes, c'est-à-dire indépendamment des causes qui les produisent.

Aux notions géométriques ordinaires la cinématique adjoint la notion de *temps*.

Toute figure mobile pouvant être regardée comme un système de points mobiles, il est naturel d'étudier d'abord le mouvement du *point isolé*.

MOUVEMENT RECTILIGNE ET UNIFORME

Un point mobile est dit animé d'un mouvement rectiligne et uniforme quand il se déplace sur une ligne droite de telle sorte que les longueurs parcourues soient proportionnelles aux temps employés à les parcourir.

Loi de mouvement. — La loi du mouvement d'un point est la fonction du temps qui permet de calculer, à chaque instant, l'arc

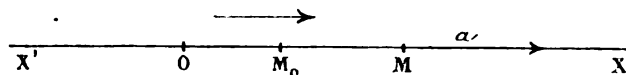


Fig. 1.

de la trajectoire qu'il décrit, compris entre un point fixe, appelé *origine* des déplacements, et la position actuelle du point.

Soit $X'X$ (fig. 1) la droite ou trajectoire décrite par le point M , x

POINCARÉ. Cinématique.

la mesure de la distance qui, à l'instant t , sépare le point M du point origine O . Les accroissements de la distance x devant être proportionnels aux accroissements du temps t , x est une fonction linéaire de t , par suite

$$(1) \quad x = at + b.$$

Pour $t = 0$, $x = b$; si donc à l'instant 0 le mobile M est en O , la loi du mouvement s'écrira

$$x = at.$$

Vitesse. — On appelle vitesse d'un mouvement uniforme et rectiligne la distance franchie par le mobile dans l'unité de temps.

Si dans la formule (1), t reçoit la variation 1, x varie de la constante a , donc a mesure la vitesse du mobile.

Vecteur vitesse. — On représente la vitesse par un segment de droite ayant pour mesure a . Ce segment a pour origine le point mobile M , pour direction celle de la trajectoire et pour sens le sens du mouvement.

Cette représentation de la vitesse, en intensité direction et sens, est ce que l'on nomme le *vecteur vitesse*.

MOUVEMENT RECTILIGNE VARIE

On dit que le mouvement du point M sur la droite $X'X$ est varié lorsque la loi de son déplacement n'est pas linéaire. On peut la représenter par la formule

$$x = \varphi(t).$$

Dans ce cas la vitesse du mobile à l'instant t a pour mesure la valeur que prend la dérivée

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$$

à l'instant t .

A chaque instant on représente la vitesse du mouvement rec-

tiligne varié par un vecteur défini comme précédemment. Ce vecteur a une longueur et un sens qui peuvent varier.

Accélération. — Dans le mouvement varié on considère une seconde qualité du mouvement à laquelle on a donné le nom d'*accélération*. Elle a pour mesure, dans le mouvement rectiligne, la valeur que prend à chaque instant la dérivée seconde.

$$\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Mouvement uniformément varié. — Le mouvement rectiligne varié le plus simple est celui pour lequel l'accélération conserve une valeur constante; c'est le mouvement rectiligne uniformément varié.

Désignons par J la mesure de l'accélération, on a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = J,$$

par suite, puisque J est une constante

$$\frac{dx}{dt} = Jt + v_0$$

et

$$x = \frac{1}{2} Jt^2 + v_0 t + x_0.$$

La loi du mouvement rectiligne uniformément varié est donc exprimée par un trinôme du second degré par rapport au temps.

Vitesse initiale. — A l'instant $t = 0$, on a

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \quad \text{et} \quad x = x_0,$$

donc v_0 mesure la vitesse du mobile à l'instant zéro, c'est-à-dire ce que l'on nomme la *vitesse initiale* du mobile; x_0 mesure la distance initiale OM_0 .

La constante J peut être positive ou négative : dans le premier

cas le mouvement est dit uniformément *accéléré*, dans le second il est uniformément *retardé*.

Vecteur accélération. — L'accélération J du mouvement *rectiligne* varié est représentée par un segment de droite ayant pour mesure J , appliqué au point mobile M dirigé suivant la trajectoire et dans le sens du mouvement ou en sens opposé selon que J est positif ou négatif : c'est le vecteur accélération.

Unités. — La mesure a d'une vitesse provient de la division de la mesure d'une longueur par celle d'un temps.

Le nombre a dépend donc des unités de longueur et de temps choisies.

Soient λ et τ les rapports des anciennes unités de longueur et de temps aux nouvelles. Soient l_0 et t_0 les mesures d'une longueur et d'un temps, on a :

$$a_0 = \frac{l_0}{t_0}.$$

Or, avec les nouvelles unités la longueur est mesurée par

$$l_n = l_0 \lambda.$$

De même :

$$t_n = t_0 \tau,$$

donc

$$a_n = \frac{l_n}{t_n} = \frac{l_0 \lambda}{t_0 \tau} = a_0 \lambda \tau^{-1}.$$

La nouvelle mesure de l'accélération serait de même :

$$J_n = J_0 \lambda \tau^{-2}.$$

MOUVEMENT CURVILIGNE

Un mouvement est curviligne lorsque la trajectoire du point est une ligne courbe.

La trajectoire et la loi du mouvement se trouvent définies si l'on donne les fonctions de t qui permettent de calculer à chaque instant les coordonnées x , y , z du point mobile.

On peut aussi se donner géométriquement la trajectoire, la loi du mouvement et la position du mobile à un instant déterminé.

La loi du mouvement pourra s'écrire $s = f(t)$, s désignant la longueur de l'arc de trajectoire parcouru à l'instant t à partir de l'origine.

Vitesse. — La vitesse a pour mesure à chaque instant la valeur de la dérivée $\frac{ds}{dt}$ à cet instant. On a donc :

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Par définition cette vitesse est dirigée suivant la tangente à la trajectoire au point où se trouve actuellement le mobile. Le vecteur vitesse est donc un segment appliqué au mobile ayant pour direction celle de la tangente, pour sens le sens du mouvement et pour mesure $\frac{ds}{dt}$.

Composantes de la vitesse suivant les trois axes. — On appelle

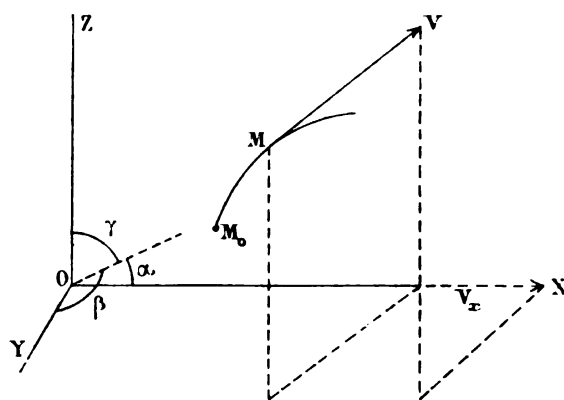


Fig. 2.

composante de la vitesse suivant une direction OX (fig. 2), la projection sur OX du vecteur vitesse.

Supposons la trajectoire rapportée à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, et soit MV la vitesse. Comme la vitesse MV est dirigée suivant la tangente cette semi-droite forme avec les

axes des angles α, β, γ qui ont respectivement pour cosinus

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds},$$

x, y, z étant les coordonnées du point M.

Désignons par V_x, V_y, V_z , les composantes cherchées, on a d'après le théorème des projections,

$$(1) \quad V_x = V \cos. \alpha = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}.$$

$$(2) \quad V_y = V \cos. \beta = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}.$$

$$(3) \quad V_z = V \cos. \gamma = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dt}.$$

La connaissance des composantes V_x, V_y, V_z détermine la vitesse en grandeur, direction et sens. En effet en ajoutant les égalités précédentes après en avoir élevé les deux membres au carré on a,

$$V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = V^2$$

égalité qui détermine la grandeur V de la vitesse. Les égalités (1), (2), (3) déterminent d'autre part les angles α, β et γ par leur cosinus.

Résultante de plusieurs vitesses. — Soient $V, V', V'' \dots W$ des vitesses appliquées à un même point; on dit que la vitesse W est la somme géométrique des vitesses $V, V' \dots$ si l'on a entre les composantes de ces diverses vitesses les trois relations :

$$W_x = V_x + V'_x + V''_x + \dots$$

$$W_y = V_y + V'_y + V''_y + \dots$$

$$W_z = V_z + V'_z + V''_z + \dots$$

On résume ces trois égalités dans la suivante :

$$\bar{W} = \bar{V} + \bar{V}' + \bar{V}'' + \dots$$

à laquelle on donne le nom d'égalité géométrique. On dit encore

que W est la résultante des vitesses $V, V', V'' \dots$ ou que $V, V', V'' \dots$ sont les composantes de la vitesse W .

Ces considérations s'étendent aux accélérations ou à un groupe de vecteurs d'origine quelconque.

Construction d'une résultante. — Soient les trois vecteurs MV, MV', MV'' (fig. 3). Par le point V menons la ligne VA égale et

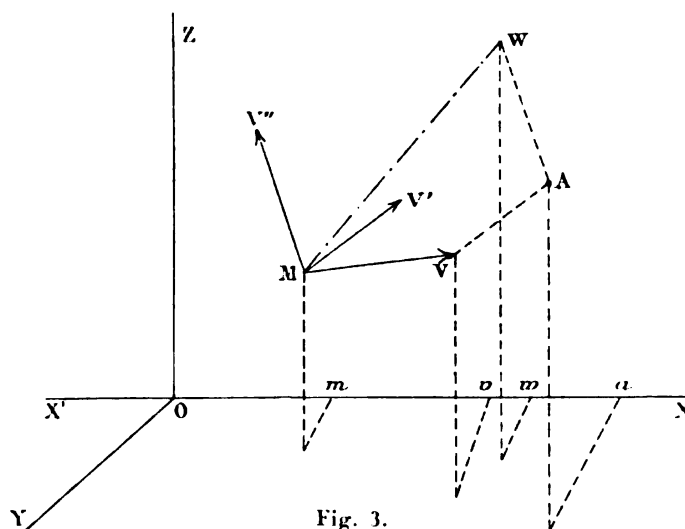


Fig. 3.

parallèle à MV' ; par A menons le segment AW égal et parallèle à MV'' . Le vecteur MW est la somme géométrique cherchée. En effet projetons sur un axe quelconque XX' parallèlement à un plan quelconque le contour $MVAWM$; on obtient ainsi les points m, v, a, w . On a entre les projections obtenues la relation

$$mw = mv + va + aw$$

les segments VA et AW sont égaux et parallèles aux vecteurs MV' et MV'' on a par suite

$$va = V'_x, aw = V''_x.$$

D'ailleurs $mv = V_x$, donc

$$mw = V_x + V'_x + V''_x.$$

or mw est la projection W_x sur XX' du vecteur MW , donc

$$W_x = V_x + V'_x + V''_x.$$

Comme l'axe XX' a été choisi d'une manière quelconque, la même relation s'applique aux axes OY et OZ ; donc le vecteur MW est la résultante des vecteurs V, V', V'' .

On déduit de là la règle du polygone : Pour trouver la somme géométrique de n vecteurs on construit un polygone plan ou gauche de $n+1$ côtés dont les n premiers côtés sont égaux et parallèles aux vecteurs à composer; le $(n+1)^{i\text{ème}}$ côté qui ferme le polygone est la résultante cherchée.

REMARQUE. — Cette règle comprend comme cas particulier celle du parallélogramme qui correspond au cas de deux vecteurs à composer et celle du parallélépipède qui correspond au cas de trois vecteurs à composer.

Décomposition d'un vecteur suivant des directions données. — Soit à décomposer le vecteur MW (fig. 4) en deux autres dirigés suivant MA et MB .

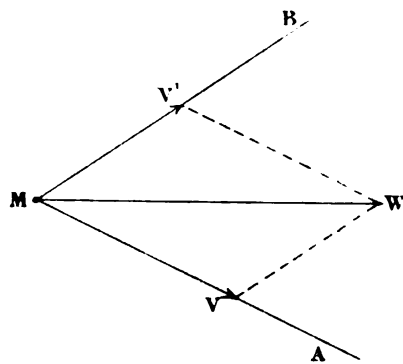


Fig. 4.

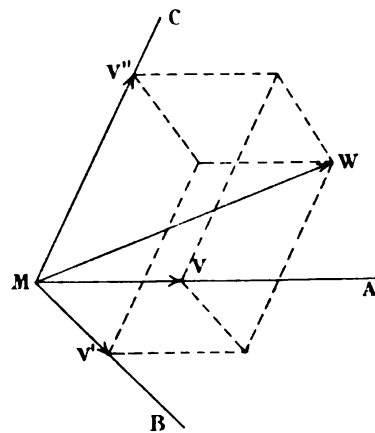


Fig. 5.

D'après ce qui précède le problème n'est possible qu'autant que les trois droites MW, MA et MB sont dans un même plan. En menant alors par W des parallèles à MB et à MA , on obtient les deux composantes cherchées MV et MV' .

Pour décomposer MW en trois vecteurs dirigés suivant les trois droites MA, MB et MC (fig. 5) on mènera par le point W extrémité du vecteur donné, trois plans respectivement parallèles aux trois plans AMB, BMC, CMA . On détermine ainsi un parallélépipède dont les arêtes MV, MV' et MV'' sont les composantes cherchées.

Si les directions MA, MB et MC sont deux à deux rectangulaires, le parallélépipède est rectangle et les trois arêtes MV, MV' et MV'' sont les projections de MW. Cette propriété explique la dénomination de composante donnée aux projections de MW sur les trois axes.

ACCÉLÉRATION D'UN POINT MOBILE DANS UN MOUVEMENT CURVILIGNE

L'accélération du mobile à l'instant t est un vecteur ayant le point M pour origine et dont les composantes suivant trois axes rectangulaires OX, OY, OZ ont pour mesure

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

On peut donner une autre définition de l'accélération. Soit OC (fig. 6) la trajectoire du mobile, M sa position à

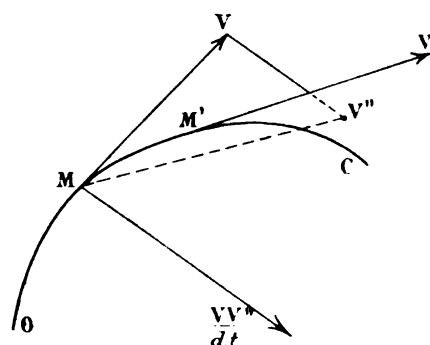


Fig. 6.

l'instant t , MV sa vitesse ; à l'instant $t + dt$ le mobile est en M' et a pour vitesse M'V'. Les vecteurs MV et M'V' ont respectivement pour composantes :

$$\begin{aligned} (\overline{MV}) \quad & \frac{dx}{dt} \quad \frac{dy}{dt} \quad \frac{dz}{dt} \\ (\overline{M'V'}) \quad & \frac{dx}{dt} + d\left(\frac{dx}{dt}\right), \quad \frac{dy}{dt} + d\left(\frac{dy}{dt}\right), \quad \frac{dz}{dt} + d\left(\frac{dz}{dt}\right). \end{aligned}$$

Par le point M menons le vecteur MV'' égal et parallèle à M'V' puis le vecteur VV'', on a

$$\overline{MV''} = \overline{MV} + \overline{VV''};$$

donc

$$\frac{dx}{dt} + d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dx}{dt} + \overline{VV''}_x;$$

par suite

$$\overline{VV''}_x = d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot dt.$$

Désignons par J_x , J_y , J_z les composantes de l'accélération J on a

$$\overline{VV'_x} = J_x dt.$$

De même,

$$\overline{VV'_y} = J_y dt.$$

$$\overline{VV'_z} = J_z dt.$$

En conséquence $\overline{VV''} = \overline{J \cdot dt}$. Ainsi en portant à partir du point M dans la direction VV'' une longueur égale à $\frac{VV''}{dt}$ on obtient le vecteur accélération du point mobile pour la position M .

APPLICATIONS. — 1° Déterminer la vitesse et l'accélération d'un point qui décrit une circonférence d'un mouvement uniforme. — Choisissons comme unité de longueur le rayon de la circonférence, soient OX et OY (fig. 7) les deux axes rectangulaires adoptés et M la position du mobile à l'instant t . Si ω mesure l'angle XOM les coordonnées de M sont :

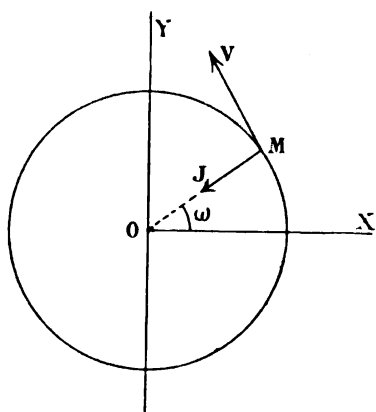


Fig. 7.

$$x = \cos \omega, \quad y = \sin \omega.$$

Le mouvement étant uniforme l'angle ω décrit par le rayon mobile OM est proportionnel au temps, on peut donc poser $\omega = \alpha t$, et écrire

$$x = \cos \alpha t, \quad y = \sin \alpha t.$$

Les composantes de la vitesse sont :

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -\alpha \sin \alpha t$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \alpha \cos \alpha t.$$

Par suite $V = \alpha$.

Cette vitesse est appliquée en M et est perpendiculaire à OM.
L'accélération a pour composantes :

$$J_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -x^2 \cdot \cos \alpha t$$

$$J_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -x^2 \cdot \sin \alpha t.$$

Donc $J^2 = x^4$, d'où $J = x^2$.

Montrons que l'accélération est dirigée de M vers le centre O de la trajectoire c'est-à-dire est centripète. Les cosinus directeurs de OM sont x et y, c'est-à-dire $\cos \alpha t$ et $\sin \alpha t$; ceux de l'accélération sont $\frac{J_x}{J}$ et $\frac{J_y}{J}$, c'est-à-dire $-\cos \alpha t$ et $-\sin \alpha t$; comme ils sont égaux et de signes contraires à ceux du vecteur OM l'accélération est dirigée de M vers O.

2° Cas où le mobile décrit une hélice d'un mouvement uniforme.

— Prenons comme axe des z l'axe du cylindre de rayon r sur lequel est tracé l'hélice (fig. 8). Prenons comme plan des xy le plan de la section droite, et pour axe des x le rayon qui rencontre l'hélice. Soient x, y, z les coordonnées de la position M du mobile, m sa projection sur le plan des xy. On a, en désignant par ω l'angle XOm,

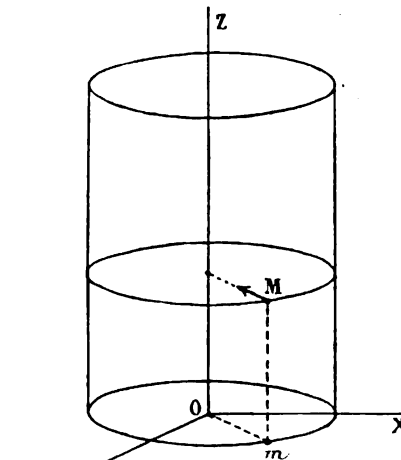


Fig. 8.

$$x = r \cos \omega$$

$$y = r \sin \omega.$$

Comme dans une hélice l'ascension du point M est proportionnelle à la rotation de sa projection m, on a

$$z = h \omega.$$

D'ailleurs si le mouvement est uniforme le mobile met des temps égaux à parcourir des arcs égaux, mais des arcs égaux

pris sur l'hélice correspondent à des arcs égaux sur la circonférence de base, donc on peut écrire $\omega = \alpha t$. En conséquence les coordonnées du mobile sont définies par les relations suivantes :

$$x = r \cos \alpha t, \quad y = r \sin \alpha t, \quad z = h \alpha t$$

Par suite les composantes de la vitesse sont :

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -r\alpha \sin \alpha t, \quad V_y = r\alpha \cos \alpha t, \quad V_z = h\alpha,$$

et celles de l'accélération sont :

$$J_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -r\alpha^2 \cos \alpha t, \quad J_y = -r\alpha^2 \sin \alpha t, \quad J_z = 0.$$

Ce dernier résultat montre que l'accélération est dans le plan de la section droite du cylindre menée par le point M. De plus ses cosinus directeurs sont égaux et de signes contraires à ceux du vecteur Om. Donc l'accélération du point M, étant dans le plan de la section droite et rencontrant l'axe, est normale au cylindre.

DÉCOMPOSITION DE LA VITESSE ET DE L'ACCÉLÉRATION D'UN MOUVEMENT

1^o Cas de la vitesse. — Supposons la trajectoire plane et soient OX, OY (fig. 9) les deux axes choisis, M la position du mobile à l'instant t, r la longueur du vecteur OM et ω l'angle polaire XOM. Calculons les composantes de la vitesse MV suivant le rayon vecteur OM et la perpendiculaire MP sur ce rayon. Les coordonnées du point M sont : $x = r \cos \omega$, $y = r \sin \omega$, par suite les composantes de la vitesse ont pour valeur

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -r \sin \omega \frac{d\omega}{dt} + \cos \omega \frac{dr}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= r \cos \omega \frac{d\omega}{dt} + \sin \omega \frac{dr}{dt}. \end{aligned}$$

Désignons par A et B les composantes de la vitesse suivant OM

et MP , on a $\vec{V} = \vec{A} + \vec{B}$. Cette égalité donne en considérant les projections sur OX et OY .

$$\frac{dx}{dt} = A \cos \omega - B \sin \omega$$

$$\frac{dy}{dt} = A \sin \omega + B \cos \omega;$$

en remplaçant $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ par leurs valeurs il vient :

$$-r \sin \omega \frac{d\omega}{dt} + \frac{dr}{dt} \cos \omega = A \cos \omega - B \sin \omega.$$

$$r \cos \omega \frac{d\omega}{dt} + \frac{dr}{dt} \sin \omega = A \sin \omega + B \cos \omega.$$

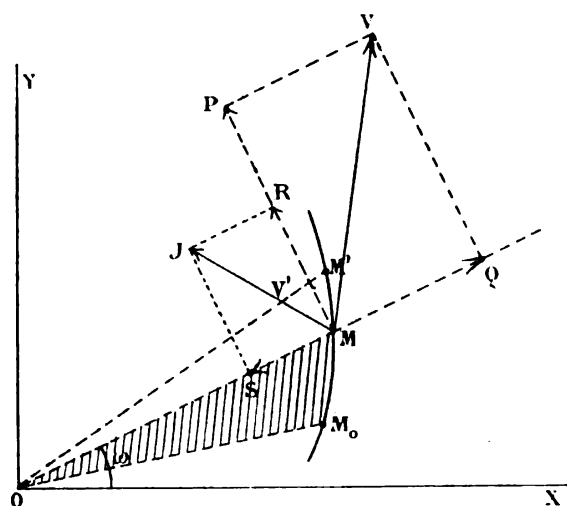


Fig. 9.

Ces deux égalités sont simultanément satisfaites en prenant $A = \frac{dr}{dt}$, $B = r \frac{d\omega}{dt}$.

Ainsi $\frac{dr}{dt}$ et $r \frac{d\omega}{dt}$ sont les mesures des composantes MQ et MP de la vitesse suivant le rayon vecteur et la perpendiculaire au rayon vecteur.

2° Cas de l'accélération. — Calculons d'abord les composantes

de l'accélération en mettant en facteur $\cos \omega$ d'une part et $\sin \omega$ d'autre part, on a :

$$J_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 \right] \cos \omega - \left[r \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{2dr}{dt} \frac{d\omega}{dt} \right] \sin \omega.$$

$$J_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \left[r \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{2dr}{dt} \frac{d\omega}{dt} \right] \cos \omega + \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 \right] \sin \omega.$$

Désignons par R et P les composantes de l'accélération J suivant le rayon vecteur OM et la perpendiculaire MP sur ce rayon, on a l'égalité géométrique $\bar{J} = \bar{R} + \bar{P}$, par suite

$$J_x = R_x + P_x, \quad J_y = R_y + P_y;$$

donc

$$J_x = R \cos \omega - P \sin \omega$$

$$J_y = R \sin \omega + P \cos \omega.$$

En se reportant aux valeurs de J_x et J_y on voit que les deux égalités précédentes exigent que P et R aient les valeurs suivantes :

$$P = r \frac{d^2\omega}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\omega}{dt}$$

$$R = \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2.$$

VITESSE ARÉOLAIRE

Supposons qu'à l'instant zéro le mobile soit en M_0 (fig. 9) et qu'il soit en M à l'instant t , le rayon vecteur OM_0 a balayé pendant le temps l'aire t du secteur M_0OM , désignons cette aire fonction du temps par H ; on appelle vitesse aréolaire du mobile M à l'instant t une grandeur mesurée par la dérivée $\frac{dH}{dt}$.

Calculons $\frac{dH}{dt}$ en fonction des coordonnées polaires r et ω . Le mobile étant en M à l'instant t est en M' à l'instant

t + dt, l'aire MOM' balayée pendant le temps dt a pour mesure $\frac{1}{2} r^2 d\omega$, on a donc

$$dH = \frac{1}{2} r^2 d\omega$$

et par suite

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\omega}{dt}.$$

REMARQUE. — On peut exprimer aisément la vitesse aréolaire en utilisant les coordonnées x, y du mobile. En effet les coordonnées du point M sont x, y celles du point M', x + dx, y + dy enfin celles du point O sont 0, 0. L'aire dH du triangle est donnée par le déterminant

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x + dx & y + dy & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x dy - y dx)$$

donc

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right).$$

Loi des aires. — Dans certains mouvements naturels importants la vitesse aréolaire est constante, à la condition de choisir convenablement le pôle O. On dit dans ce cas que le mouvement du point obéit à la loi des aires par rapport au point O ; dans de tels mouvements les aires balayées par le rayon vecteur OM, comptées à partir d'une position OM₀ de ce vecteur, sont proportionnelles aux temps employés à les parcourir. On exprimera que le mouvement obéit à la loi des aires en écrivant que l'on a à chaque instant

$$r^2 \frac{d\omega}{dt} = C,$$

ou si l'on utilise les coordonnées x et y :

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C,$$

C étant une constante.

THÉOREME. — Si un mobile décrit une trajectoire plane en satisfaisant à la loi des aires, son accélération est constamment dirigée suivant le rayon vecteur MO.

Il suffit, pour démontrer ce théorème, de vérifier que la composante P de l'accélération normale au rayon vecteur est constamment nulle dans le cas considéré.

Puisque la vitesse aréolaire est constante on a :

$$r^2 \frac{d\omega}{dt} = C.$$

d'où

$$2r \frac{dr}{dt} \frac{d\omega}{dt} + r^2 \frac{d^2\omega}{dt^2} = 0;$$

en divisant par r il vient :

$$2 \frac{dr}{dt} \frac{d\omega}{dt} + r \frac{d^2\omega}{dt^2} = 0.$$

Or, le premier membre de cette égalité est l'expression de la composante P, donc

$$p = 0.$$

On démontrerait la réciproque en répétant le même calcul en sens inverse.

EXERCICE 1. — Étant donnée une ellipse dont les demi-axes sont a et b , on peut représenter les coordonnées du point M

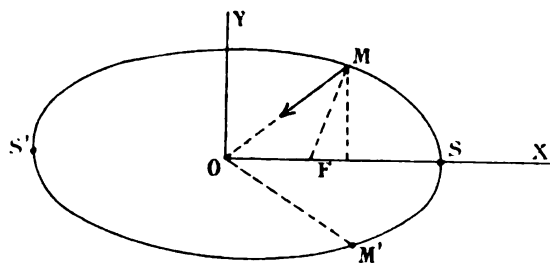


Fig. 10.

rapporté aux axes OX et OY (fig. 10) de l'ellipse par les équations $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$. Quelle doit être la fonction φ du

temps pour que le point M décrive l'ellipse de façon que le rayon vecteur OM satisfasse à la loi des aires? Calculer l'accélération du mobile?

Puisque le mouvement satisfait à la loi des aires, on a

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C;$$

d'où, en remplaçant x , y , $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ par leurs valeurs,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{ab} = K, \text{ donc } \varphi = Kt + K'.$$

En choisissant l'origine des temps de façon que $\varphi = 0$ pour $t = 0$, les coordonnées x et y du point M sont :

$$x = a \cos Kt; \quad y = b \sin Kt.$$

L'accélération est dirigée suivant MO, soit R sa valeur. En projetant sur OX on a

$$R \frac{x}{r} = \frac{d^2x}{dt^2} = -K^2x,$$

donc

$$R = -K^2r.$$

L'accélération est dirigée vers le point O et est de plus proportionnelle à la longueur OM.

EXERCICE 2. — Calculons l'accélération du mouvement précédent en supposant que le pôle, au lieu d'être au centre de l'ellipse, coïncide avec l'un des foyers F.

En prenant comme axe polaire la portion de l'axe dirigée vers le sommet S le plus voisin de l'ellipse, l'équation de l'ellipse est $r = \frac{p}{1 - e \cos \omega}$, p désignant le paramètre de la courbe et e son excentricité. Puisque la vitesse aréolaire est constante, l'accélération se réduit à la composante R dirigée suivant le rayon vecteur, elle a pour expression

$$(1) \quad R = \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2.$$

D'autre part

$$(2) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = R \cos \omega,$$

En remarquant que $x = r \cos \omega$ l'équation de l'ellipse peut s'écrire

$$r - ex = p$$

Cette égalité donne en prenant deux fois la dérivée

$$\frac{d^2r}{dt^2} - e \frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

En remplaçant $\frac{d^2r}{dt^2}$ et $\frac{d^2x}{dt^2}$ par leurs valeurs tirées des équations (1) et (2) il vient :

$$R(1 - e \cos \omega) + r \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 = 0.$$

Or $1 - e \cos \omega = \frac{p}{r}$; d'autre part, puisque la vitesse aréolaire du mobile est constante, on a

$$r^2 \frac{d\omega}{dt} = C,$$

par suite

$$\left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 = \frac{c^2}{r^3}$$

on peut donc écrire :

$$R \frac{p}{r} + \frac{c^2}{r^3} = 0,$$

d'où

$$R = -\frac{c^2}{p} \frac{1}{r^2}.$$

Donc si FM satisfait à la loi des aires, l'accélération est dirigée vers le foyer et elle varie en raison inverse du carré de la distance du mobile au foyer, par conséquent l'accélération est maximum en S et minimum en S'; elle reprend la même valeur pour deux points M, M' de l'ellipse symétriques par rapport au grand axe.

Ces conclusions s'appliquent au mouvement des planètes : on

sait en effet, par les observations de Kepler, que les planètes décrivent des ellipses dont le soleil occupe l'un des foyers.

EXPRESSION DES COMPOSANTES NORMALE ET TANGENTIELLE DE L'ACCÉLÉRATION DANS LE CAS D'UN MOUVEMENT CURVILIGNE.

Soit MV la vitesse du mobile à l'instant t et $M'V'$ sa vitesse à l'instant $t + dt$; menons par le point M une ligne MV'' égale et parallèle à $M'V'$, on détermine ainsi un plan VMV'' . Lorsque le point M' tend vers le point M , ce plan tourne autour de la tan-

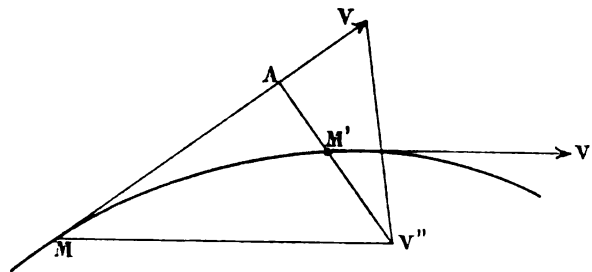


Fig. 11.

gente MV et tend vers une position limite à laquelle on a donné le nom de plan osculateur à la trajectoire au point M (fig. 11).

L'accélération du mobile en M est parallèle à la direction limite VV'' , elle est donc dans le plan osculateur, par suite l'accélération n'a pas de composante perpendiculaire au plan osculateur. Il y a seulement à exprimer : 1° la composante T suivant la tangente MV ou composante tangentielle; 2° la composante N dirigée dans le plan osculateur suivant la normale à la courbe : c'est l'accélération normale.

Calcul de T . — Abaissons du point V'' une perpendiculaire $V''A$ sur MV , on a :

$$\overline{VV''} = \overline{VA} + \overline{AV''}$$

ou encore

$$\overline{M'V'} - \overline{MV} = \overline{VA} + \overline{AV''}$$

Prenons la tangente MV comme axe de projection, la projection de AV'' est nulle, celle de MV est égale à v , la projection de AV est égale à AV ou Tdt , celle de $M'V'$ est égale à $(v + dv) \cos VMV''$, ou $v + dv$, car l'angle VMV'' a pour limite zéro. Par suite, $dv = AV$;

donc
$$T = \frac{dv}{dt}.$$

Calcul de N . — On a $\overline{AV''} = Ndt$, or $\overline{VV''} = \overline{VA} + \overline{AV''}$. Projections sur AV'' ; la projection de AV'' est Ndt , la projection de VA est nulle, celle de VV'' est égale à celle de MV'' , c'est-à-dire à $(v + dv) dz$, en désignant par dz l'angle infiniment petit AMV'' qui est l'angle de contingence en M ; on a donc

$$Ndt = (v + dv) dz = vdz,$$

car le produit $dv dz$ est un infiniment petit du second ordre. Ainsi

$$N = v \frac{dz}{dt}.$$

En désignant par ρ le rayon de courbure de la trajectoire en M . on a, d'après la définition même du rayon de courbure,

$$\rho dz = ds,$$

par suite

$$\rho \frac{dz}{dt} = \frac{ds}{dt} = v,$$

d'où

$$\frac{dz}{dt} = \frac{v}{\rho}.$$

En substituant cette valeur à $\frac{dz}{dt}$ dans l'expression de N il vient :

$$N = \frac{v^2}{\rho}.$$

En remarquant que la direction de l'accélération normale est celle de $\overline{VV''}$ on voit que l'accélération est toujours dirigée du côté du centre de courbure.

REMARQUE. — Si le mouvement est uniforme, la mesure de la vitesse est indépendante du temps, $\frac{dv}{dt}$ est nul, l'accélération se réduit à sa composante normale. En conséquence, si un mobile décrit une trajectoire quelconque plane ou gauche d'un mouvement uniforme, son accélération est toujours dirigée suivant la normale principale à la courbe ; la réciproque est évidente.

Si la trajectoire présente des points d'inflexion, comme le rayon de courbure ρ est infini en de tels point v est nulle et l'accélération se réduit à sa composante tangentielle.

Réciproquement, lorsque N prend la valeur zéro, ou bien ρ est infini et la trajectoire présente des points d'inflexion, ou bien v est nul : or v s'annule pour changer de sens, donc de tels points de la trajectoire sont des points de rebroussement.

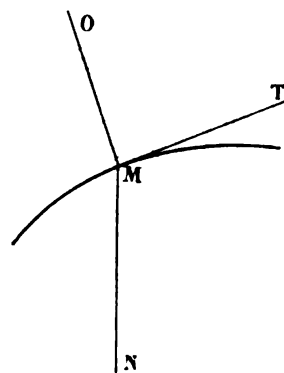


Fig. 12.

Calcul de T et de N. — *Utilisation des formules de Frénet.* — Soit M (fig. 12) la position du mobile, MT la tangente en M, MN la normale principale, c'est-à-dire contenue dans le plan osculateur, MO la binormale ou perpendiculaire au plan osculateur.

Soient T, N et O les composantes de l'accélération suivant ces trois axes rectangulaires.

La vitesse en M a pour mesure $\frac{ds}{dt}$, elle est dirigée suivant MT dont les cosinus directeurs sont $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ et $\frac{dz}{ds}$. On a donc

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{dx}{ds} ; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{dy}{ds} ; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{dz}{ds}.$$

Par conséquent, les composantes de l'accélération ont pour expression :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{dx}{ds} \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{dy}{ds} \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{dz}{ds} \frac{d^2s}{dt^2}$$

Ces trois égalités montrent que l'accélération en M peut être considérée comme la résultante de deux autres accélérations ayant pour composantes suivant les trois axes : l'une

$$(1) \quad \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2s}{dt^2}, \quad \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2s}{dt^2}, \quad \frac{dz}{ds} \cdot \frac{d^2s}{dt^2};$$

l'autre

$$(2) \quad \frac{d^2x}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2, \quad \frac{d^2y}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2, \quad \frac{d^2z}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2.$$

Si l'on porte sur MT un vecteur ayant pour mesure $T = \frac{d^2s}{dt^2}$ on obtiendra l'accélération tangentielle, car les projections d'un tel vecteur sur les axes sont exprimées par les valeurs (1) puisque $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ sont les cosinus directeurs de MT.

En désignant par ρ le rayon de courbure M. Frénet a établi que les cosinus directeurs λ, μ, ν de la normale principale sont donnés par les formules :

$$\lambda = \rho \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \mu = \rho \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \nu = \rho \frac{d^2z}{ds^2}.$$

Ces cosinus sont donc proportionnels aux composantes du vecteur (2), que nous désignerons par N, donc le vecteur N est dirigé suivant la normale principale.

Puisque l'accélération peut être décomposée en deux vecteurs dirigés suivant MT et MN, elle est nécessairement contenue dans le plan osculateur TMN; par suite, sa composante suivant la binormale MO est nulle.

Expression de T et de N. — On a trouvé $T = \frac{d^2s}{dt^2}$; comme $\frac{ds}{dt} = v$, on peut écrire $T = \frac{dv}{dt}$.

De même on a trouvé

$$N_x = \frac{d^2x'}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2,$$

or

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\lambda}{\rho}$$

done

$$N_x = \frac{\lambda}{\rho} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \lambda \frac{1}{\rho} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2;$$

par suite

$$N = \frac{1}{\rho} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{v^2}{\rho}.$$

APPLICATIONS. — 1° *Etude du mouvement uniforme sur une hélice quelconque. Rayon de courbure en un point de l'hélice.* — Prenons comme plan des xy (fig. 13) une section droite du cylin-

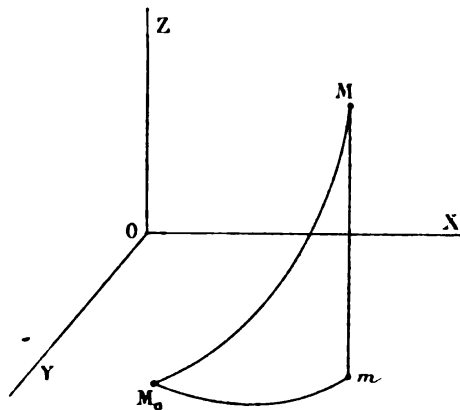


Fig. 13.

dre rencontrée en M_0 par l'hélice. Soit M la position du mobile à l'instant t , et m sa projection sur le plan des xy . Puisque la courbe est une hélice, la distance $z = Mm$ est proportionnelle à l'arc $M_0 M$ de l'hélice. Si X, Y, Z sont les coordonnées de M on a :

$$(1) \quad X = \varphi(s), \quad Y = \chi(s), \quad Z = zs;$$

$s = \text{arc MoM}$ et α est une constante. Les coordonnées de m sont :

$$(2) \quad x = X, \quad y = Y, \quad z = 0.$$

Calculons le rapport des vitesses du mobile M et de sa projection m , on a en désignant par v la vitesse de m

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

or

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{ds} V.$$

V étant la vitesse du mobile M . On a de même :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds} V,$$

par suite,

$$v^2 = V^2 \left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \right];$$

puisque $x = X$ et $y = Y$, on peut écrire :

$$v^2 = V^2 \left[\left(\frac{dX}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dY}{ds}\right)^2 \right].$$

Comme $\frac{dX}{ds}$, $\frac{dY}{ds}$, $\frac{dZ}{ds}$ sont les cosinus directeurs de la tangente en M à l'hélice, on a :

$$\left(\frac{dX}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dY}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{ds}\right)^2 = 1.$$

Mais $\frac{dZ}{ds} = \alpha$ donc

$$\left(\frac{dX}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dY}{ds}\right)^2 = 1 - \alpha^2;$$

et par suite

$$v^2 = V^2 (1 - \alpha^2).$$

Le mouvement du point M étant uniforme V est une constante il en est donc de même de v , ainsi le mouvement du point m sur la section droite est uniforme.

Démontrons que les accélérations des points M et m sont égales et parallèles. En effet, les relations (1) et (2) montrent que les composantes de ces deux accélérations sont égales; comme d'ailleurs la composante suivant les génératrices du cylindre est nulle, les accélérations des points m et M sont contenues dans les sections droites qui correspondent à ces points. Les mouvements des points M et m étant uniformes, les composantes tangentielles des accélérations sont nulles, donc les accélérations sont dirigées suivant les normales au cylindre puisqu'elles sont contenues dans une section droite et qu'elles sont de plus normales à une ligne tracée sur le cylindre.

Soient ρ et ρ' les rayons de courbure des trajectoires des points M et m, les accélérations de ces points sont $\frac{V^2}{\rho}$ et $\frac{v^2}{\rho'}$; comme elles sont égales on a

$$\frac{V^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho'},$$

d'où

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{V^2}{v^2} = \frac{1}{1-x^2}.$$

En conséquence le rayon de courbure en un point M de l'hélice est proportionnel au rayon de courbure de la section droite au point m projection de M.

2° *Calcul du rayon de courbure en un point d'une ellipse en utilisant le mouvement Képlerien.* — Le pôle est au foyer F (fig. 14), le mobile est en M à l'instant t, son accélération est dirigée de M vers F et a pour valeur $\frac{K}{r^2}$.

La composante normale de l'accélération est $\frac{v^2}{\rho}$, par conséquent

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{K}{r^2} \cdot \cos \theta,$$

θ mesure l'angle formé par le rayon vecteur FM avec la normale en M, par suite,

$$\rho = \frac{v^2 r^2}{K \cos \theta}.$$

Calculons v . La vitesse aréolaire est constante, elle est d'ailleurs égale à $\frac{\text{aire } FMM'}{dt}$, M' étant la position du mobile à l'instant

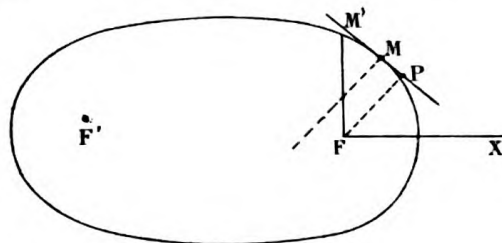


Fig. 14.

$t + dt$; or $\text{aire } FMM' = \frac{1}{2} MM' \times FP$; d'autre part $MM' = v dt$, $FP = r \cos \theta$, donc $\text{aire } FMM' = \frac{1}{2} v r \cos \theta dt$, la vitesse aréolaire a par suite pour valeur $\frac{1}{2} v r \cos \theta$. Désignons sa valeur constante par $\frac{c}{2}$, on peut alors écrire

$$vr = \frac{c}{\cos \theta},$$

d'où l'on déduit

$$\rho = \frac{c^2}{K \cos^3 \theta}.$$

En conséquence le rayon de courbure en un point de l'ellipse varie en raison inverse du cube du cosinus de l'angle que fait le rayon vecteur FM au point M considéré avec la normale à l'ellipse en ce point.

CHAPITRE II

MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE INVARIABLE GLISSANT SUR UN PLAN

On dit qu'une figure est invariable lorsque la distance de deux quelconques de ses points reste constante.

Mouvement de rotation. Vitesse angulaire. — Une figure plane est animée d'un mouvement de rotation sur un plan lorsque l'un de ses points reste fixe sur ce plan ; le point fixe s'appelle centre de rotation.

Direction de la vitesse. — Prenons le centre de rotation pour origine et comme axes deux droites rectangulaires OX, OY tracées sur le plan fixe (fig. 15). Soient M et M' deux points quelconques de la figure mobile, r, ω, r', ω' leurs coordonnées polaires ; leurs coordonnées rectilignes sont :

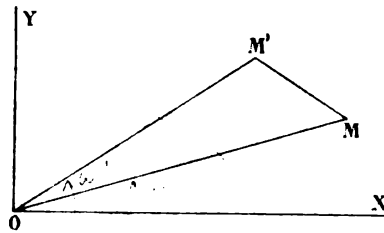


Fig. 15.

$$\begin{aligned} x &= r \cos \omega, & x' &= r' \cos \omega' \\ y &= r \sin \omega, & y' &= r' \sin \omega'. \end{aligned}$$

Comme les points O, M, M' appartiennent à la figure invariable les deux distances r et r' sont constantes, par conséquent

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{dr'}{dt} = 0.$$

Or ces dérivées mesurent les composantes de la vitesse des points M et M' suivant les rayons vecteurs OM, OM'. Ces composantes étant nulles, il en résulte que les vitesses des points M sont perpendiculaires sur les rayons vecteurs tels que OM.

Vitesse angulaire. — Puisque la figure MOM' est invariable, l'angle MOM' est constant, par suite

$$\omega' - \omega = c^{te},$$

d'où

$$\frac{d\omega'}{dt} = \frac{d\omega}{dt}.$$

La valeur constante $\frac{d\omega}{dt}$ mesure ce que l'on nomme la vitesse angulaire de rotation de la figure à l'instant t .

Il est facile d'exprimer les composantes de la vitesse du point M par exemple suivant les axes OX, OY . On a en effet

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -r \sin \omega \frac{d\omega}{dt} = -y \frac{d\omega}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= r \cos \omega \frac{d\omega}{dt} = x \frac{d\omega}{dt}.\end{aligned}$$

Translation. — Supposons que le centre de rotation, au lieu de coïncider avec l'origine des axes choisis, ait pour coordonnées α, β par rapport à ces axes. En désignant par $x' y'$ les nouvelles coordonnées du point M , on a

$$x = \alpha + x', \quad y = \beta + y'.$$

D'autre part, $\frac{dx}{dt} = -y' \frac{d\omega}{dt}$, donc

$$\frac{dx'}{dt} = -(y - \beta) \frac{d\omega}{dt},$$

ou encore

$$\frac{dx}{dt} = -(y - \beta) \frac{d\omega}{dt};$$

de même

$$\frac{dy}{dt} = (x - \alpha) \frac{d\omega}{dt}.$$

Supposons que les coordonnées α et β tendent vers l'infini en même temps que $\frac{d\omega}{dt}$ tend vers zéro, et supposons de plus que

les produits $\beta \frac{d\omega}{dt}$, $\alpha \frac{d\omega}{dt}$ tendent vers des limites finies b et a , on aura alors

$$\frac{dx}{dt} = -b, \quad \frac{dy}{dt} = a.$$

Dans de telles conditions tous les points de la figure ont des vitesses égales et parallèles. On dit que la figure est animée d'un mouvement de translation sur le plan fixe, ou encore que le centre de rotation est à l'infini. Si l'une seulement des coordonnées α , β tend vers l'infini, le centre de rotation s'éloigne à l'infini parallèlement à l'un des axes.

THÉORÈME. — Quelle que soit la loi du mouvement d'une figure plane sur un plan fixe, on peut toujours la faire passer par un mouvement de rotation de la position P qu'elle occupe à l'instant t à la position P' qu'elle occupe à l'instant $t + dt$.

1° Démonstration analytique. — Traçons sur le plan fixe deux axes rectangulaires OX , OY (fig. 16), et sur la figure mobile deux axes rectangulaires $O'\xi$, $O'\eta$. A un instant quelconque un point M peut être considéré, soit comme appartenant au plan fixe : il a alors pour coordonnées x , y , soit comme appartenant au plan mobile : il a alors pour coordonnées ξ et η .

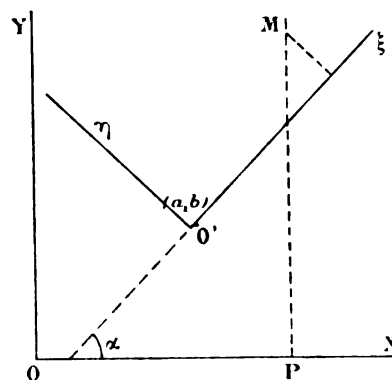


Fig. 16.

Un lieu de points M appartenant au plan fixe aura une équation telle que $f(x, y) = 0$, tandis qu'un lieu de points M appartenant au plan mobile aura une équation telle que $\varphi(\xi, \eta) = 0$.

Pour déterminer complètement le mouvement de la figure $\xi O'\eta$, il suffit de donner les fonctions du temps qui définissent les coordonnées a , b du point O' ainsi que l'angle α que forme l'axe mobile $O'\xi$ avec l'axe fixe OX .

On désignera par a' , b' , α' les dérivées des fonctions a , b , α du temps.

Calculons les composantes de la vitesse du mobile M suivant OX et OY . Les formules de transformation de coordonnées fournissent les relations suivantes :

$$x = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha + a; \quad y = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha + b$$

On a, en remarquant que ξ et η sont des constantes :

$$\frac{dx}{dt} = -(\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha) \alpha' + a'.$$

$$\frac{dy}{dt} = (\xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha) \alpha' + b'.$$

En remplaçant les parenthèses par leurs valeurs $y - b$, $x - a$ il vient :

$$\frac{dx}{dt} = -(y - b) \alpha' + b'; \quad \frac{dy}{dt} = (x - a) \alpha' + a'.$$

S'il y a à l'instant t un point de la figure dont la vitesse soit nulle, on pourra dire que ce point est fixe à l'instant t , et que la vitesse de chacun des autres points de la figure est la même que si celle-ci tournait autour du point fixe.

Déterminons le centre de rotation. Ses coordonnées x_0, y_0 doivent vérifier les deux équations :

$$-(y_0 - b) \alpha' + a' = 0,$$

$$(x_0 - a) \alpha' + b' = 0.$$

Ces équations résolues donnent

$$x_0 = a - \frac{b'}{\alpha'}, \quad y_0 = b + \frac{a'}{\alpha'}.$$

Comme les coordonnées x_0, y_0 sont en général des fonctions du temps, la position de ce point change à chaque instant; on lui donne pour cette raison le nom de *centre instantané de rotation*.

Calculons la vitesse angulaire du mouvement de rotation instantané qui correspond au centre x_0, y_0 . On a

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha' (y - y_0); \quad \frac{dy}{dt} = \alpha' (x - x_0).$$

Par conséquent la vitesse angulaire de rotation autour du point x_0, y_0 est mesurée par α' .

REMARQUE. — Pour $\alpha' = 0$ le mouvement est une translation, car les coordonnées x_0, y_0 deviennent infinies et tous les points mobiles ont des vitesses égales et parallèles.

2° *Démonstration géométrique* : LEMME D'EULER. — Étant données deux positions quelconques P et P' (fig. 17) prises

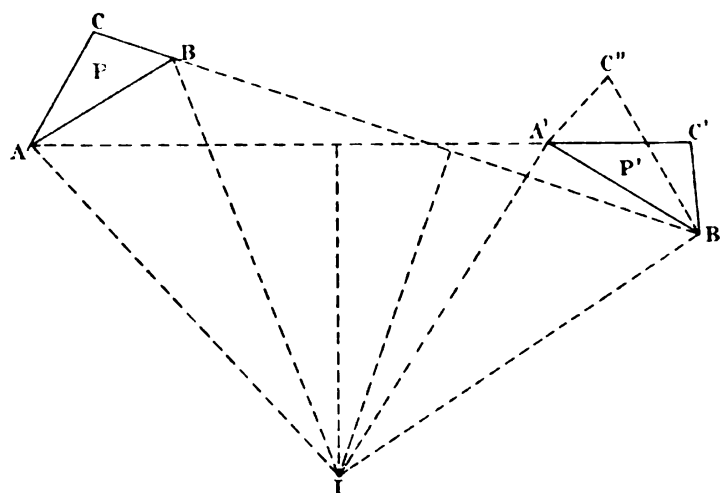


Fig. 17.

par une figure plane mobile sur un plan fixe, on peut toujours faire passer la figure de la position P à la position P' par un mouvement de rotation effectué autour d'un centre convenablement déterminé.

Considérons trois points A, B, C de la figure dans la position P; ils sont en A', B', C' dans la position P'. Comme la figure mobile est invariable, les deux triangles ABC et A' B' C' sont égaux; de plus cette figure se déplaçant sans quitter le plan, on doit rencontrer les sommets identiques dans le même ordre lorsqu'on tourne dans le même sens.

Traçons les lignes AA' et BB' et élevons au milieu de chacune d'elles des perpendiculaires dont le point de rencontre est en I. D'après la construction les triangles AIA', BIB' sont isocèles, par suite les triangles AIB, A'IB' sont égaux comme ayant les

trois côtés égaux chacun à chacun ; les angles en I dans ces deux triangles sont donc égaux. En ajoutant à ces angles égaux l'angle BIA' on obtient respectivement les angles égaux AIA' BIB'. Les triangles AIA', BIB' sont donc égaux. Par conséquent en faisant tourner la figure P autour du point I de l'angle AIA' le point A se rendra en A' et le point B en B', le point C tombera aussi en C' : en effet, lorsque AB coïncide avec A'B' les points C et C' doivent être du même côté par rapport à A'B'. Les deux triangles ABC et A'B'C' étant égaux, et ayant un côté en coïncidence par les sommets identiques, coïncideront eux-mêmes puisque les points C et C' sont d'un même côté par rapport à A'B'. Donc la rotation considérée amène C en C'.

Centre instantané de rotation. — On peut dire que le point I est le centre géométrique de rotation relatif aux deux positions P et P'. Deux autres positions P₁, P'₁ donneront un second centre I₁. Si les positions P et P' sont infiniment voisines, le point I se nomme centre instantané de rotation.

Propriété géométrique du centre instantané de rotation. — Si à l'instant t on joint les différents points mobiles au centre instantané de rotation correspondant, on obtient des droites normales aux trajectoires décrites par les points mobiles sur le plan fixe.

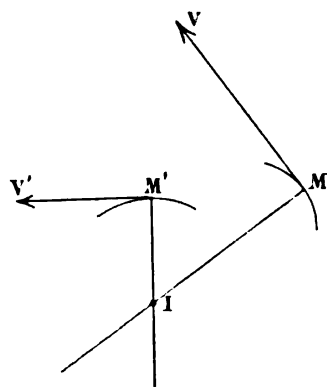


Fig. 18.

En effet soit M (fig. 18) un point mobile, I le centre instantané de rotation. A l'instant t le point M peut être considéré comme tournant autour du point I, sa vitesse MV est donc perpendiculaire sur MI. D'autre part la vitesse MV du mobile est dirigée suivant la tangente en M à sa trajectoire,

donc MI est la normale en M à la trajectoire du point.

APPLICATION. — Tracé de la tangente à l'ellipse. — Soient OX, OY (fig. 19) deux droites rectangulaires, AB une droite de longueur fixe qui se déplace dans le plan XOY de façon que les points A et B restent toujours sur OX, OY. Soit M un point fixe de la droite mobile tel que $MB = a$ et $MA = b$.

Lorsque la droite AB fait l'angle φ avec OX, les coordonnées x et y du point M sont : $x = a \cos \varphi$; $y = b \sin \varphi$. Donc lorsque φ varie, le point M décrit une ellipse dont les demi-axes sont a et b .

A l'instant t les extrémités mobiles de la droite sont en A et B ; les normales correspondantes aux trajectoires OX , OY de ces points se rencontrent en I , donc I est le centre de rotation à l'instant t , par suite IM est la normale au point M de l'ellipse ; la perpendiculaire MT à MI est la tangente en M à l'ellipse.

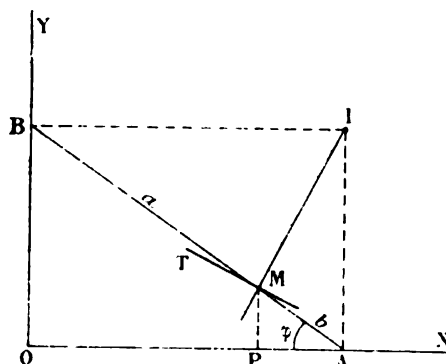


Fig. 19.

THÉOREME. — Étant donnée une courbe C (fig. 20) invariablement liée à la figure mobile et l'enveloppe E des positions successives qu'elle occupe ; la tangente à l'enveloppe au point de contact M avec la courbe C coïncide avec la tangente en M à la trajectoire décrite par ce point considéré comme invariablement lié à la figure mobile.

1° *Démonstration analytique.* — Soit $\varphi(\xi, \eta) = 0$ l'équation de la courbe C, elle devient, en remplaçant ξ et η par leurs valeurs tirées des formules de transformation de coordonnées (p. 30), $F(x, y, t) = 0$.

Les différents points M de l'enveloppe E vérifient les deux équations :

$$F(x, y, t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

A l'instant $t + dt$ le point M de l'enveloppe sera en un point M_1 de coordonnées $x + dx$, $y + dy$. Les variations dx et dy des coordonnées satisfont à la relation $\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$ qui peut s'écrire :

$$(1) \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{dy}{dx} = 0;$$

$\frac{dy}{dx}$ est le coefficient angulaire de la tangente en M à l'enveloppe.

Le point de la courbe C qui est en M à l'instant t est, à l'instant $t + dt$, en un point M' de coordonnées $x + \partial x$, $y + \partial y$. D'ailleurs les variations ∂x , ∂y et dt satisfont à la relation $\frac{\partial F}{\partial x} \partial x + \frac{\partial F}{\partial y} \partial y + \frac{\partial F}{\partial t} dt = 0$. Or $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ à l'instant t pour les points M, par suite $\frac{\partial F}{\partial x} \partial x + \frac{\partial F}{\partial y} \partial y = 0$ relation qui peut s'écrire :

$$(2) \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0;$$

$\frac{\partial y}{\partial x}$ est le coefficient angulaire de la tangente en M à la trajectoire du point M. En comparant les égalités (1) et (2) on voit que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x},$$

donc les tangentes en M à l'enveloppe et à la trajectoire du point M coïncident puisqu'elles ont un point commun, et même direction.

COROLLAIRE. — La normale en M à l'enveloppe passe par le centre instantané de rotation correspondant.

En effet la normale en M à l'enveloppe coïncide avec la normale en M à la trajectoire de ce point.

2° Démonstration géométrique. — Soient C et C' (fig. 20) deux positions infiniment voisines de la courbe mobile et E l'enveloppe des positions successives prises par la courbe C. Soit M le point de contact des courbes C et E à l'instant t, et M₁ leur point de contact à l'instant $t + dt$.

Le point M de C est en M' à l'instant $t + dt$. Traçons les sécantes MM₁ et MM'; lorsque M₁ tend vers M, MM₁ tend vers la tangente en M à l'enveloppe, tandis que MM' devient la tangente en M à la courbe décrite par le point M. Il faut démontrer que ces deux positions limites coïncident. Soit TT' la position limite de MM₁, et MN la normale commune aux courbes C, E. Des

On a $Mm' \equiv Mm_1 + m_1m'$.

D'autre part $m_1 m' = M_1 M' \sin M'M_1 m_1$. Or l'angle $M'M_1 m_1$ est infiniment petit, car il est égal à la somme de deux angles


$$Mm' = MM' \sin M'T'.$$

APPLICATIONS. — 1° *Tangente à la conchoïde.* — Soit C (fig. 21) une courbe quelconque, O un point fixe, OM un rayon vecteur. A partir du point M portons sur ce rayon une longueur constante $MM' = 1$, le lieu du point M' se nomme une conchoïde de la courbe C. La conchoïde M' peut être considérée comme engendrée par le point M' d'une droite assujettie à passer constamment par le point fixe O, un même point M de cette droite se déplaçant le long de la courbe C. L'enveloppe des positions de la droite D est

le point O , donc le centre instantané de rotation qui correspond à la position OD de la droite est à l'intersection de la normale menée au point O à la droite D et de la normale menée au point M

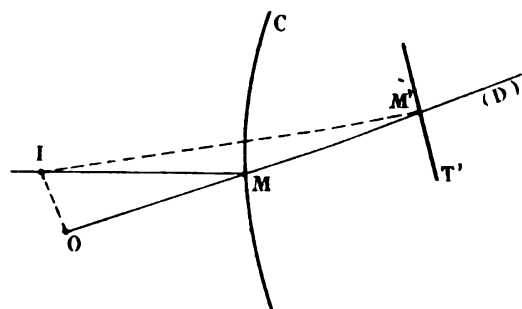


Fig. 21.

à la trajectoire C de ce point, il est donc en I ; par suite la droite IM' est normale en M' à la trajectoire de ce point, c'est-à-dire à la conchoïde. La perpendiculaire $M'T$ à IM' est tangente à la conchoïde en M' .

2° Un angle de grandeur fixe se déplace sur un plan de façon que ses côtés restent tangents à deux courbes données C et C' (fig. 22).

Tracer la tangente à la trajectoire du sommet S de l'angle.

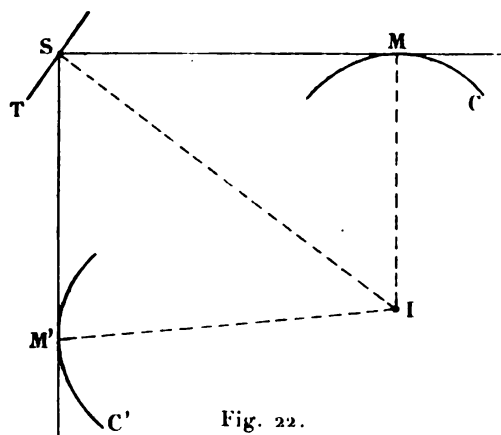


Fig. 22.

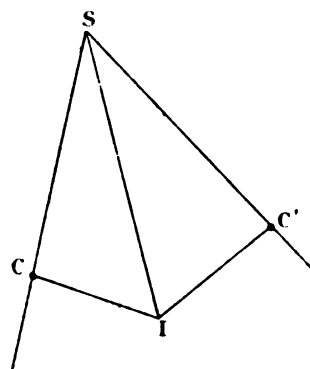


Fig. 23.

La courbe C est l'enveloppe des positions du côté SM , donc le centre instantané de rotation est sur la normale MN à C .

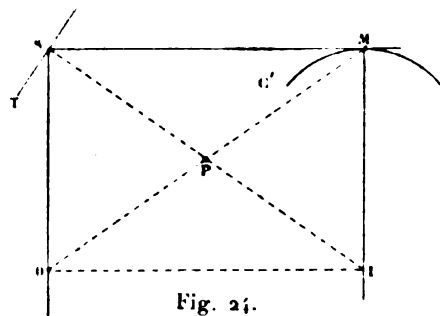
Pour la même raison il est sur la normale $M'N'$ à C' , il est donc en I .

Par suite la ligne SI est normale à la trajectoire du point S , donc la perpendiculaire élevée sur SI est la tangente ST demandée.

REMARQUE. — Comme cas particulier, les deux courbes C et C'

peuvent se réduire à deux points C et C' (fig. 23). La construction est la même.

Si l'angle S est droit, l'un des côtés de l'angle restant tangent à une courbe C' et l'autre côté passant par un point fixe O (fig. 24)



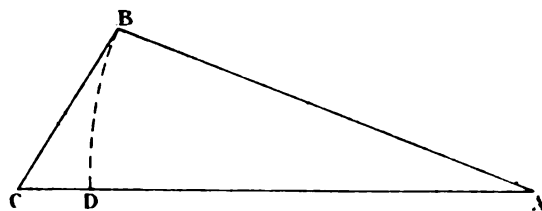
le lieu du point S est ce que l'on nomme la podaire de la courbe C' par rapport au point O.

La tangente ST à la podaire au point S est aussi tangente en S à la circonférence décrite sur OM comme diamètre, car la figure OSMI étant un rectangle, le centre du cercle de diamètre OM est sur le milieu P de SI, donc PS est un rayon de la circonférence, et comme ST est perpendiculaire à l'extrémité de ce rayon, c'est une tangente à la circonférence.

MOUVEMENT D'UNE COURBE MOBILE INVARIABLE

ASSUJETTIE A RESTER TANGENTE A UNE COURBE FIXE

LEMME. — Etant donné un triangle ABC (fig. 25) dont les côtés sont infiniment petits du premier ordre et dont l'angle A est infini-



ment petit, on peut écrire $BC \approx AC - AB$. De plus ou bien le côté BC est un infiniment petit du second ordre, ou bien l'angle C est infiniment petit.

Comme dans un triangle quelconque un côté est plus grand que la différence des deux autres, on a $BC \geq AC - AB$. Du point A comme centre avec AB pour rayon décrivons l'arc BD. On a $CD = AC - AD$, et d'autre part $BC \leq CD + BD$. Or BD est un infiniment petit du second ordre car $BD = AB \times BAD$. Donc on pourra le négliger et écrire $BC \leq CD$ ou encore $BC \leq AC - AD$. En conséquence on peut écrire

$$(1) \quad AC - AD \geq BC \geq AC - AB,$$

or $AD = AB$ puisqu'on a décrit du point A comme centre avec AB pour rayon l'arc BD, donc les inégalités (1) exigent que l'on ait :

$$BC = AC - AB$$

Les côtés d'un triangle étant proportionnels aux sinus des angles opposés on a

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

par suite

$$(2) \quad BC = \frac{AB \sin A}{\sin C}.$$

Si l'angle C est fini il en est de même de $\sin C$, par suite BC est un infiniment petit du second ordre car AB et $\sin A$ sont des infiniment petits, du premier ordre. Si au contraire C est infiniment petit le rapport $\frac{\sin A}{\sin C}$ est fini et par suite BC est du même ordre que AB.

La formule (2) montre que si BC est un infiniment petit du second ordre, AB étant un infiniment petit du premier ordre, il faut que $\frac{\sin A}{\sin C}$ soit un infiniment petit du premier ordre et par suite que A soit infiniment petit, l'angle C étant fini.

Roulement et glissement. — Soit E la courbe fixe (fig. 26). C et C' deux positions de la courbe mobile, M et M₁ leurs points de contact avec E. Soit A l'origine des arcs mesurés sur E. B l'origine des arcs comptés sur la courbe C. A l'instant t on a

$$AM = s, \quad BM = s'$$

On dit que la courbe C roule sur la courbe E lorsque l'on a

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds'}{dt}.$$

Cette égalité entraîne la suivante : $s - s' = c^{te}$.

En choisissant convenablement les origines A et B on pourra écrire $s = s'$.

On dit qu'il y a glissement de la courbe C sur la courbe E si l'on a $\frac{ds}{dt} < \frac{ds'}{dt}$.

THÉOREME. — *Lorsqu'une courbe C roule sur une courbe E le point de contact M des deux courbes à l'instant t est le centre instantané de rotation à l'instant t .*

Pour démontrer ce théorème il faut établir que la vitesse du point M est nulle. Soient C et C' (fig. 26) deux positions infiniment voisines de la courbe mobile, M et M_1 sont les deux points de contact et M' la position que prend le point M de la courbe C lorsque celle-ci vient en C' . Considérons le triangle MM_1M' dont les côtés sont infiniment petits. Comme les sécantes M_1M' , M_1M ont pour limite la même droite à savoir la tangente commune en M_1 aux deux courbes C' et E , l'angle en M_1 est infiniment petit; on peut donc écrire d'après le lemme :

$$MM' = MM_1 - M'M_1$$

d'où

$$\frac{MM'}{dt} = \frac{MM_1}{dt} - \frac{M'M_1}{dt}.$$

Or $MM_1 = ds$ et $M'M_1 = ds'$, donc

$$\frac{MM'}{dt} \text{ (vitesse du point } M) = \frac{ds}{dt} - \frac{ds'}{dt}.$$

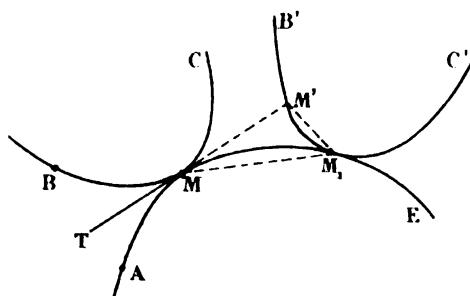


Fig. 26.

S'il y a roulement $\frac{ds}{dt} = \frac{ds'}{dt}$, la vitesse du point M est donc nulle, c'est le centre instantané de rotation.

S'il y a glissement, la vitesse du point M est différente de zéro, par suite MM' est un infiniment petit du premier ordre, d'après le lemme l'angle en M est infiniment petit; d'où il résulte que la vitesse du point M est dirigée suivant la tangente MT à la courbe E.

Expression de la vitesse angulaire de rotation dans le mouvement de roulement. — Soit E la courbe fixe et C une position de la

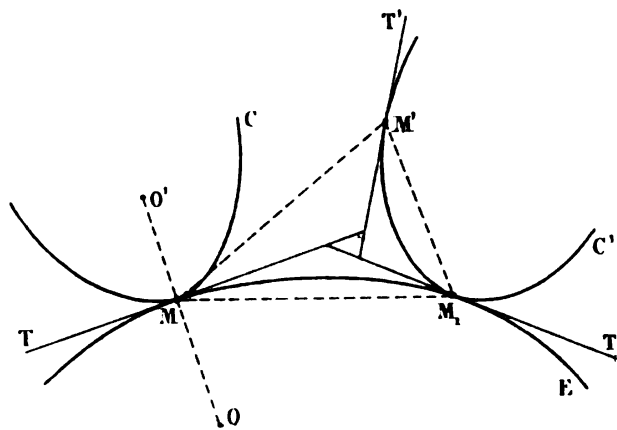


Fig. 27.

courbe mobile (fig. 27); on sait que le point M est le centre instantané de rotation. Désignons par $\alpha' = \frac{d\alpha}{dt}$ la vitesse angulaire de rotation de la figure autour du point M. Toutes les droites de la figure mobile tournent dans le temps dt du même angle d α . Or la droite MT vient en M'T' par cette rotation, donc l'angle de ces deux droites est égal à d α ; le triangle formé par les tangents MT, M₁T₁, M'T' donne

$$\text{angle } (MT, M'T') = \text{angle } (MT, M_1T_1) + \text{angle } (M_1T_1, M'T')$$

Mais $\text{angle } (MT, M_1T_1) = d\beta$ angle de contingence de la courbe E au point M. Angle M₁T₁, M'T' = d γ angle de contingence de la courbe C' au point M'; par suite :

$$d\alpha = d\beta + d\gamma.$$

Cette égalité peut s'écrire :

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{d\beta}{ds} + \frac{d\tau}{ds} \right) \frac{ds}{dt}.$$

Or

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{1}{\rho}, \quad \frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\rho'};$$

ρ et ρ' désignant les rayons de courbure MO , MO' des courbes E et C au point M . La vitesse angulaire de rotation a donc pour expression :

$$\alpha' = \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) \frac{ds}{dt};$$

$\frac{ds}{dt}$ représente la vitesse du point de contact M sur la courbe fixe E .

RÉDUCTION D'UN MOUVEMENT PLAN A UN MOUVEMENT DE ROULEMENT

THÉORÈME. — *Quelle que soit la loi du mouvement d'une figure plane sur un plan fixe on peut toujours ramener celui-ci à un mouvement de roulement. La loi du mouvement initial influe sur la nature et la position de la courbe fixe E et de la courbe mobile C ainsi que sur la vitesse angulaire de rotation instantanée.*

On a établi précédemment que dans le mouvement d'une figure plane sur un plan fixe la vitesse d'un point quelconque est la même, à chaque instant, que si la figure tournait autour d'un point appelé centre instantané de rotation dont les coordonnées sont :

$$x_0 = a - \frac{b'}{\alpha'}; \quad y_0 = b + \frac{a'}{\alpha'}.$$

Ces coordonnées sont des fonctions du temps, on peut donc écrire :

$$x_0 = \varphi(t); \quad y_0 = \chi(t).$$

L'élimination de t entre ces deux égalités donne :

$$F(x_0, y_0) = 0.$$

C'est l'équation d'une courbe tracée sur le plan fixe xoy (fig. 28). Cette courbe est le lieu des points du plan fixe qui coïncident avec le centre instantané de rotation de la figure mobile aux divers instants. On donne à cette courbe le nom de *base* du mouvement.

Déterminons maintenant le lieu des points du plan mobile qui sont successivement centres de rotation. Désignons par ξ_0 et η_0

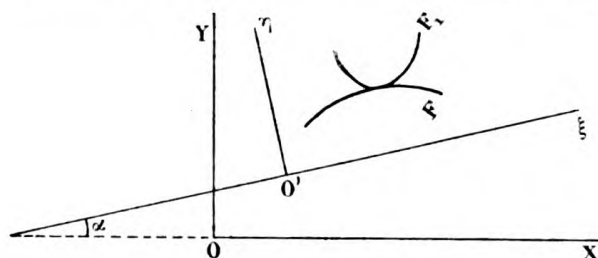


Fig. 28.

les coordonnées du point mobile qui a pour coordonnées x_0, y_0 par rapport aux axes fixes. Les formules de transformation de coordonnées donnent :

$$\begin{aligned}\xi_0 &= (x_0 - a) \cos \alpha + (y_0 - b) \sin \alpha \\ \eta_0 &= (x_0 - a) \sin \alpha - (y_0 - b) \cos \alpha.\end{aligned}$$

ξ_0 et η_0 sont des fonctions du temps que l'on peut représenter par $\varphi_1(t)$ et $\chi_1(t)$. En éliminant t entre les deux équations :

$$\xi_0 = \varphi_1(t), \quad \eta_0 = \chi_1(t)$$

on obtient :

$$F_1(\xi_0, \eta_0) = 0.$$

C'est l'équation du lieu des points du plan mobile rapporté aux axes mobiles $O'\xi, O'\eta$ qui deviennent successivement centres de rotation. On donne à ce lieu le nom de roulette. La *roulette* est la trajectoire du centre instantané de rotation pour un observateur invariablement lié à la figure mobile, tandis que la *base* est la trajectoire du centre instantané de rotation pour un observateur lié au plan fixe.

THÉORÈME. — *La roulette est constamment tangente à la base et roule sur la base pendant que la figure mobile se déplace.*

Soit B la base (fig. 29), R la position de la roulette à l'instant t et R' sa position à l'instant $t + dt$. Le point M de la roulette qui appartient à la base à l'instant t est en M' à l'instant $t + dt$. Le triangle $MM'M_1$, M_1 étant le point de rencontre de R' et de B à l'instant $t + dt$, a ses côtés infiniment petits. Comme d'ailleurs le point M est centre instantané de rotation à l'instant t , sa vitesse est nulle par suite $\frac{MM'}{dt} = 0$, donc MM' est un infiniment petit du second ordre; d'après le lemme préliminaire l'angle M_1 est alors infiniment petit. Or les côtés M_1M' , M_1M de cet angle diffèrent infiniment peu des tangentes en M_1 aux courbes B et R' . Donc l'angle formé par ces tangentes est infiniment petit, par suite les deux courbes R' et B sont tangentes en M_1 , comme d'ailleurs le point M_1 est quelconque la roulette et la base sont constamment tangentes. Dans le triangle infinitésimal $MM'M_1$, l'angle en M_1 étant infiniment petit, on a

$$MM' = MM_1 - M'M_1,$$

ou

$$\frac{MM'}{dt} = \frac{MM_1}{dt} - \frac{M'M_1}{dt}.$$

Or M étant un centre instantané de rotation, MM' est du second ordre, donc

$$0 = \frac{MM_1}{dt} - \frac{M'M_1}{dt};$$

comme $MM_1 = ds$, $M'M_1 = ds'$ on a

$$0 = \frac{ds}{dt} - \frac{ds'}{dt},$$

donc pendant le mouvement de la figure mobile la courbe R roule sur la courbe B. Cette propriété justifie les noms de base et de roulette donnés à ces deux courbes.

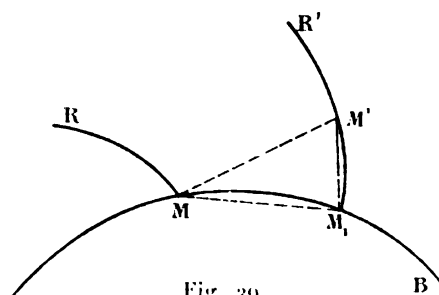


Fig. 29

Détermination de la base et de la roulette dans quelques cas simples. — 1° Le mouvement du plan mobile est défini par le glissement des extrémités d'une droite de longueur constante sur deux droites fixes rectangulaires ox , oy (fig. 30).

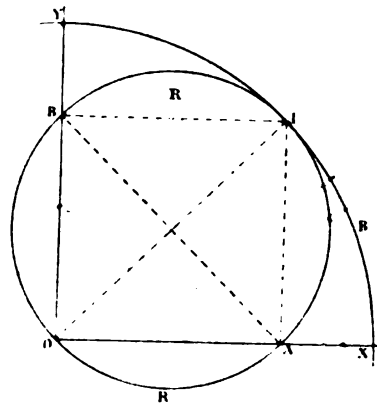


Fig. 30.

Construisons le centre instantané I qui correspond à la position AB. La base est le lieu des points I sur le plan xoy , comme OI a une longueur constante et que le point O est fixe, le lieu des points I sur le plan fixe est une circonférence de centre O et de rayon $OI = AB$. Quelle que soit la position de AB on voit AB du point I sous un angle droit. Le lieu des points I du plan mobile desquels on voit AB sous un angle droit est une circonférence décrite sur AB comme diamètre. La circonférence de diamètre OI est donc la roulette.

Ainsi au mouvement de la figure mobile défini par le glissement de AB sur les axes x o y , on peut substituer le mouvement équivalent défini par le roulement de la figure R sur la circonférence B.

2° Le mouvement de la figure mobile est défini par le déplacement d'un angle constant APB (fig. 31) dont les côtés sont assujettis à passer par deux points fixes A et B.

Puisque les points A et B sont fixes, le segment AB est constant. Comme l'angle P est constant il en est de même de l'angle en I formé par les deux droites AI et IB perpendiculaires en A et B aux droites PA et PB ; or I est le centre instantané de

Fig. 31.

Une droite D' (fig. 32) se déplace de manière à passer constamment par un po

Le centre de rotation I est à l'intersection des perpendiculaires élevées en O et O' aux droites D' et D. Prenons comme axes fixes OX perpendiculaire sur D et OY parallèle à D, et pour axes mobiles la droite D' et la perpendiculaire O'ξ à cette droite.

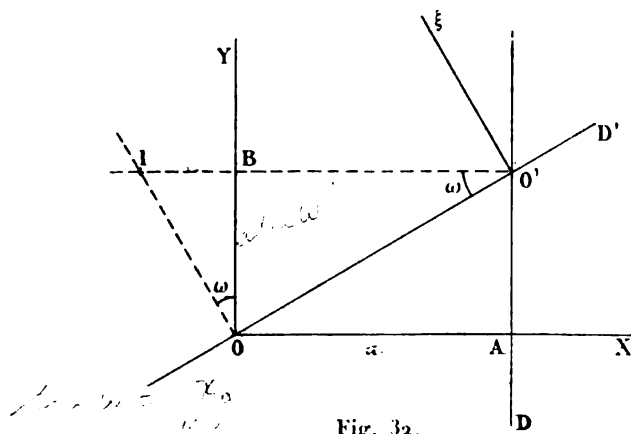


Fig. 32.

Les coordonnées du point I sont, sur le plan fixe :

$$x_0 = -a \operatorname{tg}^2 \omega, \quad y_0 = a \operatorname{tg} \omega;$$

ω désigne l'angle que forme la droite D' avec OX et a la distance OA .

En éliminant $\operatorname{tg} \omega$ entre ces deux équations, il vient :

$$y_0^2 + ax_0 = 0.$$

C'est l'équation d'une parabole, donc la base est une parabole.

Les coordonnées du point I par rapport aux axes mobiles sont :

$$\xi_0 = \frac{a \sin \omega}{\cos^2 \omega}; \quad \eta_0 = \frac{a \cos \omega}{\cos^2 \omega};$$

en éliminant ω on obtient l'équation de la roulette :

$$(\xi_0^2 + \eta_0^2) a^2 = \eta_0^4.$$

La roulette est donc une courbe du quatrième degré.

4° Le mouvement du plan mobile est défini par les conditions suivantes : un angle droit mobile O' (fig. 33) est tel que l'un des

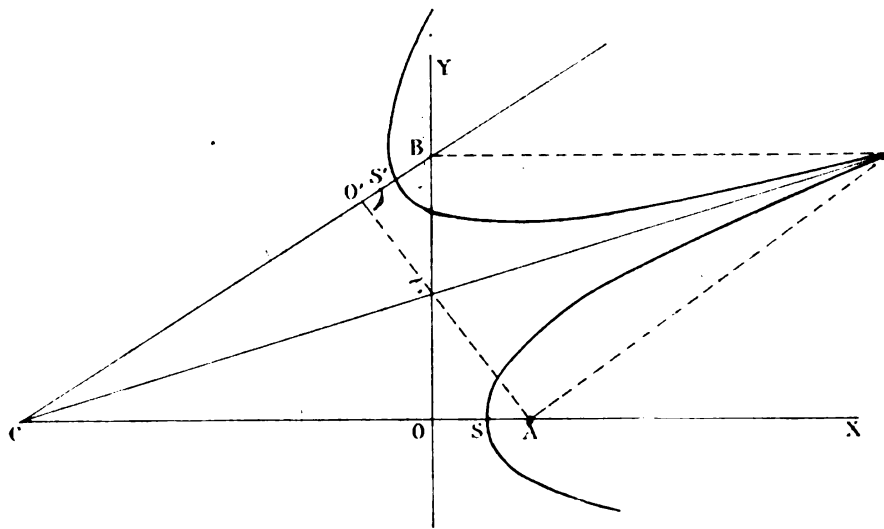


Fig. 33.

côtés passe par un point fixe A pris sur une droite fixe OX, de plus un point B de l'autre côté de l'angle droit décrit la perpendiculaire oy sur ox, enfin $OA = O'B$.

Le centre instantané de rotation est au point I, cherchons le lieu des points I sur le plan fixe xoy ; pour cela prolongeons BO' jusqu'à sa rencontre en C avec ox. La figure AIBC est un parallélogramme puisque les côtés opposés sont parallèles, comme

$OA = O'B$ ce parallélogramme est un losange, par suite $BI = IA$ donc les points I sont à une distance égale de la droite fixe oy et du point fixe A , ils appartiennent donc à une parabole ayant la droite oy pour directrice et le point A pour foyer. Comme la diagonale CI est bissectrice de l'angle I , la droite CI est tangente au point I à la parabole.

Cherchons maintenant la roulette, c'est-à-dire le lieu des points I sur le plan mobile.

Le point I est à égale distance de la droite $O'A$ et du point B du plan mobile, donc la roulette est une parabole ayant $O'A$ pour directrice et le point B pour foyer. Comme les deux paraboles, base et roulette ont même paramètre elles sont égales; elles sont d'ailleurs symétriques par rapport à la droite CI :

Accélération d'un point invariablement lié au plan mobile.

— On a trouvé que les composantes de la vitesse d'un point M du plan mobile suivant les axes ox et oy ont pour mesure $\frac{dx}{dt}$

$= -\alpha'(y - y_0)$; $\frac{dy}{dt} = \alpha'(x - x_0)$; x_0, y_0 étant les coordonnées du centre de rotation à l'instant considéré et α' la vitesse angulaire de rotation. Les composantes de l'accélération suivant les mêmes axes ont pour mesure :

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\alpha''(y - y_0) - \alpha' \frac{dy}{dt} + \alpha' \frac{dy_0}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \alpha''(x - x_0) + \alpha' \frac{dx}{dt} - \alpha' \frac{dx_0}{dt}.\end{aligned}$$

À l'instant t on peut prendre comme origine des coordonnées le centre instantané I de rotation, pour axe des x la tangente en I à la base et pour axe des y la normale (fig. 34). Dans ces conditions

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad \frac{dx_0}{dt} = \frac{ds}{dt}, \quad \frac{dy_0}{dt} = 0;$$

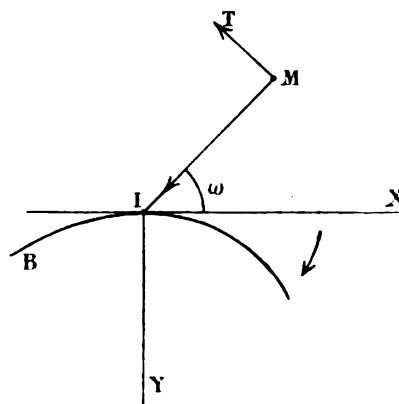


Fig. 34.

par suite les composantes de l'accélération du point choisi M suivant les axes I_x et I_y ont pour expression, en remarquant que $\frac{dx}{dt} = -\alpha'y$ et $\frac{dy}{dt} = \alpha'x$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha''y - \alpha'^2x; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \alpha''x - \alpha'^2y - \alpha' \frac{ds}{dt}.$$

En désignant par r et ω les coordonnées polaires du point M, on a

$$x = r \cos \omega; \quad y = r \sin \omega.$$

Et par suite :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\alpha''r \sin \omega - \alpha'^2r \cos \omega \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \alpha''r \cos \omega - \alpha'^2r \sin \omega - \alpha' \frac{ds}{dt}. \end{aligned}$$

Ces deux dernières égalités montrent que l'on peut regarder l'accélération du point M comme la somme algébrique de trois accélérations ayant respectivement pour composantes, sur ox :

$$-\alpha''r \sin \omega; \quad -\alpha'^2r \cos \omega; \quad 0;$$

sur oy :

$$+\alpha''r \cos \omega; \quad -\alpha'^2r \sin \omega; \quad -\alpha' \frac{ds}{dt}.$$

Les cosinus directeurs de la droite MI sont : $-\cos \omega$ et $-\sin \omega$. Ceux de la perpendiculaire MT à MI sont donc : $-\sin \omega$ et $\cos \omega$; donc la première composante de l'accélération est dirigée suivant MT et a pour mesure $\alpha''r$. La deuxième composante α'^2r a pour cosinus directeurs $-\cos \omega$ et $-\sin \omega$, elle est donc dirigée suivant MI. Enfin la troisième composante est parallèle à la normale Iy à la base et a pour mesure $-\alpha' \frac{ds}{dt}$. Cette composante peut être considérée comme la résultante de deux accélérations dirigées l'une suivant la tangente à la trajectoire du point M et l'autre suivant la normale. Ces composantes tangentielle et normale ont pour mesure :

$$-\alpha' \frac{ds}{dt} \cos \omega \quad \text{et} \quad +\alpha' \frac{ds}{dt} \sin \omega.$$

Il résulte de là que l'accélération du point M a respectivement pour projection sur MT et sur MI :

$$\alpha''r - \alpha' \frac{ds}{dt} \cos \omega; \quad \alpha'^2 r + \alpha' \frac{ds}{dt} \sin \omega.$$

Lieu des points du plan mobile dont l'accélération tangentielle est nulle à un instant donné. — D'après le calcul précédent la composante tangentielle de l'accélération d'un point du plan mobile de coordonnées r et ω a pour mesure $\alpha''r - \alpha' \frac{ds}{dt} \cos \omega$. Les coordonnées des points cherchés sont donc définies par la condition :

$$\alpha''r - \alpha' \frac{ds}{dt} \cos \omega = 0.$$

On déduit de là

$$r = \frac{\alpha'}{\alpha''} \frac{ds}{dt} \cos \omega.$$

A un instant donné α', α'' et $\frac{ds}{dt}$ sont des constantes, l'équation du lieu est donc de la forme

$$r = \Lambda \cos \omega.$$

C'est un cercle passant par l'origine I et tangent à l'axe des y qui est la normale en I à la base (fig. 35).

Lieu des points du plan mobile dont l'accélération normale est nulle à un instant donné.

— Comme l'accélération normale d'un point de coordonnées r, ω , (l'origine étant le centre instantané de rotation et l'axe polaire la tangente à la base), a pour mesure $\alpha'^2 r + \alpha' \frac{ds}{dt} \sin \omega$, le lieu des points cherchés est défini par la condition

$$\alpha'^2 r + \alpha' \frac{ds}{dt} \sin \omega = 0,$$

on déduit de là :

$$r = -\frac{1}{\alpha'} \frac{ds}{dt} \sin \omega.$$

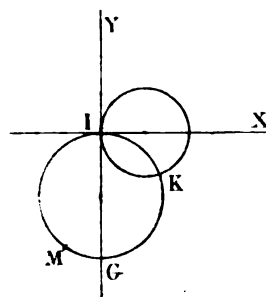


Fig. 35.

Le lieu a donc une équation de la forme $r = B \sin \omega$. C'est une circonférence passant par le point I et tangente à l'axe Ix (fig. 35).

Point d'accélération nulle. — Les deux circonférences que l'on vient d'obtenir se coupant au point I se coupent en un second point K. Comme ce point n'a ni accélération tangentielle ni accélération normale il a une accélération nulle.

Cercle des inflexions. — L'accélération normale d'un point P du plan mobile a pour expression $\frac{V^2}{\rho}$.

Si P appartient à la circonférence lieu des points d'accélération normale nulle on a $\frac{V^2}{\rho} = 0$.

Lorsque P ne coïncide pas avec I, V est différent de zéro par suite ρ est infini. En P la trajectoire du point ayant un rayon de courbure infini présente un point d'inflexion. Cette propriété a fait donner au cercle considéré le nom de *cercle des inflexions* à l'instant t. La circonférence des inflexions sera placée au-dessous de la tangente Ix si α' est positif, elle est placée au-dessus si α' est négatif. Son diamètre IG a pour mesure $\frac{1}{\alpha'} \frac{ds}{dt}$ ou ce qui revient au même $\frac{ds}{d\alpha}$.

Construction du centre de courbure en un point de la trajectoire de M. — Soit I (fig. 36) le centre instantané de rotation à l'instant t, Ix la tangente à la base, Iy la normale, IG le cercle des inflexions et M la position du point mobile considéré. Le rayon vecteur MI prolongé rencontre la circonférence en un point D. Soit C le centre de courbure relatif à la trajectoire du point M, on a

$$IG = \frac{ds}{d\alpha}, \quad \text{donc} \quad ID = \frac{ds}{d\alpha} \sin \omega.$$

Posons $\rho = MC$ et soit V la vitesse du point M à l'instant t. L'accélération normale de M a pour mesure d'une part $\frac{V^2}{\rho}$ et d'autre part $\alpha'^2 r + \alpha' \frac{ds}{dt} \sin \omega$. D'ailleurs $V^2 = \alpha'^2 r^2$, on a donc

$$\frac{\alpha'^2 r^2}{\rho} = \alpha'^2 r + \alpha' \frac{ds}{dt} \sin \omega,$$

d'où

$$(1) \quad \frac{r^2}{\rho} = r + \frac{ds}{dz} \sin \omega.$$

On a (fig. 36) $r = IM$, $\rho = MC$, $\frac{ds}{dz} \sin \omega = ID$, donc la relation (1) peut s'écrire :

$$\frac{IM^2}{MC} = IM + ID = MD.$$

En résumé le point C est déterminé par la relation :

$$IM^2 = MC.MD.$$

Sa construction exige la connaissance du point G diamétralement opposé du centre instantané I sur la circonférence des inflexions.

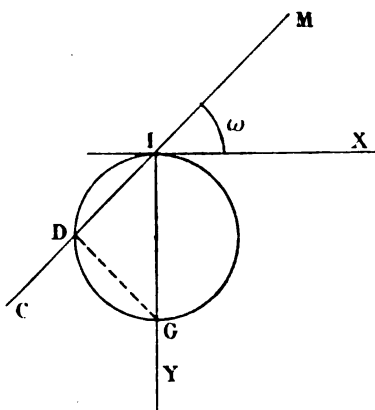


Fig. 36.

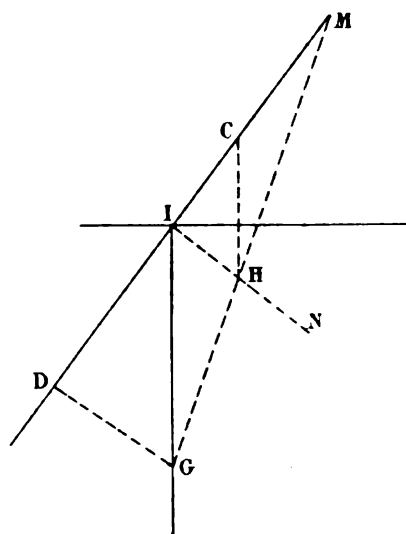


Fig. 37.

Pour effectuer la construction on joint le point M (fig. 37) au point I, on élève en I une perpendiculaire IN sur MI, cette perpendiculaire rencontre la droite MG en un point H. La parallèle à IG menée par H coupe la droite MI au centre de courbure C. En effet les triangles semblables MIG, MCH donnent :

$$\frac{MI}{MC} = \frac{MG}{MH}.$$

D'autre part les triangles semblables MHI et MDG donnent :

$$\frac{MG}{MH} = \frac{MD}{MI}.$$

Des deux égalités précédentes on tire

$$\frac{MI}{MC} = \frac{MD}{MI},$$

d'où :

$$\overline{IM}^2 = MC.MD.$$

Donc le point C déterminé par la construction précédente est bien le centre de courbure cherché.

APPLICATIONS. — 1° *Construction du centre de courbure relatif à un point M d'une ellipse.* — On peut considérer l'ellipse

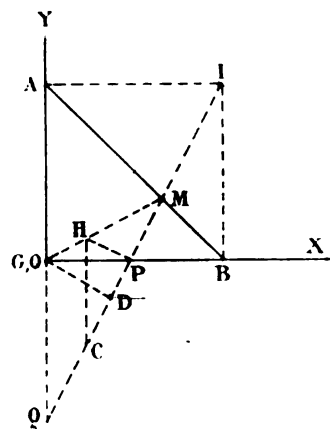


Fig. 38.

comme engendrée par le point M de la droite AB (fig. 38) dont les extrémités glissent sur les deux droites rectangulaires ox et oy. Soient a et b les mesures des segments MA, MB. Aux points A et B des trajectoires oy et ox les rayons de courbure sont infinis, donc ces points appartiennent à la circonférence des inflexions. Comme celle-ci passe par le centre instantané I de rotation elle est déterminée et le point G coïncide avec l'origine O. Soit D le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur IM, et P le point où IM rencontre OB. Elevons en P une perpendiculaire PH sur IM puis menons par H où cette perpendiculaire rencontre OM une parallèle à oy ; cette parallèle coupe IM en un point C qui est le centre de courbure cherché. Pour justifier cette construction il faut démontrer que l'on a :

$$\overline{IM}^2 = MC.MD.$$

Les triangles semblables MHP et MOD donnent :

$$\frac{MG}{MH} = \frac{MD}{MP}.$$

On a d'autre part (triangles MHC et MGQ) :

$$\frac{MG}{MH} = \frac{MQ}{MC}.$$

Donc

$$(1) \quad \frac{MQ}{MC} = \frac{MD}{MP} \text{ d'où } MQ \cdot MP = MC \cdot MD.$$

D'ailleurs les triangles AMI et PMB d'une part, IMB, AMQ d'autre part, donnent :

$$\frac{MP}{MI} = \frac{MB}{MA} = \frac{MI}{MQ}$$

d'où :

$$\overline{IM}^2 = MP \cdot MQ$$

On peut donc écrire en tenant compte de la relation (1) :

$$\overline{IM}^2 = MC \cdot MD$$

REMARQUE. — La construction s'applique à une ellipse tracée (fig. 39) car IM est la normale au point considéré M de cette ellipse dont les axes sont ox et oy.

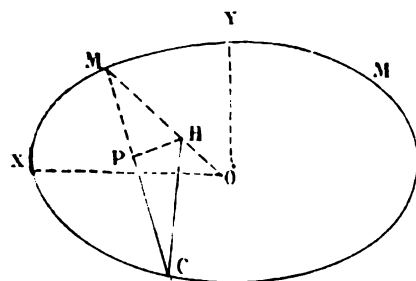


Fig. 39.

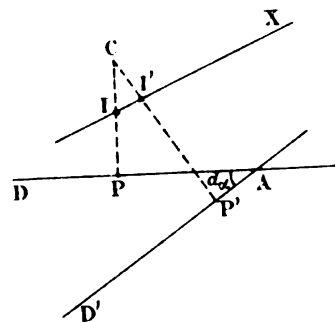


Fig. 40.

2° Construction du centre de courbure en un point de l'enveloppe d'une droite invariablement liée à la figure mobile.

Soient D et D' (fig. 40) les positions de la droite mobile aux instants t et t + dt ; I et I' les centres instantanés correspondants. Les perpendiculaires abaissées des points I et I' sur les droites D et D' rencontrent ces droites aux points P et P' où

elles touchent leur enveloppe. Le point d'intersection C des perpendiculaires détermine le centre de courbure demandé.

Cercle des rebroussements. — Il est facile d'obtenir l'équation du lieu des points C relatifs à l'instant t à toutes les droites du plan mobile. Prenons II' (fig. 40) comme axe des x . Le point C a pour coordonnées polaires :

$$IC = r, \quad \angle IIC = \omega.$$

D'ailleurs les angles ICI' , DAD' sont égaux à la rotation infiniment petite $d\alpha$.

Le triangle ICI' donne :

$$\frac{I'C}{\sin \omega} = \frac{II'}{\sin C},$$

donc

$$I'C = II' \frac{\sin \omega}{\sin C}.$$

$I'C$ a pour limite r , l'angle en C est égal à $d\alpha$ et $II' = ds$, on peut donc écrire :

$$r = \frac{ds}{d\alpha} \sin \omega.$$

Comme le cercle des inflexions a pour équation dans le même système $r = -\frac{ds}{d\alpha} \sin \omega$, on voit que le lieu cherché est une circonférence symétrique de la circonférence des inflexions par rapport à l'axe IX . Ce lieu est appelé *cercle des rebroussements*. Cette dénomination s'explique aisément. Si en effet l'enveloppe d'une droite mobile présente un point de rebroussement, le rayon de courbure étant nul pour ce point, le centre de courbure correspondant coïncidera avec le point de rebroussement lui-même et par suite ce point de rebroussement de l'enveloppe d'une droite mobile appartiendra à la circonférence lieu des centres de courbure à l'instant considéré.

REMARQUE. — Pour la même raison, si une droite mobile passe par un point fixe, ce point appartient au cercle des rebroussements.

Fig. 41.

En effet, si M est un point d'inflexion, le quadrilatère $BIO'MG$ est inscrit dans la circonférence des inflexions (fig. 41). On a par suite :

$$(1) \quad OM.OO' = OB.OI.$$

Désignons par x et y les coordonnées OP et MP du point M, puis par ϱ et ω ses coordonnées polaires, on a

$$OO' = \frac{a}{\cos \omega}, \quad OI = a \frac{\sin \omega}{\cos^2 \omega}, \quad OB = 2OI$$

en sorte que l'équation (1) s'écrit :

$$\zeta^3 \cos^3 \omega = 2a\zeta^2 \sin^2 \omega,$$

ou en coordonnées rectilignes $x^3 = 2ay^2$, équation d'une parabole semi-cubique.

Construction du cercle des inflexions connaissant les centres de courbure correspondants de la base et de la roulette.

Soit B (fig. 42) le centre de courbure de la base et A celui de la roulette. La circonférence des inflexions a son centre sur AB et

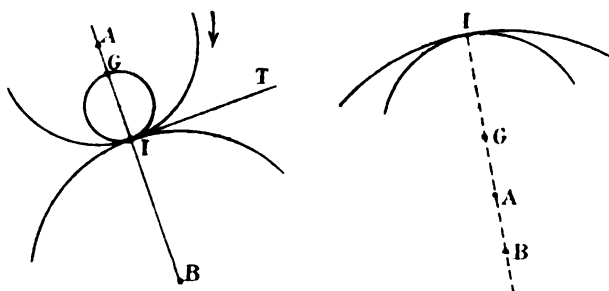


Fig. 42.

passe par le point I; elle serait donc déterminée si l'on connaissait le point G diamétralement opposé au point I. Or la vitesse angulaire instantanée a pour expression avec une convention de signe convenable :

$$\frac{dz}{dt} = - \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) \frac{ds}{dt},$$

d'où

$$- \frac{dz}{ds} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}.$$

Comme $IA = \rho$, $IB = \rho'$ et $IG = - \frac{ds}{dz}$, l'égalité précédente devient :

$$\frac{1}{IG} = \frac{1}{IA} + \frac{1}{IB}.$$

Le problème revient donc à déterminer sur une droite donnée un point G satisfaisant à la condition précédente, les trois points I, A, B étant donnés sur la droite.

1° *La roulette est une droite.* — Dans ce cas (fig. 43), le rayon de courbure de la roulette est infini et la formule générale se réduit à $\frac{1}{IG} = \frac{1}{IB}$; donc $IG = IB$, par suite le point G est symétrique

Tout point M de la roulette décrit une courbe que l'on nomme *développante* de la base, celle-ci se nomme la *développée* de ces

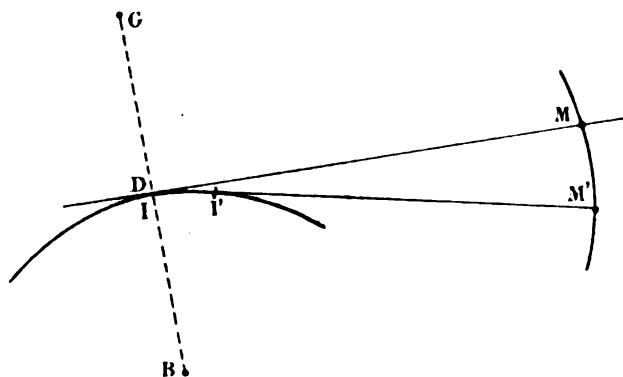


Fig. 43.

Remarquons encore que la développée est le lieu des centres de courbure d'une développante.

En effet, le centre instantané de rotation est à l'intersection de deux normales infiniment voisines de la développante.

Cette propriété résulte encore de la relation déjà établie :

$$\text{IM}^2 = \text{MC.MD.}$$

En effet, comme les points I et D (intersection de la droite MI avec le cercle des inflexions) se confondent, $IM = MD$ et par suite $IM = MC$.

2° *La base est une droite.* — La formule devient alors : $\frac{1}{IG} = \frac{1}{IA}$ puisque IB est infini. Comme IG = IA le point G (fig. 44) coïncide avec le centre de courbure de la roulette.

REMARQUE. — Si la roulette est une circonférence le mouvement est cycloïdal. Comme IA est alors constant il en est de même de IG , par suite le point G décrit une ligne droite paral-

lèle à la base. Le cercle des inflexions a pour diamètre le rayon de la roulette.

3° Le mouvement est défini par le déplacement d'un segment de longueur constante dont les extrémités s'appuient sur deux droites fixes.

Les points A, B, I (fig. 45) appartiennent à la circonférence des inflexions, comme les angles OAI et OBI sont droits, la circon-

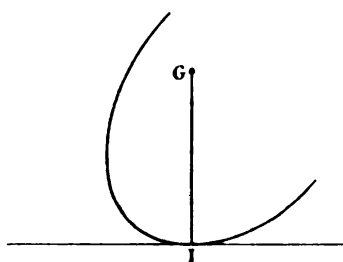


Fig. 44.

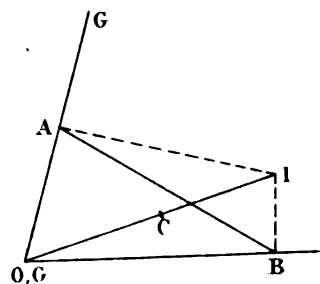


Fig. 45.

férence des inflexions passe par le point O et a pour diamètre OI, le point O étant diamétralement opposé au point I, coïncide avec le point G. Comme la roulette est le cercle de diamètre OI on

voit que la roulette coïncide avec le cercle des inflexions. La ligne droite étant la seule ligne dont tous les points sont des points d'inflexion, les différents points de la roulette décrivent des lignes droites passant par O.

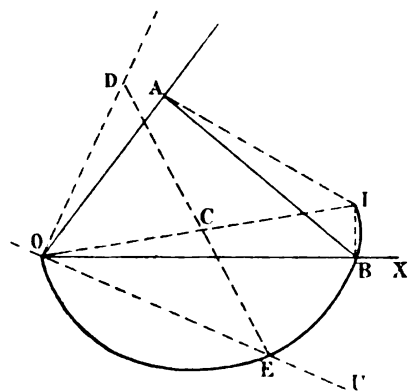


Fig. 46.

On peut raisonner autrement. Soit E (fig. 46) un point de la roulette ; comme celle-ci passe par le point E et que dans le mouvement le point B se déplace sur la droite fixe OX, le point E se

déplacera de façon que l'on ait à chaque instant $\text{arc BE} = C^e$ par suite l'angle BOE sera constant et le point E se déplacera sur la ligne fixe OU.

Deux points diamétralement opposés D et E décrivent deux droites rectangulaires, puisque l'angle inscrit EOD intercepte

une demi-circonférence. Le segment DE a une longueur constante et égale à OI , donc on peut substituer au glissement de AB sur les lignes obliques OX , OY le glissement du segment constant $ED = OI$ sur deux droites rectangulaires OE , OD .

4° *Le mouvement est défini par le déplacement d'un angle constant P dont les côtés passent par deux points fixes A et B .*

On a établi que la base de ce mouvement est la circonférence circonscrite au quadrilatère $PAIB$ (fig. 31), et la roulette le cercle décrit de P comme centre avec PI pour rayon.

THÉORÈME. — *Toute droite de la figure mobile enveloppe une circonférence.* — Soit D (fig. 31) une droite du plan mobile, par le point P menons une parallèle à la droite D et soit C le point où elle rencontre la base du mouvement. Ce point est fixe, car le point B est fixe et l'arc BC est constant, la droite D enveloppe donc une circonférence ayant le point C pour centre et la distance de ce point à la droite comme rayon.

THÉORÈME. — *Un point quelconque du plan mobile décrit un limaçon de Pascal.* — Joignons le point considéré M (fig. 47) au point P . La droite obtenue MP rencontre la base au point fixe C ; d'autre part la distance MP est constante puisque les points M et P sont deux points donnés de la figure mobile. Donc dans le mouvement la droite CM tournera autour du point fixe C , le point P se déplacera sur la base et l'on obtiendra le lieu du point M en prolongeant la corde CP d'une longueur constante PM , par suite le lieu du point M est un limaçon de Pascal.

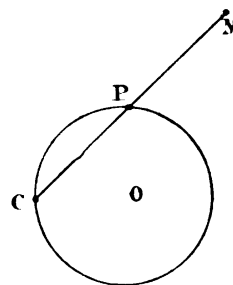


Fig. 47.

Construction du point G. — Remarquons d'abord que dans le mouvement considéré le cercle des rebroussements est la base elle-même. En effet, toutes les droites qui passent par le sommet P de l'angle ont un point fixe situé sur la base; ces points fixes sont donc les enveloppes ou encore les centres de courbure des enveloppes des diverses droites issues de P : la base est donc le cercle des rebroussements. On obtiendra le

point G en prenant le symétrique du sommet P de l'angle par rapport au centre instantané.

REMARQUE. — Ce résultat peut s'obtenir en utilisant la formule générale

$$\frac{1}{IG} = \frac{1}{IA} + \frac{1}{IB}$$

qui donne

$$\frac{1}{IG} = \frac{1}{IO} - \frac{1}{IP} = \frac{2}{IP} - \frac{1}{IP} = \frac{1}{IP},$$

d'où

$$IG = IP$$

le segment IG étant positif, doit être porté à partir du point I dans le sens opposé à IP.

5° La base du mouvement est une courbe quelconque et la roulette une courbe symétrique de la base par rapport à une tangente en un point de la base.

THÉORÈME. — Pendant le mouvement la base et la roulette restent symétriques par rapport à la tangente commune.

Soient HT, IT' (fig 48) deux tangentes à la base B, R et R' les

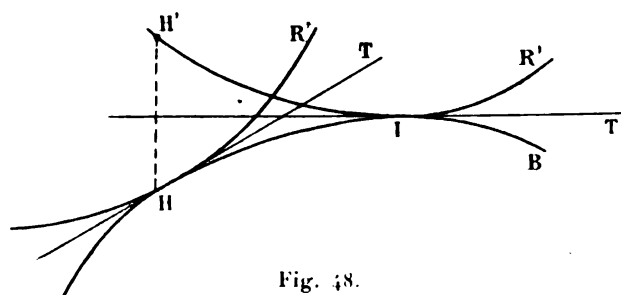


Fig. 48.

symétriques de B par rapport à HT et à IT'; il faut montrer que l'on peut passer de R à R' par un roulement. Cette propriété résulte de l'identité des trois courbes B, R, R' et de l'égalité des deux arcs HI, H'I symétriques par rapport à la tangente IT'.

THÉORÈME. — Les trajectoires des différents points de la figure mobile sont semblables aux podaires de la base.

En effet, soit P (fig. 49) un point fixe et Q son symétrique dans le plan mobile par rapport à la tangente HT. Lorsque la roulette passe de R en R', Q va en Q' symétrique de P par rapport à IT' puisque R et R' sont des courbes symétriques de B par rapport aux tangentes HT et IT'; or le point K décrit la podaire de la base relative au point P, et comme $PQ' = 2PK$, Q' décrit une courbe semblable à cette podaire.

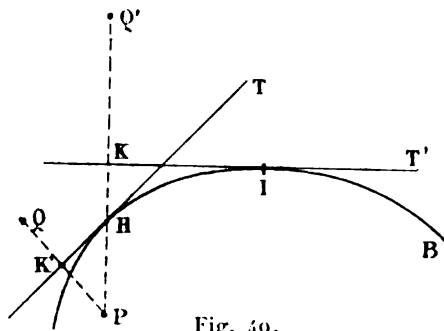


Fig. 49.

Construction du point G. — La formule $\frac{1}{IG} = \frac{1}{IA} + \frac{1}{IB}$ donne dans ce cas $\frac{1}{IG} = \frac{2}{IA}$, d'où $IG = \frac{IA}{2}$, donc le point G est au milieu du rayon de courbure de la roulette.

APPLICATION. — *Lieu du sommet de la parabole roulette* (Exercice page 46).

Le point S' (fig. 33) est symétrique du sommet S de la parabole de base par rapport à la tangente, il décrit donc une parabole semblable à la podaire du point S, c'est-à-dire une cissoïde.

REMARQUE. — Le symétrique O' du pied O (fig. 33) de la directrice de la parabole base décrit une strophoïde puisque la podaire du point O par rapport à la parabole de base est une strophoïde.

Construction du centre de courbure d'une parabole. — On connaît (fig. 50) les deux points I et K du cercle des inflexions; de plus, le point G doit se trouver à l'intersection de l'axe OY et de la perpendiculaire élevée au point I sur IC, car IG étant un diamètre du cercle des inflexions, l'angle IKG est droit. En prolongeant IG d'une longueur $IG' = IG$, on obtient le diamètre de la circonférence des rebroussements; cette circonférence passe par le point fixe II. Comme on a trouvé $IA = 2IG$, on obtiendra le centre de la courbure A de la roulette en prolongeant le segment IG d'une longueur égale à lui-même. De même, on

obtiendra B centre de courbure de la base, en prolongeant le segment IG' d'une longueur égale à lui-même.

De ce qui précède découle la construction suivante : Soit M

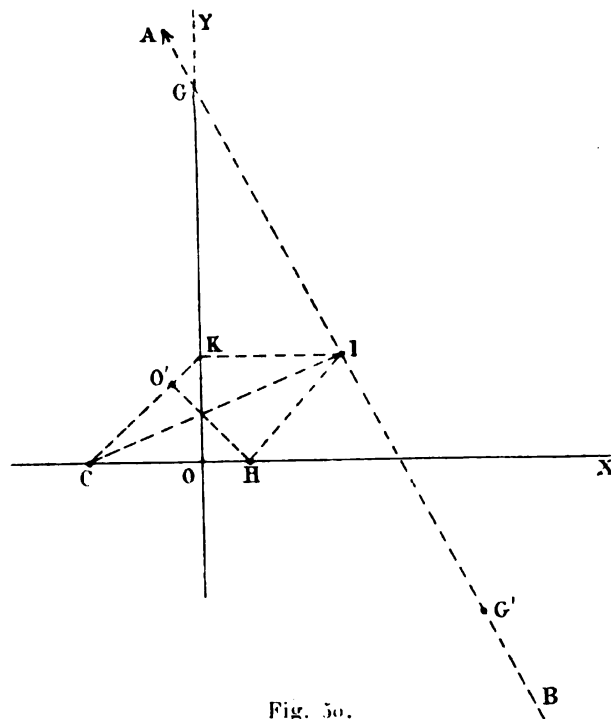


Fig. 50.

(fig. 51) un point d'une parabole définie par sa directrice et son foyer; on tracera la normale en M à la parabole, elle coupe la directrice au point G, et on portera sur la normale vers l'intérieur de la parabole une longueur $MB = 2MG$, B est le centre de courbure cherché.

REMARQUES. — 1° Comme les triangles MKG, MHG' sont égaux, on peut encore diriger la construction comme l'indique la figure 51, c'est-à-dire joindre au foyer le point d'intersection de la tangente en M et de la directrice; cette ligne coupe la normale en M au point G'. On déterminera ensuite le point B en doublant la longueur MG' .

2° Si la base et la roulette sont deux circonférences égales, les différents points de la figure mobile décrivent des limaçons de Pascal. En effet, les deux courbes base et roulette sont symétri-

ques; par suite, les trajectoires des points mobiles sont semblables aux podaires de la base, et par conséquent sont des limaçons de Pascal.

Condition pour que la trajectoire d'un point du plan mobile présente un point de rebroussement. — Il faut qu'en un certain point la vitesse soit nulle sans que l'accélération le soit, car

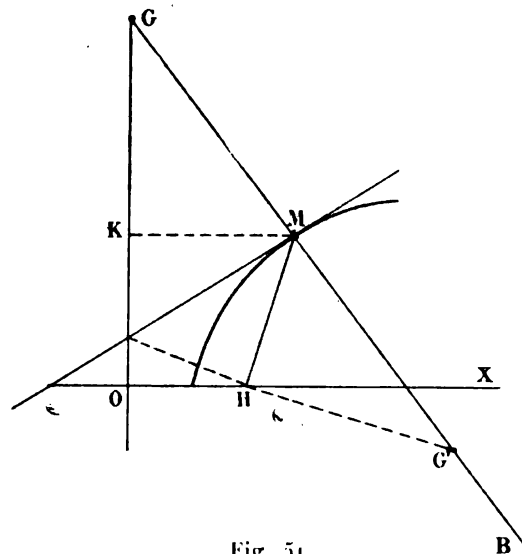


Fig. 51.

alors la projection de la vitesse sur un axe quelconque change de signe et par suite le mobile rebrousse chemin. I étant le centre instantané de rotation à l'instant t , la vitesse du point considéré M a pour mesure

$$IM \frac{dz}{dt}.$$

Or,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{ds} \frac{ds}{dt},$$

donc la vitesse du point M peut s'écrire

$$IM \frac{dz}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

Au point de vue géométrique, on peut toujours supposer que

le centre instantané I décrit la base d'un mouvement uniforme de vitesse V . La vitesse du point M a alors pour mesure $IM \cdot \frac{dz}{ds} \cdot V$.

Pour que M soit un point de rebroussement, il est nécessaire que l'on ait $IM = 0$ ou $\frac{dz}{ds} = 0$.

Dans le premier cas M coïncide avec le centre instantané, ce qui a lieu successivement pour les divers points de la roulette; la tangente de rebroussement est d'ailleurs normale à la base.

Dans le deuxième cas, comme on sait que $\frac{dz}{ds} = -\frac{1}{IG} \cdot \frac{1}{IG}$ doit être nul, ce qui impose la condition $IA = IB$. Ce résultat montre que le centre de courbure de la roulette coïncide avec celui de la base, en d'autres termes la roulette et la base sont alors osculatrices. Pour cette position de la roulette et de la base, les trajectoires de la figure mobile présentent simultanément un point de rebroussement.

Distinction des points de rebroussement de première et de deuxième espèce. — Calculons le rayon de courbure correspondant au point M à l'instant t . On a

$$MC = \frac{\overline{MI}^2}{\overline{MD}} = \frac{\overline{MI}^2}{\overline{ID} - \overline{MI}}.$$

Or

$$\overline{ID} = \overline{IG} \cos \omega,$$

donc :

$$\overline{MC} = \frac{\overline{MI}^2}{\overline{IG} \cos \omega - \overline{MI}}.$$

Lorsque la condition $\frac{dz}{ds} = 0$ est satisfaite, IG est infini; par suite $MC = 0$. On a donc en général des points de rebroussement de première espèce. Cependant, si $\omega = \frac{\pi}{2}$, lorsque IG devient infini le produit $IG \cdot \cos \omega$ est indéterminé; dans ce cas, le point M appartient à la tangente IT et le rayon de courbure est fini, ce qui prouve que le rebroussement est de deuxième espèce.

EXEMPLE. — La roulette étant une droite, elle deviendra oscu-

En général, si la base et la roulette deviennent osculatrices, toutes les trajectoires ont des rebroussements de première espèce, à l'exception des trajectoires des points de la tangente commune à la base et à la roulette qui ont des rebroussements de deuxième espèce.

Dans le mouvement épicycloïdal la base et la roulette sont des circonférences. On appelle épicycloïde la trajectoire d'un point quelconque du plan mobile : selon que le point est à l'intérieur de la roulette, sur la roulette ou à l'extérieur, l'épicycloïde est dite raccourcie, ordinaire ou allongée.

Fig. 52.

$$\begin{aligned}x &= (R + r) \sin \varphi - \rho \sin (\theta + \varphi) \\y &= (R + r) \cos \varphi - \rho \cos (\theta + \varphi)\end{aligned}$$
$$\theta + \varphi = \alpha \varphi,$$

et les coordonnées x et y prennent la forme :

$$x = ar \sin \varphi - \rho \sin \alpha \varphi$$

$$y = ar \cos \varphi - \rho \cos \alpha \varphi.$$

L'épicycloïde, lieu du point M , est raccourcie, ordinaire, ou allongée selon que l'on a

$$\rho < r, \quad \rho = r, \quad \rho > r.$$

Condition pour que l'épicycloïde présente des points de rebroussement. — D'après ce qui précède (p. 63) la trajectoire présentera un point de rebroussement lorsque le point M coïncidera avec le centre instantané. Cette coïncidence n'est possible que pour les points de la roulette, donc les épicycloïdes ordinaires présentent seules des points de rebroussement.

Condition pour que l'épicycloïde présente des points d'inflexion. — Le diamètre IG (fig. 53) du cercle des inflexions (p. 50) est donné par la formule

$$\frac{1}{IG} = \frac{1}{IA} + \frac{1}{IB},$$

donc

$$IG = \frac{Rr}{R+r}.$$

La trajectoire du point M présentera un point d'inflexion lorsque

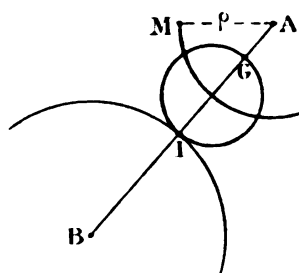


Fig. 53.

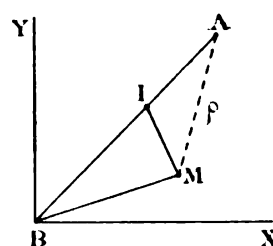


Fig. 54.

M viendra sur la circonférence de rayon IG , ce qui exige que ρ satisfasse aux inégalités suivantes : $AG < \rho < r$.

Comme ρ doit être plus petit que r , les épicycloïdes raccourcies présentent seules des points d'inflexion.

Tangentes à l'épicycloïde menées par le centre B de la base. — Soit BM (fig. 54) une tangente à la courbe, M le point de contact, comme I est le centre instantané de rotation, IM est une normale et par conséquent le point M est sur la circonférence de diamètre BI; cette condition exige que l'on ait :

$$r \leq \rho \leq R + r.$$

On ne peut donc pas mener de B des tangentes à l'épicycloïde raccourcie.

De l'analyse précédente il résulte que l'épicycloïde peut présenter les trois formes indiquées par la figure 55.

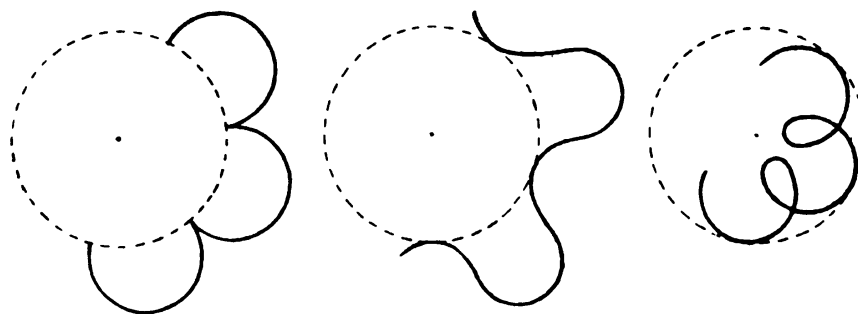


Fig. 55.

REMARQUE. — Si la roulette est tangente intérieurement à la base, les coordonnées x et y de la trajectoire du point M s'expriment encore par les formules (1) et (2) dans lesquelles la mesure r du rayon de la roulette est affectée du signe $-$.

CAS PARTICULIERS. — Pour $\rho = 0$ le point M coïncide avec le centre A de la roulette, sa trajectoire est alors une circonférence de rayon $R + r$.

Si le rayon de la roulette croît indéfiniment, celle-ci devient une droite, et les épicycloïdes ordinaires deviennent des développantes de la circonférence de base.

Si au contraire la base devient une ligne droite le mouvement devient cycloïdal.

Lorsque la base et la roulette sont des circonférences égales, $R = r$, les trajectoires des points mobiles sont des limaçons de Pascal.

Pour $r = -\frac{R}{2}$ la roulette est tangente intérieurement à la base et a pour diamètre le rayon de la base, ses différents points décrivent des diamètres de la base, les autres points du plan mobile décrivent des ellipses.

Pour $r = -2R$, cas du mouvement d'un angle de grandeur constante dont les côtés passent par deux points fixes (p. 44) les trajectoires sont des limaçons de Pascal.

Construction du rayon de courbure en un point de l'épicycloïde.

— Démontrons d'abord le théorème de Savary.

THÉORÈME. — Si, par un point fixe I (fig. 56) pris à l'intérieur d'un angle MIB, on mène une sécante variable, rencontrant les côtés de l'angle en P et en Q on a :

$$\left(\frac{1}{IP} + \frac{1}{IQ}\right) \frac{1}{\sin \sigma} = c^te,$$

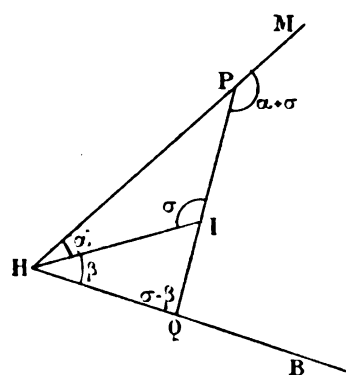


Fig. 56.

σ désignant l'angle variable PIH.

En effet, les triangles HIP et HIQ donnent :

$$(1) \quad \frac{HI}{IP} = \frac{\sin(\alpha + \sigma)}{\sin \alpha} = \sin \sigma \cotg \alpha + \cos \sigma.$$

$$(2) \quad \frac{HI}{IQ} = \frac{\sin(\sigma - \beta)}{\sin \beta} = \sin \sigma \cotg \beta - \cos \sigma.$$

donc

$$\left(\frac{1}{IP} + \frac{1}{IQ}\right) \frac{1}{\sin \sigma} = \frac{1}{HI} (\cotg \alpha + \cotg \beta).$$

Le second membre de cette égalité est une constante car le segment HI et les angles α et β sont des constantes.

Construction du centre de courbure. — Soient A et B (fig. 57), les centres de courbure de la roulette et de la base, I le centre instantané, M un point quelconque du plan mobile et IG le

diamètre de la circonférence des inflexions déterminé par la relation :

$$\frac{1}{IG} = \frac{1}{IA} + \frac{1}{IB}.$$

Traçons la normale IM et élevons en I la perpendiculaire sur IM; elle rencontre MA au point H. Joignons le point H au point B; la ligne obtenue rencontre la normale en un point C qui est le centre de courbure cherché.

Désignons par D la projection du point G sur la normale, et par ω l'angle BGD; le point C sera centre de courbure si l'on montre que la relation (I) $\overline{IM}^2 = MC \cdot MD$ est satisfaite (p. 51). Transformons d'abord la condition (I) de manière à y faire figurer les rayons IA et IB. Pour cela remplaçons MC et MD par leurs valeurs $MI + IC$ et $MI - ID$ puis divisons par le produit IC. IM. ID, on obtient alors :

$$\frac{1}{ID} = \frac{1}{IC} + \frac{1}{IM}.$$

Or le triangle rectangle IDG donne $ID = IG \sin \omega$, donc

$$\frac{1}{ID} = \left(\frac{1}{IA} + \frac{1}{IB} \right) \frac{1}{\sin \omega}$$

ainsi le point C sera centre de courbure si l'on a :

$$\frac{1}{IC} + \frac{1}{IM} = \frac{1}{\sin \omega} \left(\frac{1}{IA} + \frac{1}{IB} \right).$$

En appliquant la remarque de Savary aux transversales MDIC et AIB de l'angle MIB on a

$$(2) \quad \frac{1}{IM} + \frac{1}{IC} = \frac{1}{IH} (\cotg \alpha + \cotg \beta)$$

car l'angle τ étant droit, $\sin \tau = 1$ et

$$(3) \quad \left(\frac{1}{IA} + \frac{1}{IB} \right) \frac{1}{\sin \omega} = \frac{1}{IH} (\cotg \alpha + \cotg \beta).$$

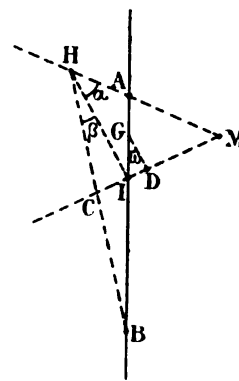


Fig. 57.

Les égalités (2) et (3) donnent :

$$\frac{1}{IC} + \frac{1}{IM} = \frac{1}{\sin \omega} \left(\frac{1}{IA} + \frac{1}{IB} \right),$$

par suite le point C construit comme il a été indiqué est bien un centre de courbure.

Cas de l'épicycloïde ordinaire. — Dans le cas de l'épicycloïde ordinaire le point M (fig. 58) étant sur la roulette le point H se

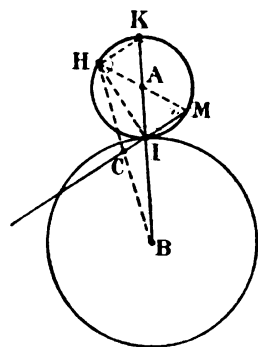


Fig. 58.

trouve à l'extrémité du diamètre qui passe par M; par conséquent il suffira pour obtenir le centre de courbure C de joindre le centre de la base au point de la roulette diamétralement opposé à M, la normale IM coupe cette ligne en C.

PROBLÈME. — Démontrer 1° que le lieu du point C est une épicycloïde ordinaire, 2° que le rapport $\frac{MC}{MI}$ est constant.

Fig. 58. Prolongeons BA jusqu'en K (fig. 58), puis traçons les lignes KH et HI. Comme les angles KHI et HIM sont droits, HM et KI étant deux diamètres de la roulette, les deux droites KH et IC sont parallèles, par suite les triangles HBK et CBI sont semblables et donnent :

$$\frac{BC}{BH} = \frac{BI}{BK} \text{ ou } \frac{R}{R + 2r}.$$

Le point C décrit donc une courbe semblable à la trajectoire du point H, c'est-à-dire une épicycloïde ordinaire.

Les deux triangles HBK et CBI donnent encore :

$$\frac{BI}{BK} = \frac{IC}{HK} \text{ ou } \frac{IC}{IM}.$$

Done,

$$\frac{IC}{IM} = \frac{R}{R + 2r}$$

et par suite

$$\frac{MC}{MI} = \frac{2(R+r)}{R+2r}.$$

CAS PARTICULIERS. — On a

$$\frac{MC}{MI} = \frac{2(R+r)}{R+2r}.$$

Lorsque r tend vers l'infini (développante de cercle) le rapport $\frac{MC}{MI}$ tend vers 1, donc le centre de courbure est au centre instantané de rotation.

Dans le mouvement cycloïdal R est infini et par suite $\frac{MC}{MI} = 2$. On obtiendra donc le centre de courbure en prolongeant MI d'une longueur égale à MI .

Si $r = -\frac{R}{2}$ le point C est rejeté à l'infini car le rapport $\frac{MC}{MI}$ est infini ; l'épicycloïde se réduit à une droite.

Pour la cardioïde $R = r$, donc $\frac{MC}{MI} = \frac{4}{3}$. On prolongera MI d'une longueur égale au tiers de sa valeur pour déterminer le centre de courbure C .

Si $r = -2R$, $\frac{MC}{MI} = \frac{2}{3}$, les trajectoires sont alors des limaçons de Pascal.

Enveloppes de diverses courbes de la figure mobile (Mouvement épicycloïdal).

1° La courbe est un diamètre de la roulette. — Soit AP (fig. 59) le diamètre considéré ; il touche son enveloppe au pied M de la perpendiculaire abaissée de I sur AP . Le point M appartient donc à la circonférence de diamètre AI . En désignant par θ l'angle IAP , on a :

$$\text{arc } IP = r\theta, \quad \text{arc } IM = \frac{r}{2} \times 2\theta = \theta r,$$

d'où $\text{arc } IP = \text{arc } IM = \text{arc } IQ$, donc on peut considérer la trajectoire de M comme engendrée par M dans le roulement de la circonférence

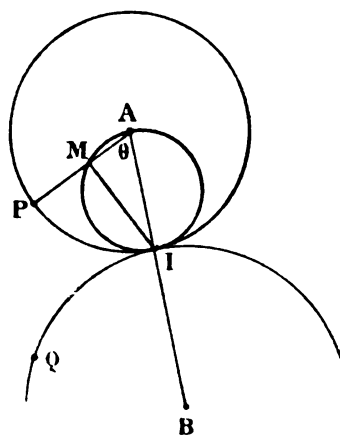


Fig. 59.

de diamètre AI sur la base, par suite la trajectoire du point M c'est-à-dire l'enveloppe du diamètre AP est une épicycloïde.

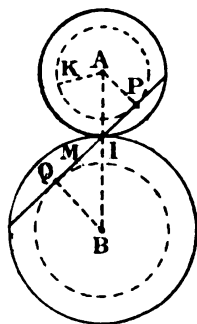


Fig. 60.

2° La courbe est une développante de cercle. — L'enveloppe d'une développante de cercle de centre A est une autre développante de cercle.

En effet, menons une tangente IP (fig. 60) à un cercle de rayon AK concentrique à la roulette et dont on envisage une développante. Comme IP est tangente à la développée, IP est normale en M à la développante mobile, elle sera donc aussi normale à l'enveloppe cherchée. De plus la perpendiculaire BQ abaissée de B sur la ligne PI prolongée est constante : les deux triangles semblables AIP et BIQ donnent en effet :

$$\frac{BQ}{AP} = \frac{BI}{AI}, \text{ d'où } BQ = c^e;$$

donc les normales aux différents points de l'enveloppe d'une développante sont tangentes à une circonférence fixe, par suite cette enveloppe est une développante de cercle.

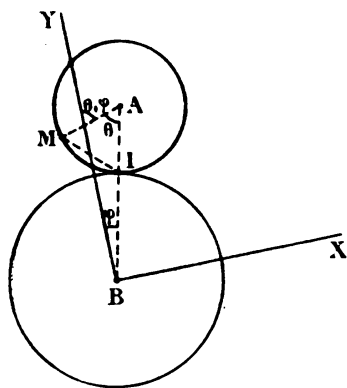


Fig. 61.

Calcul de la longueur d'un arc d'épicycloïde ordinaire. — Désignons par V la vitesse du point M (fig. 61) sur sa trajectoire. L'élément d'arc a alors pour expression $ds = Vdt$; or le point M peut être considéré comme tournant autour du point I avec la vitesse angulaire ω , donc $V = IM \cdot \omega$.

Comme la droite mobile AM fait avec la droite fixe By l'angle $\theta + \varphi$, la vitesse angulaire ω a pour expression

$$\omega = \frac{d(\theta + \varphi)}{dt}.$$

donc

$$ds = IM (d\theta + d\varphi).$$

D'ailleurs

$$IM = 2r \sin \frac{\theta}{2},$$

par suite

$$ds = 2r \sin \frac{\theta}{2} (d\theta + dz).$$

De la condition de roulement $r\theta = R\varphi$, on tire

$$dz = d\theta \frac{r}{R}.$$

d'où enfin

$$ds = 2r \left(1 + \frac{r}{R}\right) \sin \frac{\theta}{2} d\theta.$$

Entre deux points de rebroussement consécutifs θ varie de 2π , l'arc qui sépare les deux points a donc pour longueur

$$s = \int_0^{2\pi} 2r \left(1 + \frac{r}{R}\right) \sin \frac{\theta}{2} d\theta.$$

L'intégrale indéfinie étant

$$-4r \left(1 + \frac{r}{R}\right) \cos \frac{\theta}{2},$$

on a

$$s = 8r \left(1 + \frac{r}{R}\right).$$

CAS PARTICULIERS. — Pour la cycloïde R est infini, donc $s = 8r$. L'arc de cycloïde limité par deux points de rebroussement consécutifs a donc une longueur égale à huit fois le rayon du cercle générateur. L'arc correspondant de la cardioïde est égal à $16r$, car dans ce cas $R = r$.

CHAPITRE III

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE INVARIABLE

On appelle corps solide invariable un corps tel que la distance de deux quelconques de ses points reste constante.

Si M et M_1 (fig. 63) sont deux points du corps solide de coordonnées $x, y, z; x_1, y_1, z_1$, on a par définition :

$$(1) \quad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = c^2.$$

En différenciant cette relation, il vient :

$$(2) \quad \sum (x - x_1) \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right) = 0.$$

$\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dx_1}{dt}$ mesurent les vitesses des projections des points M et M_1 sur l'axe des x .

Les relations telles que (2) étendues à tous les points du système expriment que le mouvement est compatible avec l'invariabilité du corps solide.

COMPOSITION DES MOUVEMENTS

Soient μ et μ' deux mouvements possibles du corps solide. Désignons par X, Y, Z et X', Y', Z' les composantes de la vitesse d'un point M dans les deux mouvements. On dit que le corps solide est animé du mouvement résultant de μ et μ' lorsque les composantes de la vitesse du point M ont pour expression :

$$X'' = X + X'; \quad Y'' = Y + Y'; \quad Z'' = Z + Z'.$$

Pour un second point M_1 on aurait de même :

$$X_1'' = X_1 + X_1'; \quad Y_1'' = Y_1 + Y_1'; \quad Z_1'' = Z_1 + Z_1'.$$

Montrons que le mouvement ainsi défini est compatible avec l'invariabilité du corps solide. Les mouvements μ et μ' étant supposés possibles, on a d'après (2) :

$$\Sigma (x - x_1) (X - X_1) = 0$$

$$\Sigma (x - x_1) (X' - X'_1) = 0.$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, il vient :

$$\Sigma (x - x_1) [(X + X') - (X_1 + X'_1)] = 0$$

ou

$$\Sigma (x - x_1) (X'' - X''_1) = 0.$$

Cette dernière équation étendue aux divers points du système est la condition de possibilité du mouvement résultant.

Mouvement de translation. — Un solide est animé d'un mouvement de translation lorsque les vitesses de tous ses points sont à chaque instant égales et parallèles. Les projections X, Y, Z de la vitesse sont alors indépendantes des coordonnées du point considéré. On peut donc écrire :

$$X = a, \quad Y = b, \quad Z = c.$$

Ce mouvement satisfait aux conditions de possibilité, car les différences $X - X_1, Y - Y_1, Z - Z_1$ sont nulles.

Mouvement de rotation. — Un solide est animé d'un mouvement de rotation lorsque tous les points d'une certaine droite invariablement liée au corps restent fixes. Cette droite est appelée axe de rotation.

Expression des composantes de la vitesse d'un point. — Prenons l'axe de rotation comme axe des z et pour axe des x et des y deux droites rectangulaires menées perpendiculairement à oz au point o (fig. 62).

En désignant par ω et ω' les angles que font les plans déterminés par oz et M, oz et M' avec le plan xoz , on a :

$$x = r \cos \omega; \quad y = r \sin \omega; \quad z = z;$$

et

$$x' = r' \cos \omega'; \quad y' = r' \sin \omega'; \quad z' = z'$$

r et r' mesurent les distances MB et $M'B'$ des points M et M' à l'axe oz .

Comme le tétraèdre $MBB'M'$ doit être invariable, OB est constant, par suite $\frac{dz}{dt} = 0$. De même BM et l'angle dièdre d'arête BB' sont constants, donc

$$\frac{dr}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega'}{dt} = 0.$$

La constante $q = \frac{d\omega}{dt}$ se nomme la vitesse angulaire de rotation du système. Les composantes de la vitesse sont :

$$X = \frac{dx}{dt} = -rq \sin \omega = -qy.$$

$$Y = \frac{dy}{dt} = rq \cos \omega = qx.$$

$$Z = \frac{dz}{dt} = 0.$$

La vitesse d'un point quelconque M est donc perpendiculaire au plan déterminé par ce point et l'axe de rotation, elle a pour mesure $r \cdot \frac{d\omega}{dt}$, r étant la distance du point à l'axe.

THÉORÈME. — Si à un instant donné deux points B et B' de l'axe des z ont une vitesse nulle, la vitesse d'un point quelconque du corps solide est la même que dans un mouvement de rotation autour de oz .

En effet, soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M ; X, Y, Z les composantes de sa vitesse. Les points B et B' ont respectivement pour coordonnées o, o, z_0 ; o, o, z'_0 .

Les conditions d'invariabilité du système sont :

$$xX + yY + (z - z_0) Z = 0$$

$$xX + yY + (z - z'_0) Z = 0.$$

Ces relations sont simultanément satisfaites si l'on a :

$$(1) \quad xX + yY = 0 \quad \text{et} \quad Z = 0.$$

L'équation (1) est vérifiée par les valeurs $X = -qy$ et $Y = +qx$; q étant une constante. Cette constante est la même pour tous les points du corps. Supposons en effet qu'elle ait pour valeur q pour le point M et q' pour le point M' , on aurait d'après les conditions d'invariabilité,

$$-(x - x')(qy - q'y') + (y - y')(qx - q'x') = 0.$$

Cette relation exige que l'on ait $q = q'$. Donc le corps solide peut bien être considéré comme animé d'un mouvement de rotation instantané autour de BB' .

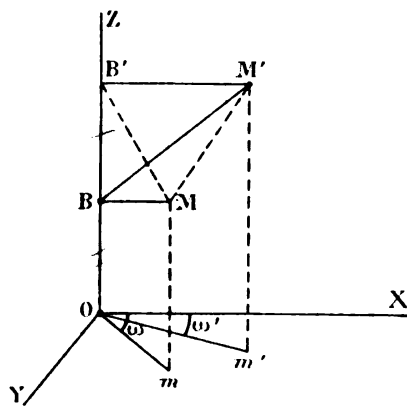


Fig. 62.

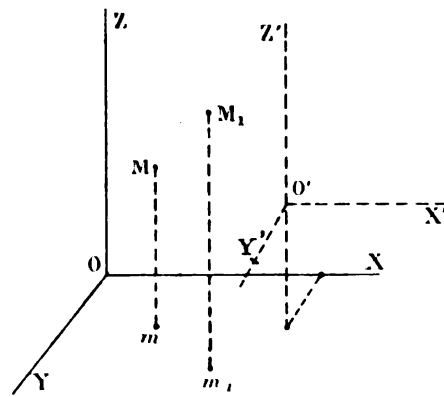


Fig. 63.

Expression des composantes de la vitesse, l'axe oz étant parallèle à l'axe de rotation. — Soient $x = x_0$, $y = y_0$ les équations de l'axe de rotation $o'z'$ (fig. 63). En prenant pour axes $o'z'$, $o'y'$, $o'x'$, on a :

$$\frac{dx'}{dt} = -qy', \quad \frac{dy'}{dt} = qx'.$$

En passant aux axes ox , oy , oz , on a :

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0, \quad z' = z - z_0,$$

par suite

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -q(y - y_0) = X, \\ \frac{dy}{dt} &= +q(x - x_0) = Y \\ \frac{dz}{dt} &= 0 = Z. \end{aligned}$$

Représentation des translations et des rotations par des grandeurs géométriques. — 1° *Translation*. — Dans la translation, tous les points du corps ont des vitesses égales et parallèles, il est donc naturel de représenter un tel mouvement par un segment de droite égal, parallèle et de même sens que cette vitesse commune. Ce segment peut être déplacé parallèlement à lui-même sans cesser de représenter la même translation.

2° *Rotation*. — Soit OD (fig. 64) l'axe de rotation, q la vitesse angulaire. On représente le mouvement par un segment OB de

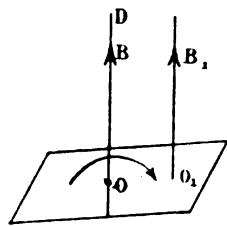


Fig. 64.

l'axe ayant pour mesure q , et on l'affecte d'un sens fixé par la convention suivante : un observateur ayant les pieds en O et la tête du côté de la flèche à marquer doit voir le mouvement du corps s'effectuer dans le sens direct, c'est-à-dire dans le sens de marche des aiguilles d'une montre ou encore de sa gauche vers sa droite. On peut transporter le segment

OB le long de l'axe, mais on ne peut pas le déplacer parallèlement à lui-même et l'amener en O_1B_1 , car O_1B_1 représente une rotation s'effectuant autour de O_1B_1 et non autour de OB .

Composition des translations. — Soient deux mouvements de translation représentés par OT et OT' (fig. 65). Un point M par-

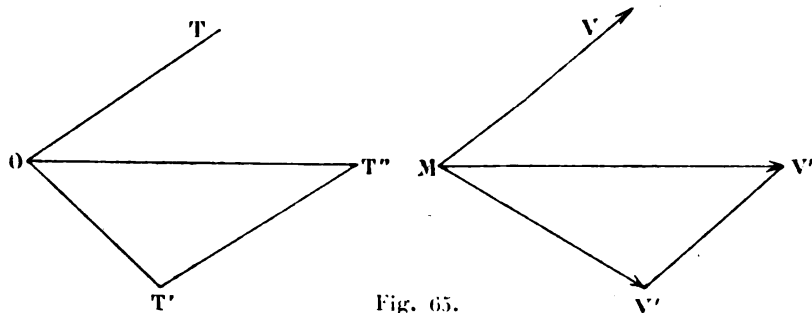


Fig. 65.

ticipant à la translation OT est animé d'une vitesse MV égale et parallèle à OT . La translation OT' lui imprime une vitesse égale et parallèle à OT' , donc le mouvement résultant donnera par définition au point M une vitesse égale à MV'' , somme géométrique des deux vitesses MV et MV' . Le mouvement résultant de

deux translations est donc une translation représentée par la diagonale du parallélogramme construit sur les segments représentatifs OT et OT' des translations composantes.

Composition des rotations. — 1° *Les deux axes sont parallèles.* — Prenons pour axe des z une parallèle à la direction commune des axes de rotation OB et O'B' des rotations composantes (fig. 66). Soient $x = x_0$, $y = y_0$; $x' = x'_0$, $y' = y'_0$, les équations de OB et O'B'. On a d'ailleurs $OB = q$ et $O'B' = q'$. Les composantes des vitesses dues aux rotations OB, O'B' sont respectivement :

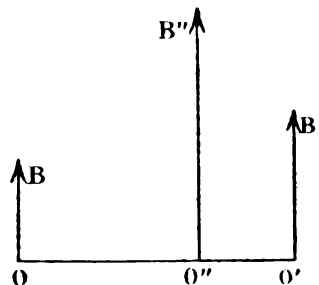


Fig. 66.

$$X = -q(y - y_0); \quad Y = q(x - x_0); \quad Z = 0.$$

$$X' = -q'(y - y'_0); \quad Y' = q'(x - x'_0); \quad Z' = 0.$$

Les composantes de la vitesse dans le mouvement résultant sont donc par définition :

$$X'' = -q(y - y_0) - q'(y - y'_0)$$

$$Y'' = q(x - x_0) + q'(x - x'_0).$$

$$Z'' = 0,$$

En posant

$$x''_0 = \frac{qx_0 + q'x'_0}{q + q'}, \quad y''_0 = \frac{qy_0 + q'y'_0}{q + q'}$$

on peut écrire :

$$X'' = -(q + q')(y - y''_0); \quad Y'' = (q + q')(x - x''_0); \quad Z'' = 0.$$

Ces résultats montrent que le mouvement résultant de deux rotations parallèles de vitesses angulaires q et q' est une rotation parallèle de vitesse angulaire $q + q'$ s'effectuant autour d'un axe ayant pour équations

$$x''_0 = \frac{qx_0 + q'x'_0}{q + q'}; \quad y''_0 = \frac{qy_0 + q'y'_0}{q + q'}.$$

Le point O'' de coordonnées x''_0 , y''_0 divise le segment déterminé

par les points O et O' de coordonnées $x_0, y_0; x'_0, y'_0$ en deux segments tels que $\frac{O''O}{O''O'} = \frac{q'}{q}$; donc pour trouver la rotation résultante en position, grandeur et sens, on opérera comme s'il s'agissait de composer deux forces parallèles représentées par les rotations parallèles données.

CAS PARTICULIER. — Pour $q = -q'$, l'axe des z coïncidant de plus avec OB et OX avec OO' , on a :

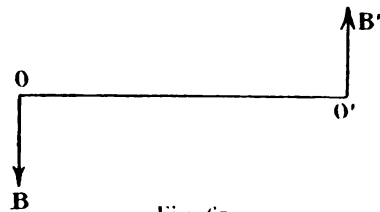


Fig. 67.

$$X'' = 0, \quad Y'' = -qx'_0 \quad \text{et} \quad Z'' = 0.$$

Ces composantes étant constantes, le solide est animé d'un mouvement de translation. Ainsi deux rotations égales et contraires se

composent en une translation perpendiculaire au plan du couple des rotations $OB, O'B'$ (fig. 67) et dont la grandeur est égale au produit de la vitesse angulaire de rotation par la distance des deux axes. Le sens est fixé par le signe de Y'' .

Composition d'une rotation OR et d'une translation OT perpendiculaire à la rotation. — Par OR (fig. 68) menons un plan perpendiculaire à OT et considérons dans ce plan le couple de rotation ($OR', O''R''$); $OR = OR' = O''R''$. Soit de plus $OO'' = \frac{OT}{OR}$

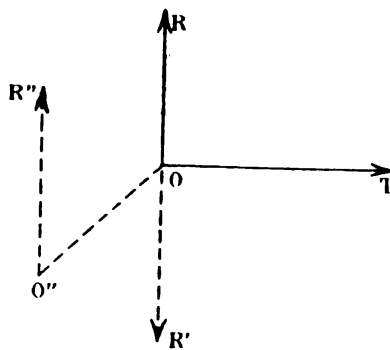


Fig. 68.

En composant les rotations $OR', O''R''$ on obtient d'après le paragraphe précédent une translation dirigée suivant OT perpendiculairement au plan du couple et égale à $OR \times OO''$: c'est donc OT .

En remplaçant OT par le couple de rotation $OR', O''R''$, ce qui est possible, et remarquant que les rotations OR et OR' égales et contraires se détruisent, on voit qu'une

rotation OR et une translation perpendiculaire OT se composent en une rotation unique $O''R''$ qui est la rotation OR déplacée parallèlement à elle-même de OO'' .

Composition de deux rotations concourantes OR, OR'. — Le mouvement résultant de deux rotations s'effectuant autour de deux axes concourants est une rotation représentée par la diagonale OR'' (fig. 69) du parallélogramme construit sur OR et OR'. Pour établir cette propriété, il suffit de montrer que deux points de la diagonale OR'' ont des vitesses nulles et qu'un point quelconque du corps a une vitesse angulaire égale à OR''.

Et d'abord le point O a une vitesse nulle comme appartenant aux deux axes de rotation OR et OR'. Le point R'' a aussi une vitesse nulle : en effet les vitesses du point R'', considéré successivement comme animé des rotations OR et OR', sont perpendiculaires au plan ROR' et opposées ; elles sont de plus égales, car les produits $OR \times R''M$ et $OR' \times R''M'$ qui les expriment fournissent tous deux l'aire du parallélogramme R''ROR'.

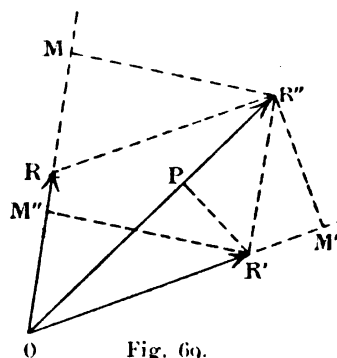


Fig. 69.

Etablissons maintenant qu'un point quelconque du système a une vitesse angulaire égale à OR''. Considérons le point R', la vitesse due à la rotation R' est nulle, la vitesse résultante se réduit donc à OR. R'M'', elle a même mesure que la surface du parallélogramme de côtés OR, OR'. Or, cette surface peut s'exprimer par le produit $OR'' \cdot R'P$, P étant la projection du point R' sur la diagonale, donc OR'' est bien la vitesse angulaire du mouvement résultant.

Les rotations concourantes se composent comme les forces concourantes.

Expression des composantes de la vitesse d'un point, l'axe de rotation passant par l'origine. — Soient $\omega = OR$ (fig. 70) la vitesse angulaire de rotation et α, β, γ les cosinus directeurs de l'axe OR. Les composantes de cette rotation sont :

$$\text{sur Ox, } \omega\alpha = n$$

$$\text{sur Oy, } \omega\beta = p$$

$$\text{sur Oz, } \omega\gamma = q.$$

Ces trois rotations n , p , q , peuvent remplacer la rotation OR .

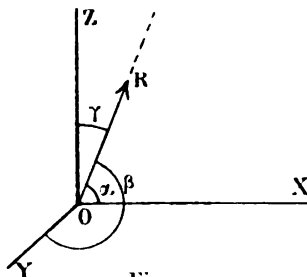


Fig. 70.

Les composantes des vitesses dues à ces diverses rotations sont :

$$\text{pour } q, \quad X = -qy, \quad Y = qx, \quad Z = 0,$$

$$\text{pour } n, \quad X = 0, \quad Y = -nz, \quad Z = ny$$

$$\text{pour } p, \quad X = pz, \quad Y = 0, \quad Z = -px.$$

Les composantes de la rotation résultante OR sont par suite :

$$X = pz - qy; \quad Y = qx - nz; \quad Z = ny - px.$$

REMARQUE. — Tous ces résultats sont à rapprocher de ceux établis en statique dans l'étude de la composition des forces et des moments.

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE

Préliminaires. — Soit O le point fixe (fig. 71), ox , oy , oz , trois axes rectangulaires fixes, et $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ trois axes rectangulaires invariablement liés au solide. Désignons par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ les cosinus directeurs des demi-droites $O\xi, O\eta, O\zeta$, rapportés aux axes fixes. Les coordonnées x, y, z d'un point M par rapport aux axes fixes sont des fonctions du temps. Les formules de transformation de coordonnées dans l'espace permettent d'écrire :

$$x = \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta$$

$$y = \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta$$

$$z = \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta.$$

Le mouvement le plus simple que puisse prendre le corps est un mouvement de rotation autour d'un axe passant par le point fixe qui est ici l'origine O.

En désignant par n , p , q les composantes de la rotation sui-

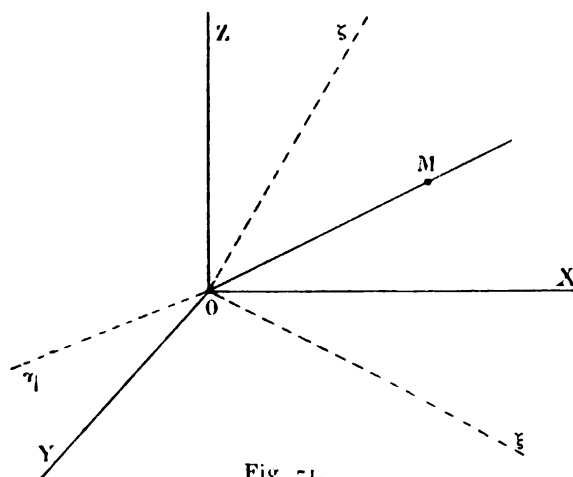


Fig. 71.

vant ox , oy , oz , les composantes de la vitesse du point M ont pour expression :

$$X = pz - qy; \quad Y = qx - nz; \quad Z = ny - px.$$

Dans le cas le plus général un point quelconque M du corps restant à une distance constante du point fixe O, décrit une trajectoire tracée sur une sphère de centre O et de rayon OM. En d'autres termes les trajectoires de tous les points du solide sont des courbes sphériques.

L'étude du mouvement du corps peut être ramenée à l'étude du mouvement d'une courbe sphérique sur une sphère.

Si on coupe en effet le corps par une sphère ayant son centre au point O on obtiendra une section S (fig. 72) qui restera sur la sphère tracée et dont la position détermine celle du corps.

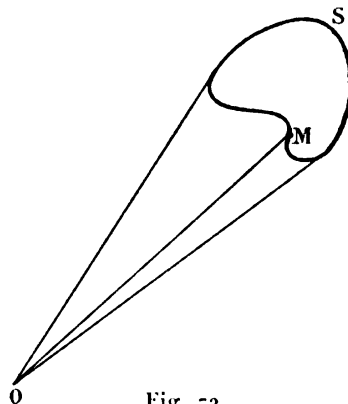


Fig. 72.

THÉORÈME. — A un instant quelconque la vitesse des divers points du solide est la même que si ce corps tournait, à cet instant, autour d'un axe passant par le point fixe auquel on donne le nom d'axe instantané de rotation.

1° Démonstration géométrique. — Soient P et P' (fig. 73) deux positions quelconques de la courbe sphérique S ; on peut toujours passer de P à P' par une rotation convenablement choisie. En effet, soient A, B, C trois points de P qui viennent en A', B', C' , lorsque P vient en P' . En joignant ces points par des arcs de grand cercle on obtient deux triangles sphériques égaux. Par AA' d'une

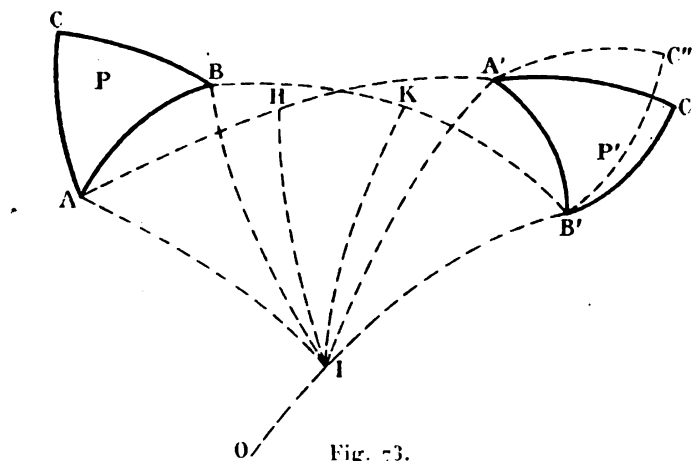


Fig. 73.

part et BB' d'autre part, faisons passer des arcs de grand cercle, puis par les milieux H et K des arcs AA' et BB' menons des arcs de grand cercle respectivement perpendiculaires à AA' et BB' . Soit I leur point d'intersection. Le point I est équidistant des points A et A' d'une part, et des points B et B' d'autre part. Traçons les arcs de grand cercle $AI, A'I, BI, B'I$; on a $\text{arc } IA = \text{arc } IA', \text{ arc } IB = \text{arc } IB'$. Les triangles sphériques $AIB, A'IB'$ sont donc égaux comme ayant leurs trois côtés égaux, par suite, $\text{angle } AIB = \text{angle } A'IB'$. En ajoutant aux angles égaux $AIB, A'IB'$ le même angle $A'IB$ on obtient les angles égaux AIA', BIB' . Joignons le point I au centre O de la sphère et faisons tourner la figure P autour de la droite obtenue OI d'un angle égal à AIA' le point A vient alors en A' et le point B en B' . Le sommet C vient aussi en C' . En effet, supposons qu'il vienne en C'' les deux

triangles sphériques $A'B'C''$, $A'B'C'$ sont égaux, ont un côté commun et les sommets sont rangés dans le même ordre si on contourne les triangles dans un sens donné, donc ils coïncident.

La rotation effectuée autour de OI a donc amené tous les points de la figure sphérique de la position P à la position P' . La position de OI dépend des positions P et P' considérées. Si ces deux positions sont infiniment voisines, OI est l'axe instantané de rotation à l'instant considéré ; le point I se nomme pôle de la rotation.

2° *Démonstration analytique.* — Le théorème sera démontré si on établit qu'à un instant quelconque les composantes de la vitesse d'un point quelconque M peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} X &= pz - qy \\ Y &= qx - nz \\ Z &= ny - px \end{aligned}$$

Des formules de transformation (p. 82) on tire :

$$\begin{aligned} X &= \frac{dx}{dt} = \alpha'_1 \xi + \alpha'_2 \eta + \alpha'_3 \zeta \\ Y &= \frac{dy}{dt} = \beta'_1 \xi + \beta'_2 \eta + \beta'_3 \zeta \\ Z &= \frac{dz}{dt} = \gamma'_1 \xi + \gamma'_2 \eta + \gamma'_3 \zeta. \end{aligned} \quad (1)$$

Comme d'ailleurs la distance OM est constante, on a :

$$x^2 + y^2 + z^2 = C^2,$$

par suite

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} = 0.$$

Cette égalité peut encore s'écrire :

$$(2) \quad xX + yY + zZ = 0.$$

Supposons les axes mobiles choisis de telle sorte qu'ils coïncident avec les axes fixes à l'instant considéré, on aura alors :

$$x = \xi; \quad y = \eta; \quad z = \zeta; \quad \alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1.$$

D'ailleurs la relation (2) donne

$$(3) \quad X\xi + Y\eta + Z\zeta = 0.$$

Considérons le point $\xi = 1, \eta = 0, \zeta = 0$. L'égalité (3) devient $X = 0$; mais d'après (1), $X = \alpha'_1\xi + \alpha'_2\eta + \alpha'_3\zeta$, donc $\alpha'_1 = 0$. On établirait de même que $\beta'_2 = 0$ et $\gamma'_3 = 0$. Considérons maintenant le point $\xi = 1, \eta = 1, \zeta = 0$. Dans ce cas l'identité (3) devient :

$$X + Y = 0.$$

Or, on a en tenant compte de ce que $\alpha'_1 = \beta'_2 = \gamma'_3 = 0$, $X = \alpha'_2$, $Y = \beta'_1$, donc

$$\alpha'_2 = -\beta'_1 = q.$$

Pour $\xi = 1, \eta = 0, \zeta = 1$ on a : $X + Z = 0$, d'où :

$$\alpha'_3 = -\gamma'_1 = p.$$

Enfin pour $\xi = 0, \eta = 1, \zeta = 1$ on a $Y + Z = 0$, par suite

$$\gamma'_2 = -\beta'_3 = n.$$

En portant les valeurs trouvées pour $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3; \beta'_1, \beta'_2, \beta'_3; \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$ dans les relations (1) il vient :

$$X = p\xi - q\eta; \quad Y = q\xi - n\zeta; \quad Z = n\eta - p\xi.$$

Comme les valeurs de ζ, η, ξ sont les mêmes que celles de x, y, z à l'instant considéré puisque les axes mobiles coïncident avec les axes fixes, on a :

$$X = pz - qy; \quad Y = px - nz; \quad Z = ny - px$$

Donc la vitesse du point M à l'instant considéré est identique à celle que prendrait ce point si le corps tournait autour d'un axe passant par O et tel que le segment représentatif de la rotation porté sur cet axe ait pour projection n, p, q , sur les axes fixes.

Définitions. Roulement et glissement. — Considérons deux courbes sphériques : l'une B (fig. 74) fixe, l'autre R mobile sur la sphère, invariable et constamment tangente à B. Soient A un

point fixe sur B, C un point fixe sur R et s, s' les mesures des arcs AI et CI, I étant le point de contact des deux courbes.

On dit que R roule sur B si l'on a $\frac{ds}{dt} = \frac{ds'}{dt}$; dans le cas contraire il y a glissement de R sur B.

En joignant le centre O de la sphère aux divers points des courbes B et R on obtient deux cônes; on dit que le cône R roule sur le cône B lorsque la courbe R roule sur la courbe B.

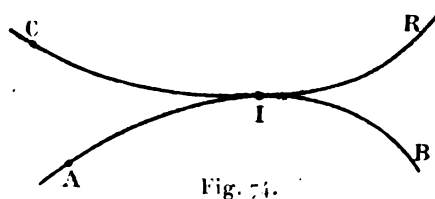


Fig. 74.

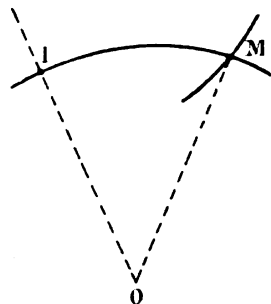


Fig. 75.

Construction de la tangente à la trajectoire d'un point donné. — Considérons le point M (fig. 75) il se déplace sur une sphère de centre O. Si I est le pôle de rotation instantané, OI est l'axe instantané de rotation. La vitesse du point M qui est tangente à la trajectoire est perpendiculaire au plan MOI. L'intersection

de la sphère par ce plan est un grand cercle normal à la trajectoire de M.

RÉDUCTION A UN ROULEMENT DU MOUVEMENT D'UN SOLIDE AYANT UN POINT FIXE

THÉORÈME I. — Quelle que soit la loi du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, on peut toujours le ramener au mouvement d'une courbe sphérique invariablement liée au solide sur une courbe sphérique fixe.

Rappelons d'abord que le lieu des points de la sphère qui deviennent tour à tour des pôles instantanés se nomment base.

Le lieu des points de la figure mobile qui deviennent successivement des pôles instantanés se nomme roulette.

La proposition I sera démontrée si l'on établit le théorème suivant :

THÉORÈME. — La roulette est constamment tangente à la base et roule sur la base pendant que la figure mobile se déplace.

1° *Les deux courbes sont tangentes.* — En effet, soient B (fig. 76)

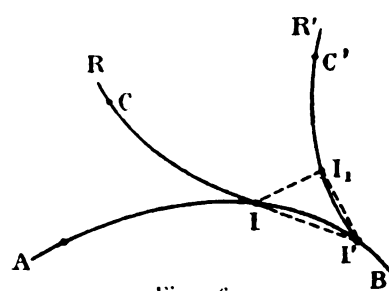


Fig. 76.

la base, R la roulette, I leur point de rencontre qui est le pôle de rotation au temps t . Au temps $t + dt$ la roulette est en R' , le point I de la roulette est venu en I_1 et I' est le nouveau pôle de rotation. En désignant par A et C deux points donnés de la base et de la roulette, et par C' la position

du point C à l'instant $t + dt$, on a

$$\begin{aligned} AI &= s; \quad CI = s'; \quad AI' = s + ds; \quad C'I' = s' + ds'; \\ CI_1 &= CI = s'. \end{aligned}$$

Considérons le triangle sphérique II_1I' . L'arc II_1 est le déplacement du pôle instantané pendant le temps infiniment petit dt , or la vitesse du point I est nulle, donc pendant un temps infiniment petit du premier ordre son déplacement est du second ordre. On a d'ailleurs

$$(1) \quad \sin I = \frac{\sin II_1}{\sin II'} \sin I_1.$$

$\sin II_1$ est un infiniment petit du second ordre, $\sin II'$ est du premier et $\sin I_1$ est au plus égal à 1, donc le second membre de l'égalité (1) est infiniment petit, il en est par suite de même de $\sin I'$ et de I' ; l'angle I' étant infiniment petit la roulette est tangente à la base.

2° *La courbe R roule sur la courbe B.* — Il suffit pour l'établir de démontrer que $\frac{ds}{dt} = \frac{ds'}{dt}$ ou bien que $ds = ds'$.

Or dans le triangle II_1I' on a (Lemme page 37) :

$$II_1 \cong II' - I_1I' \cong II_1.$$

En négligeant II_1 qui est un infiniment petit du second ordre on a

$$0 \cong II' - I_1I' \cong 0.$$

La différence $II' - I_1I'$ devant être à la fois inférieure ou égale à 0 et supérieure ou égale à 0 est nécessairement nulle, on a donc

$$II' = I_1I', \text{ c'est-à-dire } ds = ds'.$$

REMARQUE. — En joignant le point O à la base et à la roulette on obtient deux cônes. Le cône OR roule sur le cône OB pendant le déplacement du corps solide.

Accélération angulaire instantanée. — On appelle accélération angulaire instantanée une grandeur géométrique OJ passant par le point O et dont les projections sur les axes sont $\frac{dn}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$; n, p et q étant les composantes de la rotation R suivant les axes fixes ox, oy, oz.

Expression des projections de l'accélération d'un point sur les axes fixes dans le mouvement général autour de O. — Les projections de la vitesse d'un point sur les axes fixes x, y, z sont :

$$\frac{dx}{dt} = pz - qy; \quad \frac{dy}{dt} = qx - nz; \quad \frac{dz}{dt} = ny - px.$$

Les projections de l'accélération du point M sont donc :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dp}{dt} z - \frac{dq}{dt} y + p \frac{dz}{dt} - q \frac{dy}{dt}.$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dq}{dt} x - \frac{dn}{dt} z + q \frac{dx}{dt} - n \frac{dz}{dt}.$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dn}{dt} y - \frac{dp}{dt} x + n \frac{dy}{dt} - p \frac{dx}{dt}.$$

Ces équations montrent que l'accélération d'un point M dans le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe est la somme géométrique de deux autres accélérations ; la première ayant pour projections sur les axes :

$$(1) \frac{dp}{dt} z - \frac{dq}{dt} y; \quad \frac{dq}{dt} x - \frac{dn}{dt} z; \quad \frac{dn}{dt} y - \frac{dp}{dt} x,$$

se nomme accélération due à l'accélération angulaire ; la seconde ayant pour projections sur les axes :

$$p \frac{dz}{dt} - q \frac{dy}{dt}; \quad q \frac{dx}{dt} - n \frac{dz}{dt}; \quad n \frac{dy}{dt} - p \frac{dx}{dt}$$

se nomme accélération centripète.

REMARQUE. — Les projections de l'accélération dues à l'accélération angulaire se déduisent des projections de la vitesse en y remplaçant n , p , q par leurs dérivées.

Direction et intensité de l'accélération due à l'accélération angulaire. — En prenant l'axe oz suivant l'accélération angulaire on a

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dn}{dt} = 0$$

et $\frac{dq}{dt}$ mesure l'accélération angulaire elle-même. Considérons un point M (fig. 77) dans le plan des xz , pour un tel point $y=0$

et les projections de l'accélération (1) sont respectivement :

$$0 \quad x \frac{dq}{dt} \quad 0.$$

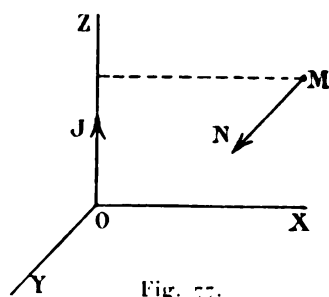


Fig. 77.

L'accélération considérée est donc parallèle à oy , c'est-à-dire perpendiculaire au plan déterminé par le point M et par l'accélération angulaire OJ . Elle

a d'ailleurs pour intensité $x \frac{dq}{dt}$ produit de l'accélération angulaire par la distance du point M à celle-ci.

Direction et intensité de l'accélération centripète. — Supposons qu'à l'instant considéré l'axe instantané coïncide avec l'axe des z , (fig. 78) on a alors $n = p = 0$ et q est la vitesse de rotation elle-même. Faisons passer le plan des xz par le point M , les coordonnées du point M sont x , 0 , z et les projections de sa vitesse ont pour expression :

$$\frac{dx}{dt} = 0; \quad \frac{dy}{dt} = qx; \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Dans ces conditions les projections de l'accélération centripète sont sur ox , $-q \frac{dy}{dt}$ ou $-q^2x$, sur oy — 0, sur oz — 0.

Cela montre que l'accélération centripète est parallèle à ox , c'est-à-dire dirigée suivant la perpendiculaire MQ abaissée du point M sur l'axe instantané de rotation; elle a pour intensité q^2x , c'est-à-dire le produit de la vitesse instantanée de rotation par la distance du point considéré à l'axe instantané. Le signe — indique que l'accélération centripète est dirigée vers l'axe instantané.

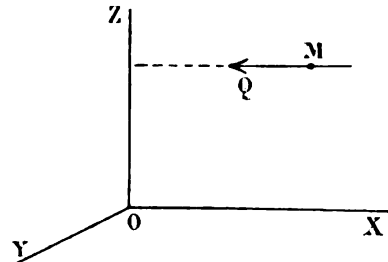


Fig. 78.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant dû à Rivals :

THÉORÈME. — L'accélération d'un point M (fig. 79) appartenant à un corps solide mobile autour d'un point fixe O est la somme

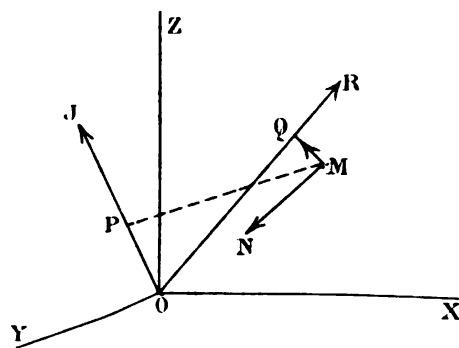


Fig. 79.

géométrique de deux accélérations : la première due à l'accélération angulaire est égale à l'accélération angulaire OJ multipliée par la distance MP du point M à la droite OJ , elle est dirigée suivant la droite MN perpendiculaire au plan MOJ ; la seconde est l'accélération centripète : elle est égale au

produit du carré de la rotation instantanée OR par la distance MQ du point M à l'axe instantané, elle est dirigée suivant MQ de M vers Q .

REMARQUE. — Le théorème de Rivals permet de construire le plan osculateur à la trajectoire du point M et le rayon de courbure sphérique.

MOUVEMENT ÉPICYCLOÏDAL SPHÉRIQUE

CAS PARTICULIERS. — 1° Lorsque la base et la roulette sont deux petits cercles d'une sphère, les cônes OR et OB sont de révolution, et les points de la figure sphérique mobile décrivent des trajectoires appelées épicycloïdes sphériques.

2° Si la roulette devient un grand cercle le cône OR se réduit à un plan, les courbes décrites par les divers points de la figure mobile prennent alors le nom de développantes sphériques.

Expression des composantes de la rotation instantanée dans le mouvement épicycloïdal sphérique. — Prenons pour axe des z l'axe du cône fixe (fig. 80), soit θ son demi-angle au sommet, OII est

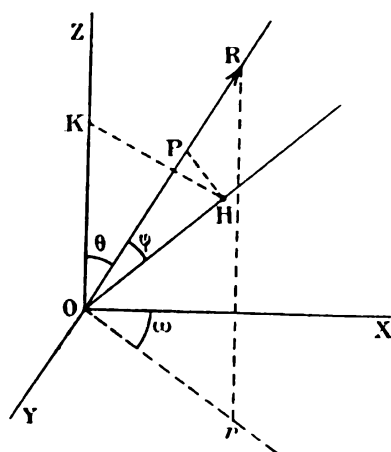


Fig. 80.

l'axe du cône roulant et φ son demi-angle au sommet. L'axe instantané de rotation étant la génératrice commune OR aux deux cônes, est situé dans le plan ZOII et fait les angles θ et φ avec OZ et avec OII. En désignant par ω l'angle formé par les plans ZOR, ZOX, les cosinus directeurs de OR ont pour expression :

$$\sin \theta \cos \omega, \quad \sin \theta \sin \omega, \quad \cos \theta.$$

Si R est la longueur qui représente la rotation, les composantes

de celle-ci suivant les axes sont :

$$(1) \quad n = R \sin \theta \cos \omega; \quad p = R \sin \theta \sin \omega; \quad q = R \cos \theta.$$

Pour déterminer R considérons un point II de l'axe du cône mobile tel que $OII = 1$.

Le point II a pour coordonnées :

$$x = \sin (\theta + \varphi) \cos \omega; \quad y = \sin (\theta + \varphi) \sin \omega; \quad z = \cos (\theta + \varphi).$$

II décrit un cercle ayant pour rayon sa distance HK à l'axe

des z ; or $HK = OH \sin(\theta + \varphi)$, donc la vitesse du point H a pour mesure $\sin(\theta + \varphi) \frac{d\omega}{dt}$.

Comme d'autre part le point H tourne autour de OR avec la vitesse angulaire R , sa vitesse a aussi pour mesure $R \cdot \overline{HP}$, $\overline{HP}$ étant la distance du point H à l'axe instantané OR ; mais $\overline{HP} = OH \sin \varphi$, donc la vitesse du point H a pour mesure $R \sin \varphi$.

En égalant les deux expressions de la vitesse du point H on a

$$R = \frac{d\omega}{dt} \frac{\sin(\theta + \varphi)}{\sin \varphi}.$$

En portant cette valeur de R dans les égalités (1) on obtient les valeurs cherchées des composantes n , p et q de la rotation instantanée.

Lorsque $\frac{d\omega}{dt} = C^e$ la vitesse angulaire de rotation R est aussi constante.

Expression de l'accélération angulaire dans le mouvement épicycloïdal. — Supposons que $\frac{d\omega}{dt}$ soit constant, il en est de même de R , et l'on tire des formules (1)

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= -R \sin \theta \sin \omega \frac{d\omega}{dt} \\ \frac{dp}{dt} &= R \sin \theta \cos \omega \frac{d\omega}{dt} \\ \frac{dq}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{d\omega}{dt} = R \frac{\sin \varphi}{\sin(\theta + \varphi)}$$

on peut écrire,

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= -\sin \omega R^2 \frac{\sin \varphi \sin \theta}{\sin(\theta + \varphi)} \\ \frac{dp}{dt} &= \cos \omega R^2 \frac{\sin \varphi \sin \theta}{\sin(\theta + \varphi)} \\ \frac{dq}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

La projection de OJ sur l'axe des z étant nulle, OJ est parallèle au plan des xy .

Comme les projections de OJ sur ox et oy sont proportionnelles à $-\sin \omega$ et à $\cos \omega$ l'accélération angulaire OJ est perpendiculaire au plan ZOII; elle a d'ailleurs pour intensité

$$R^2 \frac{\sin \varphi \sin \theta}{\sin (\theta + \varphi)}.$$

POSITION, APRÈS PLUSIEURS ROTATIONS SUCCESSIVES,
D'UN SOLIDE AYANT UN POINT FIXE

Considérons un corps solide ayant un point fixe O. Soit R une première rotation d'angle fini qui fait passer le corps de la position P dans la position P' et R₁ une seconde rotation qui fait passer le corps de P' en P''.

Si on fait successivement les deux rotations le corps passera de P' en P''.

D'après le théorème d'Euler on peut passer directement de P en P'' par une seule rotation R₂.

Etant données les rotations R et R₁ proposons-nous de trouver la rotation résultante R₂.

Remarquons d'abord que l'ordre dans lequel on prend les composantes R et R₁ n'est pas indifférent, il le serait pour des rotations infiniment petites.

Une rotation finie est entièrement déterminée par la direction de son axe et par l'angle de rotation.

Soient a, b, c , les cosinus directeurs du semi axe qui représente la rotation et 2θ l'angle de rotation.

Posons :

$$\lambda = \cos \theta; \mu = a \sin \theta; \nu = b \sin \theta; \rho = c \sin \theta$$

Nous avons ainsi quatre paramètres qui définissent la rotation, car connaissant λ, μ, ν, ρ on peut calculer a, b, c et θ ; la somme des carrés des quatre paramètres est égale à 1 :

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 1$$

Une rotation nulle $\theta = 0$ a pour paramètres :

$$\lambda = 1 \quad \mu = 0 \quad \nu = 0 \quad \rho = 0$$

Lorsque deux rotations sont égales et de sens contraires, il suffit pour passer de l'une à l'autre de changer θ en $-\theta$: λ ne change pas, les autres paramètres changent de signe.

Quand la rotation est de 180° , on a $2\theta = \pi$, d'où $\theta = \frac{\pi}{2}$ les paramètres sont : a, b, c .

Si on change les signes des quatre paramètres on ne change pas la rotation, car si on fait tourner le corps de 2θ ou de $2\pi + 2\theta$ la rotation au point de vue géométrique ne change pas.

Problème. — Etant donnés les paramètres :

λ, μ, ν, ρ de la rotation R .

$\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \rho_1$ de la rotation R_1 .

calculer les paramètres $\lambda_2, \mu_2, \nu_2, \rho_2$ de la rotation R_2 .

Composons d'abord deux rotations de 180° autour de OA et OA' (fig. 81).

Par le point O menons OC perpendiculaire à OA et OA' . Démontrons que OC est l'axe de rotation résultant.

Pour cela il suffit de faire voir qu'un point quelconque de cet axe est immobile dans la rotation résultante.

De M (fig. 82) abaissons une perpendiculaire OM sur A ; elle est aussi perpendiculaire sur OA' puisque M est sur la droite OC . La première rotation autour de OA amène M en M' symétrique de M par rapport au point O . La seconde rotation ramène le point M' en M . Donc dans la rotation résultante M n'a pas bougé.

Donc OC est l'axe de la rotation résultante.

Reste à trouver l'angle de rotation.

Soit P un point du plan AOA' . La première rotation de 180° autour de OA amène P en P' symétrique de P par rapport à OA ; la seconde rotation de 180° autour de OA' amène P' en P'' symé-

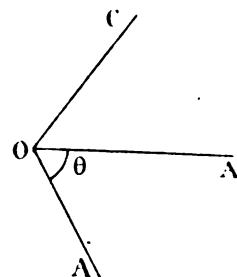


Fig. 81.

trique de P' par rapport à OA' . L'angle de rotation autour de OC est égal à POP'' ou $2 \angle AOA'$.

Donc la rotation résultante de deux rotations de 180° a son axe perpendiculaire aux axes des rotations composantes et son angle de rotation est égal à deux fois l'angle des deux axes.

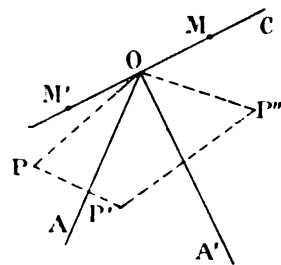


Fig. 82.

De là résulte qu'une rotation quelconque peut se décomposer en deux rotations de 180° .

Si par exemple l'axe de rotation est OC et l'angle de rotation 2θ en menant par un point quelconque O de OC deux droites OA et OA' perpendiculaires à OC et faisant entre elles l'angle θ , On obtient les axes de rotation de 180° .

Cette décomposition peut se faire d'une infinité de manières.

Deux rotations de 180° autour du même axe se détruisent, c'est-à-dire qu'elles ramènent le corps à sa position primitive.

Calcul des paramètres λ, μ, ν, ρ .

Soient :

α, β, γ les cosinus directeurs de OA .

α', β', γ' les cosinus directeurs de OA' .

On a :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$$

1° OA et OA' sont des rotations de 180° . Soient λ, μ, ν, ρ les paramètres de la rotation résultante ; θ l'angle des deux axes de rotation OA, OA' . θ mesurant la demi-rotation, on a :

$$\lambda = \cos \theta$$

et par suite

$$\lambda = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'.$$

on a aussi

$$\mu = \alpha \sin \theta.$$

Supposons qu'on prenne sur OA et sur OA' deux longueurs OA et OA' telles que $OA = OA' = 1$.

La surface du triangle AOA' a pour mesure $\frac{1}{2} \sin \theta$, par suite

$$\mu = 2a. AOA'.$$

a est le premier cosinus directeur de OC ; c'est aussi le cosinus de l'angle du plan des yz avec le plan AOA' . Projetons le triangle AOA' sur le plan des yz , il se projette en BOB'

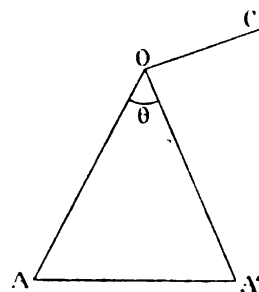


Fig. 83.

Les coordonnées de A sont $\alpha \beta \gamma$.

$$\begin{array}{rcl} \text{---} & B & \text{---} \quad o \beta \gamma. \\ \text{---} & A' & \text{---} \quad \alpha' \beta' \gamma'. \\ \text{---} & B' & \text{---} \quad o \beta' \gamma'. \end{array}$$

L'aire du triangle BOB' est égale à $AOA' \cdot a$ ou

$$BOB' = AOA' \cdot a = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} o & \beta & \gamma \\ o & \beta' & \gamma' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (\beta\gamma' - \gamma\beta').$$

Donc :

$$\mu = \beta\gamma' - \gamma\beta'.$$

On écrira les valeurs de ν et de ρ par symétrie. On trouve ainsi les quatre équations :

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' \\ \mu = \beta\gamma' - \gamma\beta' \\ \nu = \gamma\alpha' - \alpha\gamma' \\ \rho = \alpha\beta' - \beta\alpha' \end{cases}$$

Résolvons ces équations par rapport à α, β, γ ; pour cela multiplions la première par α' , la seconde par o , la troisième par γ' , la quatrième par β' et ajoutons, nous avons :

$$(2) \quad \text{Par symétrie} \quad \begin{cases} \alpha = \lambda\alpha' - \gamma\gamma' + \rho\beta' \\ \beta = \lambda\beta' - \rho\alpha' + \mu\gamma' \\ \gamma = \lambda\gamma' - \mu\beta' + \nu\alpha' \end{cases}$$

A l'aide des équations (1) formons encore la quantité

$$(3) \quad \delta = \mu\alpha' + \nu\beta' + \rho\gamma'$$

on trouve :

$$\delta = 0$$

Problème général. — Soient $R (\lambda, \mu, \nu, \rho)$ et $R_1 (\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \rho_1)$ les rotations données.

Décomposons R en deux rotations S et S' de 180° , et R_1 en deux rotations également de 180° S'_1 et S'' .

On peut choisir arbitrairement l'une des deux rotations pourvu que l'axe de cette rotation soit perpendiculaire à l'axe de la rotation à décomposer.

Choisissons pour S'_1 et S' la même rotation.

L'axe de S' est perpendiculaire au plan des deux axes donnés.

On a ainsi $R =$ résultante de S et S' . Ce que l'on écrit $R = S.S'$.

De même

$$R_1 = S'.S''$$

Alors

$$R_1 = R_1 R = S.S'.S'.S''.$$

Mais lorsqu'on fait deux fois une rotation de 180° autour d'un même axe, ces deux rotations se détruisent, les deux rotations S' se détruisent donc et il reste :

$$R_1 = S.S''.$$

Soient α, β, γ les cosinus directeurs de l'axe de rotation S , α', β', γ' ceux de S' .

Et λ, μ, ν, ρ les paramètres qui définissent R .

On a entre ces quantités les relations (2) et (3) écrites ci-dessus.

Soient $\alpha'', \beta'', \gamma''$ les cosinus directeurs de l'axe de rotation S'' et $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \rho_1$ les paramètres qui définissent R_1 .

On a de même les relations :

$$(2) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' \\ \mu_1 &= \beta'\gamma'' - \gamma'\beta'' \\ \nu_1 &= \gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'' \\ \rho_1 &= \alpha'\beta'' - \alpha''\beta' \end{aligned}$$

De ces équations on tire comme précédemment :

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \lambda_1\alpha' + \nu_1\gamma' - \rho_1\beta'; & \beta'' &= \lambda_1\beta' + \rho_1\alpha' - \mu_1\gamma'; \\ \gamma'' &= \lambda_1\gamma' + \mu_1\beta' - \gamma_1\alpha'; & \text{et } \delta'' &= \mu_1\alpha' + \nu_1\beta' - \rho_1\gamma' = 0 \end{aligned}$$

Il s'agit de calculer les quatre paramètres $\lambda_2, \mu_2, \nu_2, \rho_2$ qui définissent la rotation résultante R_2 .

On a :

$$\lambda_2 = \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \delta\delta''.$$

le produit $\delta\delta''$ est identiquement nul.

En remplaçant $\delta\delta''$ par sa valeur il vient :

$$\lambda_2 = (\lambda\lambda_1 - \mu\mu_1 - \nu\nu_1 - \rho\rho_1) (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2).$$

les autres termes se détruisent, et comme

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1.$$

Il reste :

$$\lambda_2 = \lambda\lambda_1 - \mu\mu_1 - \nu\nu_1 - \rho\rho_1$$

Nous avons encore :

$$\mu_2 = \beta\gamma'' - \gamma\beta'' = \beta\gamma'' - \gamma\beta'' + \alpha\delta'' + \alpha''\delta$$

car les deux termes $\alpha\delta''$ et $\alpha''\delta$ sont nuls. Nous avons ainsi :

$$\mu_2 = (\lambda\mu_1 + \lambda_1\mu + \rho\nu_1 - \nu\rho_1) (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)$$

Donc

$$\mu_2 = \lambda\mu_1 + \lambda_1\mu + \rho\nu_1 - \nu\rho_1$$

Par permutations ou en déduit $\left\{ \begin{array}{l} \nu_2 = \lambda\nu_1 + \nu\lambda_1 + \mu\rho_1 - \rho\mu_1 \\ \rho_2 = \lambda\rho_1 + \rho\lambda_1 + \nu\mu_1 + \mu\nu_1 \end{array} \right.$

Les paramètres $\lambda_2, \mu_2, \nu_2, \rho_2$ de la rotation finale sont des fonctions linéaires et homogènes des paramètres des rotations initiales.

Si au lieu de deux rotations à composer on en avait trois, on appliquerait deux fois la formule, on verrait que les quatre paramètres qui déterminent R_3 sont des fonctions linéaires et homogènes des paramètres des rotations composantes données.

Problème. — Considérons une droite quelconque D passant par le point O (fig. 84). Appliquons au corps une rotation R , D vient en D' . On se donne les cosinus directeurs ξ, η, ζ de D et les paramètres λ, μ, ν, ρ de R . Il s'agit de trouver les cosinus directeurs ξ', η', ζ' de D' après la rotation.

Considérons la rotation R_1 définie par les paramètres λ, μ, ν, ρ

et la rotation inverse R^{-1} qui a pour paramètres λ, μ, ν, ρ puis la rotation S de 180° autour de D définie par les paramètres α, ξ, τ, ζ et enfin la rotation S' autour de D' définie par les paramètres $\alpha, \xi', \tau', \zeta'$.

S' est la résultante de R^{-1}, S et R .

En effet considérons un point M quelconque. Si nous appliquons la rotation S de 180° autour de D , M viendra en M_1 symétrique de M par rapport à D ; en appliquant ensuite la rotation R , D vient en D' , M en M' et M_1 en M'_1 .

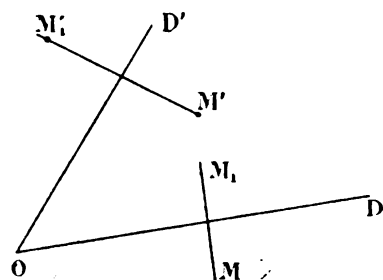


Fig. 84.

La rotation S' seule, de 180° autour de D' , amène M' en M'_1 et M'_1 en M' .

Voyons l'effet des trois autres rotations R^{-1}, S et R opérées successivement.

R^{-1} amène D' en D , M'_1 en M_1 et M'_1 en M .

S fait tourner le corps de 180° autour de D et amène M'_1 en M et M' en M_1 .

R ramène D en D' , M_1 en M'_1 et M' en M'_1 .

L'ensemble de ces trois rotations a donc produit le même effet que la seule rotation S' .

Alors pour avoir les cosinus directeurs ξ', τ', ζ' de D' on appliquera la règle précédente pour composer R^{-1}, S et R .

Les paramètres de S ou cosinus directeurs de D sont ξ, τ, ζ . Donc d'après ce qu'on a vu, ξ', τ', ζ' cosinus directeurs de D' ou paramètres de S' seront des fonctions linéaires et homogènes des cosinus directeurs de D .

Ce sont de plus des fonctions homogènes et du second degré en λ, μ, ν, ρ .

Cas où l'une des rotations à composer est infiniment petite. — Considérons une rotation ayant pour projections n, p, q autour d'un axe ayant pour cosinus directeurs a, b, c . Soit ω la vitesse angulaire de rotation. Nous avons :

$$n = \omega a; \quad p = \omega b; \quad q = \omega c.$$

Pendant le temps dt le corps tourne de ωdt autour de l'axe ayant pour cosinus directeurs a, b, c . Dans les formules qui donnent λ, μ, ν, ρ en fonction de a, b, c faisons $\theta = \omega dt$ et remplaçons $\cos \omega dt$ par 1, $\sin \omega dt$ par ωdt , Nous aurons :

$$\lambda = 1 \quad \mu = n dt \quad \nu = p dt \quad \rho = q dt.$$

Les formules précédentes s'appliquent.

Supposons que le corps ait subi une première rotation λ, μ, ν, ρ finie, et une seconde infiniment petite. On peut remplacer ces deux rotations par une seule ayant pour paramètres $\lambda + d\lambda, \mu + d\mu, \nu + d\nu, \rho + d\rho$, et ces paramètres sont donnés par les formules :

$$\begin{aligned} \lambda + d\lambda &= \lambda - \mu n dt - \nu p dt - \rho q dt \\ \mu + d\mu &= \mu + \lambda n dt + \rho p dt - \nu q dt \\ \nu + d\nu &= \nu + \lambda p dt + \mu q dt - \rho n dt \\ \rho + d\rho &= \rho + \lambda q dt + \nu n dt - \mu p dt \end{aligned}$$

CHAPITRE IV

MOUVEMENT HÉLICOÏDAL

On appelle mouvement hélicoïdal uniforme un mouvement dans lequel les points du corps mobile décrivent des hélices d'un mouvement uniforme.

Comme les points mobiles sont invariablement liés ces hélices appartiennent à des cylindres ayant même axe. On prendra cet axe, lieu des points du corps qui se déplacent d'un mouvement rectiligne uniforme, comme axe des z .

THÉORÈME. — Le mouvement hélicoïdal uniforme est la résultante d'un mouvement de translation uniforme parallèle à l'axe et d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe.

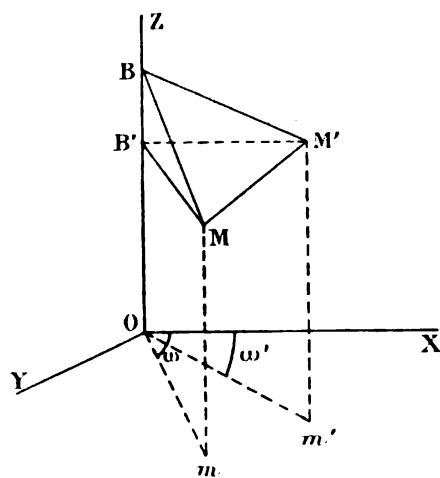


Fig. 85.

Soient deux points M et M' (fig. 85) de coordonnées rectilignes x, y, z ; x', y', z' et de coordonnées semi-polaires $r \omega, z$, $r' \omega', z'$: r et r' sont les distances $MB, M'B'$ des points M et M' à l'axe des z ; ω et ω' sont les angles que font respectivement avec le plan zox les deux plans MOZ et $M'OZ$.

Le corps mobile étant invariable, les dimensions du tétraèdre $MBM'B'$ sont invariables; par suite

$$BB' = c^{\text{te}},$$

or

$$BB' = z' - z,$$

done

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt};$$

La projection de la vitesse de tous les points du corps sur l'axe des z est donc la même. En posant $\frac{dz}{dt} = h$ on a

$$z = ht + z_0.$$

L'angle des plans MBB' et $M'BB'$ est aussi constant, donc $\omega' - \omega = c''$ et par suite $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega'}{dt}$.

Le plan déterminé par l'axe et par un point mobile tourne donc avec la même vitesse angulaire autour de oz quel que soit le point considéré. En posant $\frac{d\omega}{dt} = q$ et considérant q comme indépendant du temps, on a :

$$\omega = qt + \omega_0.$$

Il résulte de là que les coordonnées du point M ont pour expression

$$x = r \cos (qt + \omega_0)$$

$$y = r \sin (qt + \omega_0)$$

$$z = \overset{\sim}{qt} + z_0.$$

Les composantes X, Y, Z de la vitesse du point M sont donc

$$X = \frac{dx}{dt} = -qr \sin (qt + \omega_0),$$

$$Y = \frac{dy}{dt} = qr \cos (qt + \omega_0),$$

$$Z = \frac{dz}{dt} = h, \quad \text{ou encore}$$

$$X = -qy; \quad Y = qx; \quad Z = h.$$

Ce résultat montre que l'on peut considérer la vitesse du

point M comme la résultante de deux vitesses dont les projections sur les axes sont respectivement :

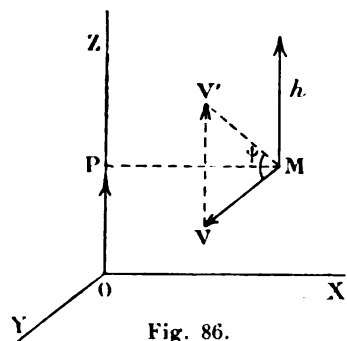


Fig. 86.

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & h \\ -qy & qx & 0 \end{array}$$

La première vitesse est due à la translation du point M parallèle à oz; la seconde est due à la rotation du point M autour de oz.

Calculons l'angle ψ (fig. 86) que fait la résultante MV' des deux mouvements avec la vitesse de rotation MV ; le triangle rectangle MVV' donne :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{VV'}{MV}$$

Or

$$VV' = h \quad \text{et} \quad MV = q \overline{MP},$$

donc

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{h}{q \overline{MP}}$$

REMARQUE. — Si à un instant donné on peut trouver une ligne oz telle que les composantes de la vitesse d'un point quelconque M du solide prennent la forme

$$X = -qy; \quad Y = qx; \quad Z = h,$$

le corps est animé d'un mouvement hélicoïdal autour de l'axe instantané oz.

La vitesse de translation parallèle à oz est égale à h à l'instant t et la vitesse de rotation est égale à qd, d étant la distance du point considéré à l'axe instantané.

ÉTUDE DU MOUVEMENT LE PLUS GÉNÉRAL D'UN CORPS SOLIDE

THÉORÈME. — Le mouvement le plus général d'un corps solide peut toujours être considéré comme résultant à chaque instant d'une translation et d'une rotation.

Soit A un point du solide animé d'un mouvement μ dans lequel il a une vitesse AV à l'instant t (fig. 87). Appliquons au solide deux translations auxiliaires opposées OT et OT' égales et parallèles à AV . Ces deux translations ne changent rien à l'état de mouvement du corps.

Composons la translation OT' avec le mouvement μ ; le point A aura par rapport aux autres points du corps, une vitesse nulle comme résultante de deux vitesses égales et opposées AV et AV' .

Le point A peut donc être regardé comme relativement fixe à l'instant t . Or lorsqu'un corps mobile a un point fixe son mouvement instantané peut être considéré comme une rotation autour d'un axe AR passant par le point A . On peut par suite envisager le corps comme soumis au mouvement résultant de la translation OT et de la rotation AR .

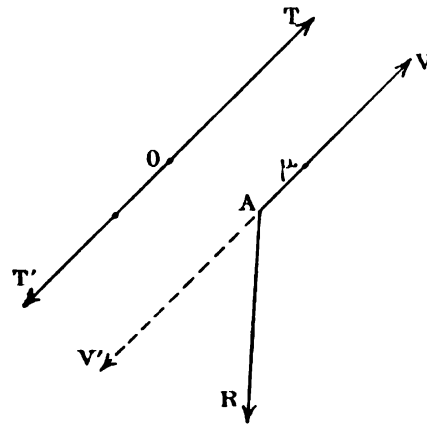


Fig. 87.

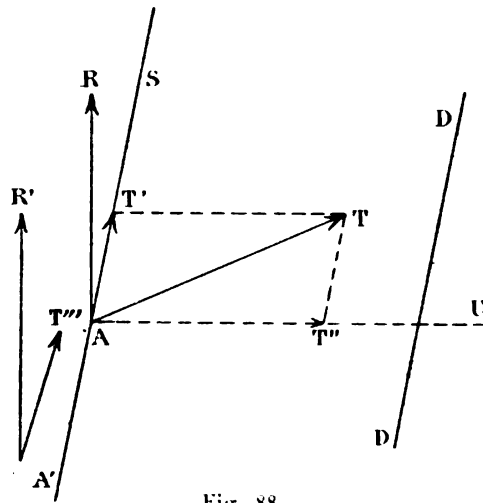


Fig. 88.

tion telle que OT (fig. 87) soit parallèle à une direction donnée D , et cela quel que soit le point A (fig. 88).

En effet, par A menons AS parallèle à D , par AS et AT faisons passer un plan, par A menons d'autre part un plan perpendicu-

REMARQUE. — Comme le point choisi A est arbitraire, la décomposition du mouvement μ en une translation et en une rotation peut être effectuée d'une infinité de manières.

THÉORÈME. — On peut opérer la décomposition de façon que la transla-

Comme les droites AS , AT , AU sont dans un même plan, on peut substituer à la translation AT deux translations AT' et AT'' dirigées suivant AS et AU .

COROLLAIRE. — *Mouvement hélicoïdal instantané.* — Le mouvement le plus général d'un corps solide peut toujours être considéré à un instant donné comme un mouvement hélicoïdal s'effectuant autour d'un certain axe appelé axe instantané de rotation et de glissement.

THÉORÈME. — Le mouvement le plus général d'un corps solide peut toujours être considéré comme résultant de deux rotations simultanées s'effectuant autour de deux axes dont l'un est choisi arbitrairement.

Soit D (fig. 89) l'axe donné ; substituons au mouvement μ la translation AT et la rotation AR, A étant un point de l'axe D. Le plan DAR et le plan perpendiculaire à AT passant par A se coupent suivant une droite AU perpendiculaire à AT. Les trois droites AU, AR et AD étant dans un même plan la rotation AR peut être décomposée en

deux rotations AR' , AR'' suivant AD et AU .

La rotation AR'' et la translation AT étant rectangulaires se composent en une rotation OS égale et parallèle à AR'' . En désignant par Δ l'axe de rotation OS on peut dire que le mouvement μ résulte des rotations AR' et OS autour des droites D et Δ . Les rotations simultanées D et Δ sont dites conjuguées.

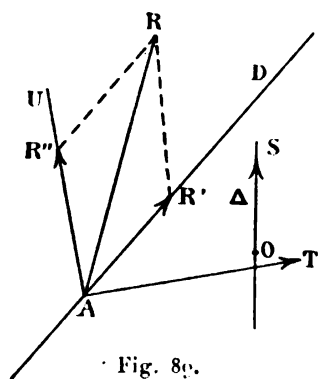


Fig. 8c.

REMARQUE. — Les règles de la composition des rotations étant les mêmes que celles relatives à la composition des forces, la théorie de la décomposition du mouvement le plus général d'un corps solide en deux rotations conjuguées est identique à la théorie de la réduction des forces appliquées à un corps solide à un système de deux forces.

Propriétés des droites conjuguées D et Δ . — THÉORÈME. — Le plan normal à la trajectoire d'un point M de la droite D contient la droite Δ .

La vitesse du point M (fig. 90) est la somme géométrique des vitesses dues aux deux rotations D et Δ ; le point M étant sur l'axe D la vitesse due à la rotation D est nulle, donc la vitesse du point M est égale à la vitesse due à la rotation Δ , elle est par suite perpendiculaire au plan $M\Delta$. Le plan $M\Delta$ est normal en M à la trajectoire de ce point car sa vitesse est tangente en M à la trajectoire.

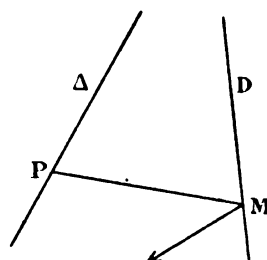


Fig. 90.

COROLLAIRE. — Les droites Δ conjuguées d'un faisceau de droites D (fig. 91) passant par un même point sont situées dans un même plan.

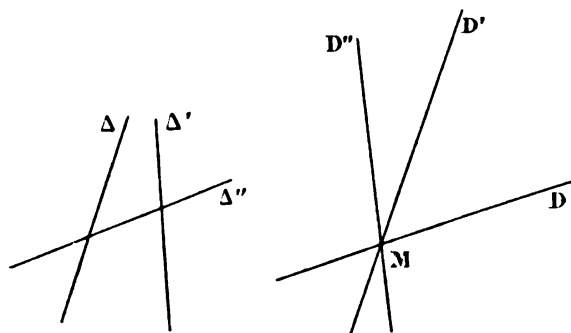


Fig. 91.

En effet, les droites Δ doivent se trouver dans le plan normal en M à la trajectoire du point M .

On peut dire encore : si une droite mobile D passe par un point fixe M , la droite Δ conjuguée de D se déplace en restant dans un plan fixe.

THÉORÈME. — La droite qui passe par un point M du solide mobile et qui rencontre les droites D et Δ est normale à la trajectoire du point M .

Considérons un point M du solide non situé sur les axes D et Δ (fig. 92); sa vitesse MV

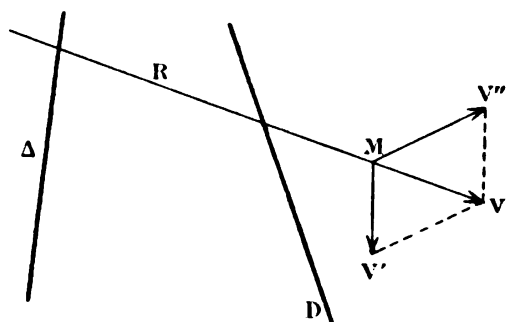


Fig. 92.

est la somme géométrique de la vitesse MV' due à la rotation D et de la vitesse MV'' due à la rotation Δ . Les plans respectivement normaux à MV' et à MV'' , passent le premier par D et le second par Δ ; ils se coupent donc suivant une droite MR

normale à la tangente MV à la trajectoire car MV est dans le plan $MV'V''$ perpendiculaire à MR rencontrant D et Δ .

REMARQUE. — Si la droite choisie D est parallèle à l'axe instantané, la rotation Δ doit se réduire à une translation, et par suite la droite Δ est rejetée à l'infini.

THÉORÈME. — Deux couples quelconques de droites conjuguées sont toujours sur un même hyperboloïde.

Soient D, Δ ; D', Δ' , deux couples de droites conjuguées (fig. 93).

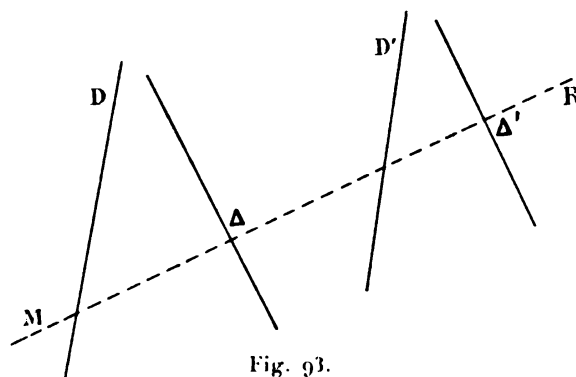


Fig. 93.

Par le point M d'un hyperboloïde auquel appartiennent les droites D, Δ et D' passent deux génératrices.

La génératrice MR qui n'appartient pas au système D, Δ et D'

rencontre ces trois droites. Elle s'appuie aussi sur Δ' car rencontrant D et Δ , elle est normale à la trajectoire du point M ; mais étant normale à la trajectoire de M et rencontrant D' elle rencontre Δ' . Cela ayant lieu quel que soit le point M , la droite Δ' appartient à l'hyperboloïde considéré.

CAS PARTICULIERS. — 1° Si la droite D' est parallèle à l'axe instantané la droite Δ' est à l'infini et par suite l'hyperboloïde est remplacé par un parabololoïde hyperbolique.

2° Supposons que la droite D' (fig. 94) coïncide avec l'axe instantané oz .

Si par un point quelconque M de la droite D on abaisse une perpendiculaire MP sur oz , la droite MP est une normale à la trajectoire du point M .

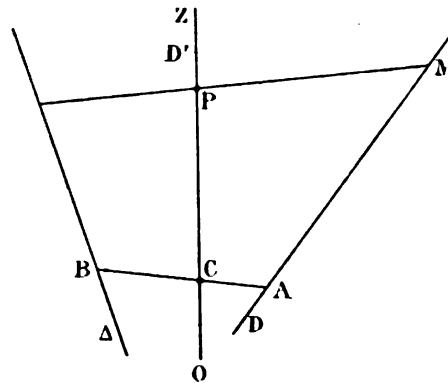


Fig. 94.

En effet, dans le mouvement hélicoïdal autour de oz ou D' le point M décrit une hélice tracée sur un cylindre de révolution dont l'axe est D' . Comme la droite MP est normale à ce cylindre, elle est aussi normale à l'hélice. La normale MP rencontrant la droite D rencontre aussi la droite conjuguée Δ . La droite MP , étant constamment parallèle à un plan perpendiculaire à oz lorsque M se déplace sur D , et s'appuyant sur les trois droites fixes D , Δ et D' , engendre un parabololoïde hyperbolique.

La plus courte distance AB des droites D et Δ est une perpendiculaire commune aux trois droites D , D' et Δ . En effet, lorsque la droite MP se déplace en restant perpendiculaire à oz elle passe par une position pour laquelle elle est perpendiculaire à Δ ; étant perpendiculaire aux droites Δ et D' , parallèles au second plan directeur, elle est perpendiculaire à ce plan et par suite à D .

EXERCICES. — 1° Calcul de l'angle formé par la vitesse du point A et la perpendiculaire élevée en A au plan déterminé par oz et la plus courte distance AB .

Prenons pour plan du tableau le second plan directeur et con-

sidérons les projections des trois droites D , D' et Δ sur ce plan. La vitesse AV du point A étant perpendiculaire au plan $AB\Delta$ se projette sur le plan du tableau perpendiculairement à la projection de Δ . Soit Ax la perpendiculaire en A au plan $AB\Delta$ et ψ

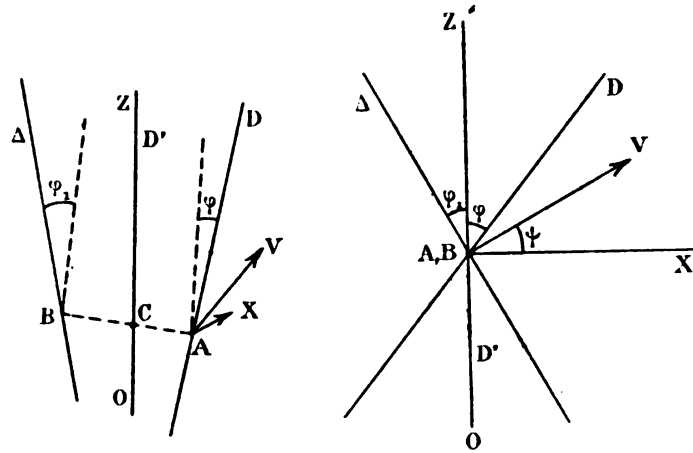


Fig. 95.

l'angle de AV et de la droite Ax qui se projette perpendiculairement à oz . Les angles $V Ax = \psi$ et $\Delta Bz = \varphi_1$ étant complémentaires du même angle zBV sont égaux ; par suite :

$$(Page 104.) \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \psi = \frac{h}{q \cdot AC}.$$

On obtiendrait en raisonnant de même pour le point B :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{q \cdot BC}.$$

2° Connaissant l'axe instantané oz , construire la droite Δ conjuguée d'une droite donnée D .

Soit oz l'axe instantané du mouvement (fig. 96), AC la perpendiculaire commune aux droites oz et D . Par A menons la parallèle Az_2 à oz ; l'angle DAZ_2 est égal à φ , on a donc :

$$BC = \frac{h}{q \cdot \operatorname{tg} \varphi}.$$

Comme l'angle φ est connu, la position du point B sur AC est

déterminée. La droite Δ est dans le plan mené en B perpendiculairement à BC et elle fait dans ce plan l'angle φ_1 avec la parallèle Bz_3 à oz. Or l'angle φ_1 est déterminé par la formule $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{h}{q AC}$, donc la droite Δ est déterminée.

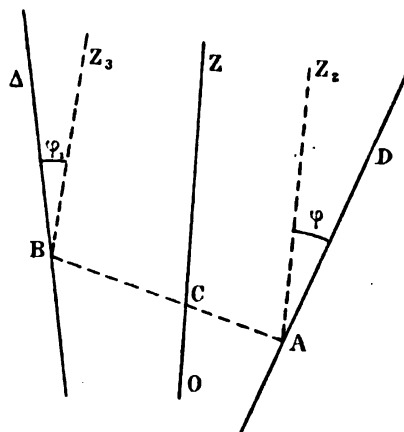


Fig. 96.

REMARQUE. — Deux droites conjuguées D et Δ sont parallèles à un même plan passant par l'axe du mouvement et leurs distances à l'axe sont dans le même rapport que les tangentes des angles qu'elles font avec l'axe.

On a en effet en égalant les deux valeurs de $\frac{h}{q}$:

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{AC} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{BC}.$$

Équation de la droite conjuguée d'une droite donnée D. — Prenons pour axe des z l'axe instantané du mouvement hélicoïdal; pour axe des x la plus courte distance AC entre oz et D (fig. 97). Soit a la mesure de AC et φ l'angle des droites D et oz, les équations de la droite D sont alors

$$x = a, \quad y = z \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Soit M un point de la droite D, ses coordonnées sont :

$$x = a; \quad y = z_0 \operatorname{tg} \varphi; \quad z = z_0.$$

Cherchons l'équation du plan normal à la trajectoire du point M.

La vitesse d'un point de coordonnées x, y, z a pour projections sur les axes :

$$X = -qy; \quad Y = qx; \quad Z = h.$$

Les composantes de la vitesse du point M sont donc :

$$X = -qz_0 \operatorname{tg} \varphi; \quad Y = qa; \quad Z = h.$$

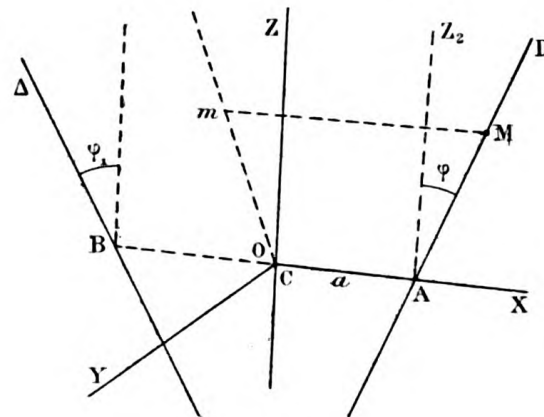


Fig. 97.

Comme le plan normal en M est perpendiculaire à la vitesse du point il a pour équation :

$$X(x - a) + Y(y - z_0 \operatorname{tg} \varphi) + Z(z - z_0) = 0,$$

ou

$$(1) \quad -qz_0 \operatorname{tg} \varphi (x - a) + qa (y - z_0 \operatorname{tg} \varphi) + h (z - z_0) = 0.$$

Ce plan passant par la droite Δ quel que soit le point M , c'est-à-dire quel que soit z_0 , les coordonnées x, y, z de Δ doivent vérifier les deux équations :

$$(2) \quad qay + hz = 0;$$

$$(3) \quad qx \operatorname{tg} \varphi + h = 0$$

Les équations (2), (3) sont donc les équations de la droite Δ .

REMARQUE. — D'après l'équation (3) on a $x = \text{constante}$, la

droite Δ est donc dans un plan parallèle à yoz et par suite perpendiculaire à ox ou BA .

D'après l'équation (2) la droite Δ est dans un plan passant par ox , elle rencontre ox en un point B tel que $BC = x = \frac{-h}{q \operatorname{tg} \varphi_1}$. Soit φ_1 l'angle formé par les droites Δ et oz , la projection de la droite Δ sur le plan des yz a pour équation :

$$y = -\frac{h}{aq} z$$

ou encore

$$y = \operatorname{tg} \varphi_1 z,$$

donc

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{h}{aq}.$$

On obtient ainsi les valeurs de $\operatorname{tg} \varphi_1$ et de BC calculées par voie géométrique dans le paragraphe précédent.

Hélicoïde réglé. — Recherche du plan tangent. — On appelle hélicoïde réglé la surface décrite par une droite animée d'un mouvement hélicoïdal.

Rappelons que sur une génératrice quelconque d'une surface réglée D , il existe un point O (fig. 98) appelé point central auquel correspond un plan tangent appelé plan central.

En désignant par η l'angle formé par le plan tangent en un point quelconque M de la génératrice avec le plan tangent central on a :

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{OM}{K}.$$

Le paramètre K a reçu le nom de paramètre de distribution. La normale en M à l'hélicoïde est perpendiculaire à la droite D qui est sur la surface et à la trajectoire de M . D'autre part, le plan normal à la trajectoire de M passe par Δ conjuguée de OM , donc la normale cherchée doit rencontrer Δ .

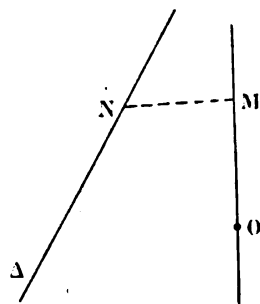


Fig. 98.

D'où la construction suivante du plan tangent : au point M menons un plan perpendiculaire à D et joignons le point N où il coupe la droite Δ au point M ; MN est la normale cherchée. Le plan passant par M et perpendiculaire à MN est le plan tangent en M à l'hélicoïde.

COROLLAIRE. — Les normales MN engendrent un parabolôïde hyperbolique car elles sont normales à D et par suite parallèles à un plan fixe et elles s'appuient sur deux droites fixes D et Δ .

Calcul du paramètre de distribution pour l'hélicoïde règle.

— Soit OZ l'axe instantané, ABC (fig. 99) la perpendiculaire commune aux droites conjuguées D Δ , et à OZ.

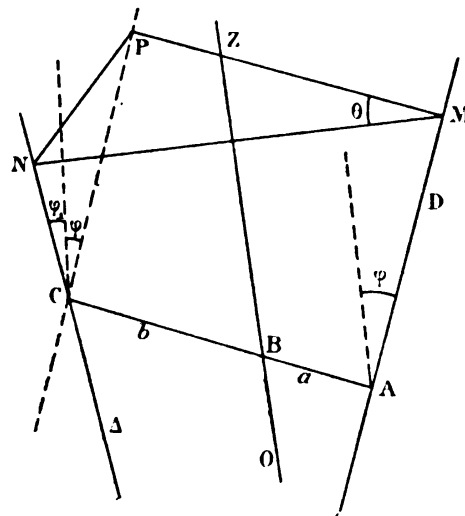


Fig. 99.

Proposons-nous de trouver l'angle θ formé par la normale MN et la droite AB.

Menons CP parallèle à D et MP parallèle à AC. La figure MACP est un rectangle, car les côtés opposés sont parallèles par construction et l'angle MAC est droit, comme MP est parallèle à AB, l'angle θ est égal à l'angle NMP.

La droite NP est perpendiculaire aux droites CP et PM, en d'autres termes les triangles NPC, NPM sont rectangles en P. En effet le plan NMP est perpendiculaire à D, car MP et MN sont perpendiculaires à D, donc MP est perpendiculaire à CP qui est parallèle à D, par suite l'angle NPC est droit.

Considérons NPM, la droite AC est perpendiculaire au plan NCP car ce plan contient Δ et CP qui est parallèle à D. La droite PM étant parallèle à AC est perpendiculaire à NP, donc l'angle NPM est droit.

Dans le triangle rectangle NPM on a

$$NP = PM \operatorname{tg} \theta$$

Le triangle rectangle NPC donne d'autre part

$$NP = CP \operatorname{tg} (\varphi + \varphi_1)$$

donc

$$(1) \quad PM \operatorname{tg} \theta = CP \operatorname{tg} (\varphi + \varphi_1).$$

Comme $PM = AC = a + b$ et que $CP = AM$; il vient en substituant dans (1)

$$(a + b) \operatorname{tg} \theta = AM \operatorname{tg} (\varphi + \varphi_1)$$

d'où :

$$(2) \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{AM}{\frac{a + b}{\operatorname{tg} (\varphi + \varphi_1)}}.$$

En comparant cette expression à la formule générale $\operatorname{tg} \theta = \frac{OM}{K}$, on voit que A est le point central et que le paramètre de distribution K a pour valeur $\frac{a + b}{\operatorname{tg} (\varphi + \varphi_1)}$.

DÉTERMINATION DE LA POSITION D'UN SOLIDE

Pour déterminer complètement la position d'un corps solide dans l'espace, il faut six conditions : soient quatre points ABCD

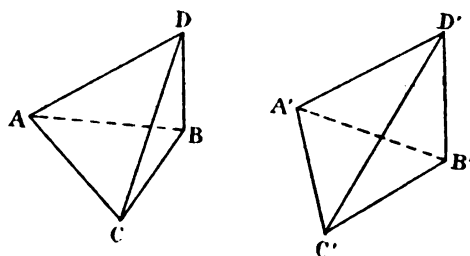


Fig. 100.

(fig. 100) invariablement liés ; connaissant la position A', B', C' prise par les points A, B, C la position D' de D est déterminée. En effet les deux tétraèdres ABCD, $A'B'C'D'$ sont égaux et superposables, or sur $A'B'C'$ on ne peut construire qu'un tétraèdre

égal et superposable à un tétraèdre donné. Donc quand ABC vient en A'B'C', D vient en D'. Il faut connaître les neuf coordonnées des trois points A, B, C pour fixer leurs positions, mais ces neuf coordonnées sont liées entre elles par trois relations qui expriment que les distances des trois points sont constantes. Il reste donc seulement six paramètres arbitraires.

THÉORÈME. — Si le corps n'est soumis qu'à cinq conditions, tous les points du corps décrivent des courbes.

Considérons en effet deux points quelconques M_0 et M . Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point M_0 , x, y, z , celles du point M . Introduisons la condition $z_0 = c^{10}$, la position du corps solide est alors parfaitement déterminée, puisqu'elle satisfait à six conditions. Les coordonnées x, y, z sont des fonctions de z_0 :

$$x = \varphi(z_0) \quad y = \psi(z_0) \quad z = \pi(z_0).$$

Si on fait varier z_0 le point M se déplace sur une certaine courbe ; il en est de même pour tous les points du corps solide.

THÉORÈME. — Si le corps est assujéti à quatre conditions seulement, ses points se déplacent sur des surfaces.

Imposons les deux conditions supplémentaires $y_0 = c^{10}$; $z_0 = c^{10}$.

On a alors six conditions qui fixent la position du corps solide. Les coordonnées x, y, z d'un point quelconque M sont alors des fonctions connues de y_0, z_0 .

$$x = \varphi(y_0, z_0) ; \quad y = \psi(y_0, z_0) ; \quad z = \pi(y_0, z_0).$$

Par suite le point M est assujéti à rester sur une certaine surface lorsque x_0 et y_0 varient. Ces surfaces sont appelées surfaces trajectoires des différents points du corps.

THÉORÈME. — Si un corps solide est assujéti à quatre conditions seulement, il peut se mouvoir d'une infinité de manières, mais dans tous les mouvements instantanés qu'il peut prendre il y a deux droites D et Δ qui restent conjuguées.

LEMME. — Il existe toujours deux droites D et Δ qui rencontrent quatre droites données A_1, A_2, A_3, A_4 (fig. 101). En effet, par les trois premières A_1, A_2, A_3 , faisons passer un hyperbo-

loïde à une nappe, la quatrième droite rencontre cet hyperboloïde en deux points B et C. Par chacun des points B et C passe une génératrice n'appartenant pas au système A_1, A_2, A_3 , elle rencontre donc les quatre droites données. Ainsi il existe

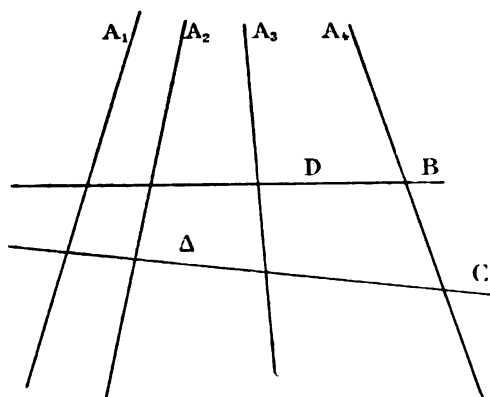


Fig. 101.

deux droites et deux seulement en général qui rencontrent les quatre droites données.

REMARQUE. — Dans le cas où les quatre droites sont sur un même hyperboloïde à une nappe, il y a une infinité de solutions : les génératrices de l'un des systèmes.

1° Considérons maintenant quatre points quelconques M, N,

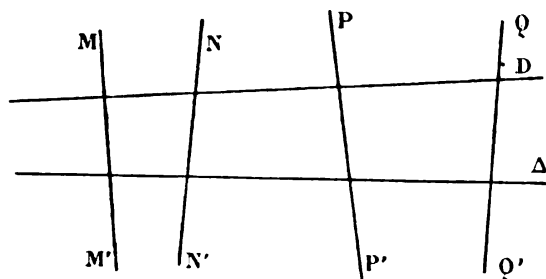


Fig. 102.

P, Q (fig. 102) d'un corps solide assujetti à quatre conditions et soient S_1, S_2, S_3, S_4 les surfaces trajectoires de ces points.

Menons les normales en MNPQ, aux surfaces trajectoires. Comme les points M, N, P, Q sont arbitraires, on peut toujours supposer ces quatre normales non situées sur un même hyper-

boloïde. Donc il y a deux droites D et Δ qui rencontrent les quatre normales, et il n'y en a que deux.

2° Ces deux droites seront conjuguées dans un déplacement instantané quelconque compatible avec les liaisons.

Dans un tel déplacement, les quatre droites MM' , NN' , PP' , QQ' seront normales aux trajectoires des quatre points M , N , P , Q puisque ces trajectoires doivent être situées sur les surfaces S_1 , S_2 , S_3 , S_4 . Cherchons la conjuguée de la droite D qui s'appuie sur les quatre normales. La droite MM' étant normale à la trajectoire du point M et rencontrant la droite D , rencontrera aussi la conjuguée de D . Pour la même raison cette conjuguée rencontrera les trois autres normales NN' , PP' et QQ' . Elle ne pourra donc être autre que Δ .

REMARQUE. — Les droites D et Δ étant conjuguées, un déplacement quelconque peut se décomposer en deux rotations, l'une autour de D , l'autre autour de Δ .

Les deux paramètres arbitraires seront les vitesses de rotation; on peut les choisir arbitrairement, en particulier on peut prendre nulle l'une d'elles. Le mouvement se réduit alors à une rotation instantanée.

Parmi les déplacements possibles, il y en a donc deux qui se réduisent à des rotations instantanées, une autour de D , l'autre autour de Δ .

THÉORÈME. — La normale à la surface trajectoire d'un point quelconque A rencontre D et Δ .

En effet : parmi les déplacements instantanés, en nombre infini, que peut prendre le corps solide il y en a deux, et deux seulement, qui se réduisent à une rotation unique. Les deux axes de rotation sont les droites D et Δ . Ces droites sont donc parfaitement déterminées et ne dépendent pas du choix arbitraire que l'on a fait des quatre points M , N , P , Q et des quatre surfaces trajectoires correspondantes S_1 , S_2 , S_3 , S_4 ; or ces deux droites ont été définies par la condition de rencontrer les normales à ces quatre surfaces S_1 , S_2 , S_3 , S_4 choisies arbitrairement. Donc D et Δ rencontreront les normales aux surfaces trajectoires de tous les points au même moment.

APPLICATION. — Un corps solide est assujéti aux conditions suivantes : un plan du solide est tangent à une surface donnée S par un point donné M , et de plus un autre point A du solide reste sur une surface donnée.

Démontrer que les droites conjuguées D et Δ passent par les centres de courbure principaux de la surface S et sont contenues dans les sections normales principales.

Si $x, y, z; x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ sont les coordonnées de deux points voisins d'une ligne de courbure d'une surface, R le rayon de courbure au point considéré l, m, n les cosinus directeurs de la normale et $l + dl, m + dm, n + dn$ ceux de la normale infiniment voisine, on a

$$\frac{dx}{dl} = \frac{dy}{dm} = \frac{dz}{dn} = R.$$

Comme cinquième condition obligeons le point M à décrire une des lignes de courbure de la surface S . La droite MN (fig. 103) perpendiculaire en M au plan donné reste constamment normale à la surface.

Soient l, m, n ses cosinus directeurs, x, y, z les coordonnées du point M , on a constamment

$$(1) \quad \frac{dx}{dl} = \frac{dy}{dm} = \frac{dz}{dn} = R.$$

Soit un point quelconque P de la normale, ρ sa distance au point M et x_1, y_1, z_1 ses coordonnées, on a :

$$x_1 = x - \rho l; \quad y_1 = y - \rho m; \quad z_1 = z - \rho n.$$

D'où :

$$dx_1 = dx - \rho dl; \quad dy_1 = dy - \rho dm; \quad dz_1 = dz - \rho dn;$$

ou en remplaçant dx, dy, dz par leur valeur :

$$dx_1 = (R - \rho) dl; \quad dy_1 = (R - \rho) dm; \quad dz_1 = (R - \rho) dn.$$

Si le point P est au centre de courbure principale $\rho = R$, $dx_1 = 0, dy_1 = 0, dz_1 = 0$ et la vitesse du centre de courbure est nulle.

Le mouvement se réduit donc à une rotation instantanée autour d'une droite D passant par le centre de courbure principal.

Or on a vu que si un corps mobile est assujéti à quatre conditions, parmi les mouvements compatibles avec ces quatre liaisons

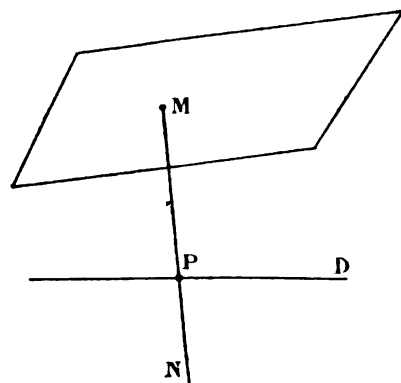


Fig. 103.

deux se réduisent à une rotation instantanée, et les axes de rotation sont deux droites conjuguées D et Δ . L'axe de rotation instantanée précédemment obtenu D est donc l'une de ces deux droites.

Les droites D et Δ sont dans les sections normales principales. En effet le mouvement se réduit à une rotation autour de D . Le plan normal à la tra-

jectoire d'un point passe par l'axe de rotation D , la trajectoire du point M étant ici une ligne de courbure D est dans une section principale, car les plans normaux aux deux lignes de courbure sont précisément les deux sections principales.

CHAPITRE V

MOUVEMENT RELATIF D'UN POINT

Considérons un point mobile M (fig. 104), de coordonnées ξ, η, ζ par rapport aux axes mobiles $O'\xi, O'\eta, O'\zeta$. Ces axes sont définis par rapport au système des axes fixes ox, oy, oz par les coordonnées a, b, c de l'origine O' et par les cosinus directeurs $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ de $O'\xi$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ de $O'\eta$ et $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ de $O'\zeta$.

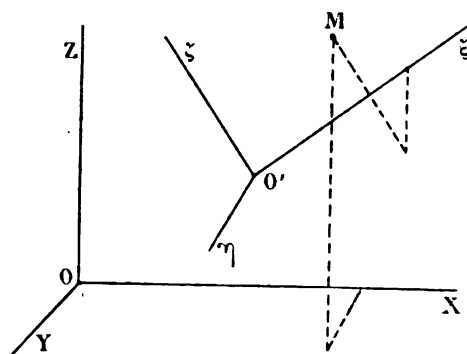


Fig. 104.

Les coordonnées x, y, z du point M par rapport aux axes fixes ont pour expression :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta + a \\ y = \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta + b \\ z = \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta + c. \end{array} \right.$$

On peut avoir à considérer trois mouvements : 1° le mouvement du point M par rapport aux axes fixes ou *mouvement absolu* ; 2° le mouvement des axes mobiles ou *mouvement d'entraînement* ; 3° le mouvement de M tel qu'il apparaîtrait à un observateur invariablement lié aux axes mobiles ou *mouvement relatif*.

1° *Mouvement absolu.* — Les seconds membres des formules (1) étant des fonctions du temps, on peut écrire :

$$x = \varphi(t); \quad y = \psi(t); \quad z = \theta(t);$$

ces équations définissent la trajectoire du point dans le mouvement absolu. La vitesse absolue V_a a pour mesure $\frac{ds}{dt}$ et est tangente à la trajectoire au point où se trouve le mobile M à l'instant t , ses projections sur les axes sont d'ailleurs

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}.$$

Les projections de l'accélération dans le mouvement sur les axes fixes ont pour mesure :

$$\frac{d^2x}{dt^2}; \quad \frac{d^2y}{dt^2}; \quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

2° *Mouvement relatif.* — Les coordonnées du point mobile par rapport aux axes mobiles sont des fonctions du temps, on a donc :

$$\xi = \varphi_1(t); \quad \eta = \psi_1(t); \quad \zeta = \theta_1(t).$$

Ces équations définissent la trajectoire du point M dans le système O' , ξ , η , ζ ou trajectoire relative. En désignant par ds' la différentielle de l'arc de cette trajectoire, la vitesse relative V_r a pour mesure $\frac{ds'}{dt}$ et est tangente en M à la trajectoire considérée.

Elle a d'ailleurs pour projections sur les axes mobiles

$$\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}.$$

Les projections de l'accélération relative sur les mêmes axes ont d'autre part pour mesure

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2}, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

3° *Mouvement d'entraînement.* — Considérons le point P du

système O' , ξ , η , ζ (fig. 104) où se trouve le mobile M à l'instant t . La vitesse et l'accélération du point P sont par définition la vitesse et l'accélération d'entraînement.

On obtiendra donc les composantes de la vitesse d'entraînement V_e en différentiant les expressions (1), les coordonnées ξ , η , ζ du point P étant considérées comme constantes. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha'_1 \xi + \alpha'_2 \eta + \alpha'_3 \zeta + a' \\ (2) \quad \frac{dy}{dt} &= \beta'_1 \xi + \beta'_2 \eta + \beta'_3 \zeta + b' \\ \frac{dz}{dt} &= \gamma'_1 \xi + \gamma'_2 \eta + \gamma'_3 \zeta + c'. \end{aligned}$$

REMARQUE. — Supposons qu'à l'instant considéré les axes mobiles et les axes fixes coïncident. On a alors

$$x = \xi; \quad y = \eta; \quad z = \zeta.$$

Et les formules (1) de transformation de coordonnées, donnent

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1, & \alpha_2 &= 0, & \alpha_3 &= 0, & a &= 0 \\ \beta_1 &= 0, & \beta_2 &= 1, & \beta_3 &= 0, & b &= 0 \\ \gamma_1 &= 0, & \gamma_2 &= 0, & \gamma_3 &= 1, & c &= 0 \end{aligned}$$

Le mouvement d'entraînement étant appliqué à un corps solide, on peut toujours le considérer comme équivalent à un mouvement hélicoïdal instantané; en prenant comme axe des z l'axe de ce mouvement hélicoïdal, la vitesse d'entraînement a pour projections sur les trois axes :

$$-qy \quad \text{ou} \quad -q\eta; \quad qx \quad \text{ou} \quad q\xi; \quad h.$$

Comme ces expressions doivent être identiques à celles données par les formules (2) on a

$$\begin{aligned} (1) \quad \alpha'_1 &= 0, & \alpha'_2 &= -q, & \alpha'_3 &= 0, & a' &= 0 \\ \beta'_1 &= q, & \beta'_2 &= 0, & \beta'_3 &= 0, & b' &= 0 \\ \gamma'_1 &= 0, & \gamma'_2 &= 0, & \gamma'_3 &= 0, & c' &= h, \end{aligned}$$

THÉORÈME. — La vitesse absolue est la somme géométrique de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement.

1° *Démonstration analytique.* — Pour établir que l'on a

$$\bar{V}_a = \bar{V}_r + \bar{V}_e,$$

il suffit d'établir que la projection sur l'un quelconque des axes de coordonnées de la vitesse absolue V_a est égale à la somme algébrique des projections des vitesses relative V_r et d'entraînement V_e sur le même axe. Considérons l'axe ox , on a

$$(V_a)_x = \alpha'_1 \zeta + \alpha'_2 r_1 + \alpha'_3 \zeta + a' + \alpha_1 \frac{d\zeta}{dt} + \alpha_2 \frac{dr_1}{dt} + \alpha_3 \frac{d\zeta}{dt}.$$

En supposant qu'à l'instant considéré les axes mobiles coïncident avec les axes fixes, l'égalité précédente devient :

$$(V_a)_x = \alpha'_1 \zeta + \alpha'_2 r_1 + \alpha'_3 \zeta + a' + \frac{d\zeta}{dt}.$$

Comme

$$(V_e)_x = \alpha'_1 \zeta + \alpha'_2 r_1 + \alpha'_3 \zeta + a' = \alpha'_2 r_1$$

et que $(V_r)_x = \frac{d\zeta}{dt}$, on peut écrire :

$$(V_a)_x = (V_e)_x + (V_r)_x.$$

On démontrerait de la même manière que cette égalité s'étend aux axes oy et oz . On a donc bien

$$\bar{V}_a = \bar{V}_e + \bar{V}_r.$$

2° *Démonstration géométrique.* — Au temps t le point mo-

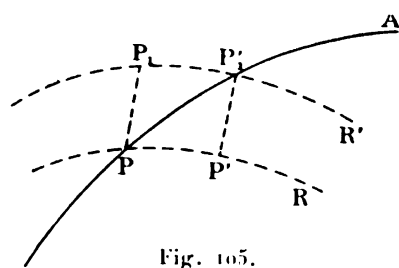


Fig. 105.

bile M (fig. 105) coïncide avec le point P du solide O' , ξ , r_1 , ζ ; à l'instant $t + dt$ il coïncide avec le point P' , les points P et P' appartiennent donc à la trajectoire relative R . En supposant cette trajectoire relative tracée sur le solide, on peut dire qu'à l'instant $t + dt$

elle prend dans l'espace la position R' , les points P , P' sont alors en P_1 et P'_1 . Les points P et P'_1 sont deux points de la trajectoire

absolue du mobile M. On a donc, les points considérés deux à deux étant infiniment voisins :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} PP' = ds' = V_r dt \\ PP'_1 = ds = V_a dt \\ PP_1 = d\sigma = V_e dt. \end{array} \right.$$

Le triangle $PP'P'_1$ donne :

$$\overline{PP'_1} = \overline{PP'} + \overline{P'P'_1}.$$

Les segments PP_1 et $P'P'_1$, étant égaux et parallèles à la limite, on peut écrire :

$$\overline{PP'_1} = \overline{PP_1} + \overline{PP'}$$

En remplaçant ces segments par les expressions (I), il vient :

$$\overline{V}_a = \overline{V}_e + \overline{V}_r.$$

APPLICATIONS. — 1° *Le mouvement d'une figure plane sur un plan peut être ramené au roulement d'une courbe appartenant au plan mobile sur une courbe appartenant au plan fixe.* — Le centre instantané de rotation est mobile par rapport aux axes mobiles et par rapport aux axes fixes. Par définition la base est la trajectoire absolue du centre instantané tandis que la roulette en est la trajectoire relative. A l'instant t la vitesse d'entraînement du centre instantané est nulle, par suite la vitesse absolue du centre instantané est égale à sa vitesse relative en grandeur et direction. Comme les directions des deux vitesses absolue et relative doivent être les mêmes, la roulette est tangente à la base. On a d'autre part $V_a = \frac{ds}{dt}$, $V_r = \frac{ds'}{dt}$, comme $V_a = V_r$, il vient :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds'}{dt},$$

par suite la roulette roule sur la base.

2° *Trouver les trajectoires orthogonales des génératrices d'un hyperboloïde de révolution.* — Prenons pour axe des z l'axe de l'hyperboloïde et pour axes des x et des y deux diamètres rec-

tangulaires du cercle de gorge. Considérons une génératrice AM de l'hyperboloïde et un point M mobile le long de cette génératrice (fig. 106). Supposons que la génératrice AM tourne d'un mouvement uniforme et que le mouvement rectiligne et relatif

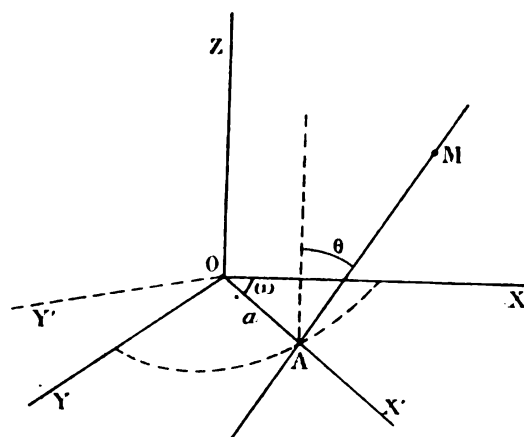


Fig. 106.

de M soit tel que la trajectoire absolue de M soit orthogonale aux génératrices de l'hyperboloïde.

Dans ces conditions la vitesse absolue est perpendiculaire à la génératrice, par suite sa projection sur la génératrice est nulle; il résulte de là que la somme des projections sur cette génératrice de la vitesse

relative et de la vitesse d'entraînement est nulle.

Or en posant $AM = \rho$, la vitesse relative a pour expression $\frac{d\rho}{dt}$ et elle se projette en vraie grandeur sur AM. Pour calculer la vitesse d'entraînement à l'instant considéré, prenons pour axe des x' le diamètre OA, et pour axe des y' le diamètre perpendiculaire.

La vitesse d'entraînement de M due à la rotation uniforme $Aox = \omega = qt$, a pour composantes sur ox' , $-qy'$ et sur oy , $+qx'$ la composante $-qy'$ étant perpendiculaire à la génératrice AM a une projection nulle sur AM. Désignons par θ l'angle de AM avec oz et par a l' x' du point M, la projection de qx' sur AM a pour mesure $qx' \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ ou $-qa \sin \theta$ on a donc

$$\frac{d\rho}{dt} - qa \sin \theta = 0,$$

par suite

$$\rho = qat \sin \theta + C^{\text{te}},$$

ou encore

$$\rho = a\omega \sin \theta + C^{\text{te}}.$$

C'est là l'équation des trajectoires orthogonales cherchées.

3° *Mouvement relatif épicycloïdal.* — Considérons deux figures planes invariables F et F' tournant respectivement autour des points O et O' (fig. 107) avec les vitesses angulaires constantes et de sens contraires ω et ω' . Prenons sur la droite OO' un point A tel que l'on ait $\omega \cdot OA = \omega' \cdot O'A$. Décrivons du point O comme centre une circonférence de rayon OA et du point O' une autre circonférence de rayon $O'A$. Considérons enfin ces deux circonférences comme entraînées, la première par F , la

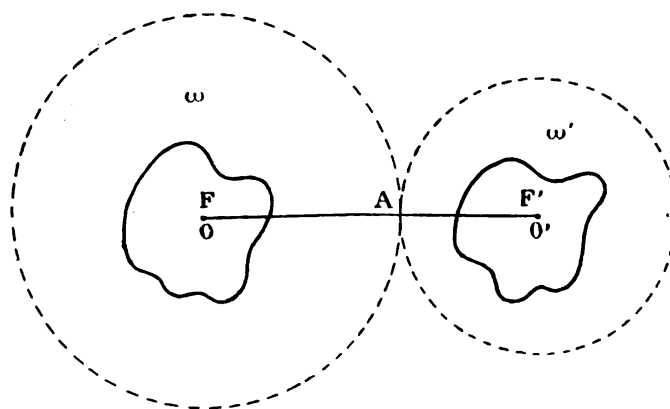


Fig. 107.

seconde par F' . Cherchons le mouvement relatif de F' par rapport à F .

Pour un observateur invariablement lié au système F la circonférence de centre O est fixe, la vitesse du point A considérée comme appartenant à F est $V_e = \omega \cdot OA$.

Le mouvement absolu du point A dans le système F' est dû à la rotation ω' , on a donc

$$V_a = \omega' \cdot O'A.$$

Comme $\omega \cdot OA = \omega' \cdot O'A$ on voit que les vitesses V_e , V_a sont égales en grandeur et direction. Or on a

$$\bar{V}_r = \bar{V}_a - \bar{V}_e$$

donc $V_r = 0$. La vitesse du point A , pour l'observateur F , étant nulle, le point A est centre instantané de rotation dans le mouvement relatif; en d'autres termes le cercle de centre O'

semble rouler sur le cercle de centre O, par suite le mouvement relatif considéré est épicycloïdal.

THÉORÈME DE CORIOLIS. — *L'accélération absolue est égale à la somme géométrique de trois autres accélérations : 1° l'accélération relative ; 2° l'accélération d'entraînement ; 3° une accélération qui, prise en signe contraire, se nomme accélération centrifuge composée.*

1° *Démonstration analytique.* — Considérons les formules de transformation de coordonnées (1) (p. 121), la première

$$x = \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta + a$$

permet de calculer la projection $\frac{d^2x}{dt^2}$ de l'accélération absolue sur ox .

En formant $\frac{d^2x}{dt^2}$ on obtient :

$$(2) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = (\alpha''_1 \xi + \alpha''_2 \eta + \alpha''_3 \zeta + a'') + \left(\alpha'_1 \frac{d\xi}{dt} + \alpha'_2 \frac{d\eta}{dt} + \alpha'_3 \frac{d\zeta}{dt} \right) + \left(\alpha_1 \frac{d^2\xi}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d^2\eta}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^2\zeta}{dt^2} \right).$$

L'accélération relative a pour projection sur $o\xi$, $\frac{d^2\xi}{dt^2}$.

Si à l'instant considéré on suppose que $o\xi$ coïncide avec ox , on a $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$; $\frac{d^2x}{dt^2}$ qui est alors égal à $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ se réduit à la troisième parenthèse, par suite dans le cas général la troisième parenthèse représente la projection sur ox de l'accélération relative.

Pour obtenir la projection sur ox de l'accélération d'entraînement il faut différentier x deux fois en considérant les coordonnées ξ, η, ζ comme des constantes, on obtient ainsi la première parenthèse de l'égalité (2).

Le même calcul appliqué aux axes oy et oz conduit à un résultat semblable.

L'accélération absolue $\overline{a}$ est donc la somme géométrique des

accélérations relative $\overline{\varphi}_r$, d'entraînement $\overline{\varphi}_e$ et d'une troisième accélération dont les projections sur les trois axes sont :

$$(3) \quad \begin{aligned} & 2 \left(\alpha'_1 \frac{d\xi}{dt} + \alpha'_2 \frac{d\eta}{dt} + \alpha'_3 \frac{d\zeta}{dt} \right) & (ox) \\ & 2 \left(\beta'_1 \frac{d\xi}{dt} + \beta'_2 \frac{d\eta}{dt} + \beta'_3 \frac{d\zeta}{dt} \right) & (oy) \\ & 2 \left(\gamma'_1 \frac{d\xi}{dt} + \gamma'_2 \frac{d\eta}{dt} + \gamma'_3 \frac{d\zeta}{dt} \right) & (oz). \end{aligned}$$

Direction et grandeur de l'accélération centrifuge composée. — Supposons qu'à l'instant considéré les axes mobiles coïncident avec les axes fixes et que OZ soit l'axe instantané, en vertu des égalités (1) (p. 123) les expressions (3) deviennent

$$-2q \frac{d\eta}{dt}; \quad 2q \frac{d\xi}{dt}; \quad 0.$$

Ces résultats montrent que la troisième accélération, que nous désignerons par $-\overline{\varphi}_e$, est identique à la vitesse d'un point M qui aurait pour coordonnées :

$$2 \frac{d\xi}{dt}, \quad 2 \frac{d\eta}{dt}, \quad 2 \frac{d\zeta}{dt}$$

et qui tournerait autour de OZ avec la vitesse angulaire q . En conséquence : 1° le vecteur OM est parallèle à la vitesse relative dont les composantes sont :

$$\frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{d\zeta}{dt}$$

et égale à deux fois cette vitesse ; 2° dans le mouvement de rotation considéré la vitesse du point M est perpendiculaire au plan MOZ (fig. 108), par suite l'accélération $\overline{\varphi}_e$ est perpendiculaire à l'axe instantané et à la vitesse relative ; 3° désignons par MP la distance du mobile M à l'axe de rotation OZ et par θ l'angle MOZ ; la vitesse de M a pour mesure $q \cdot MP$, or $MP = OM \sin \theta$ et $OM = 2 V_r$, donc

$$V_M = 2qV_r \sin \theta$$

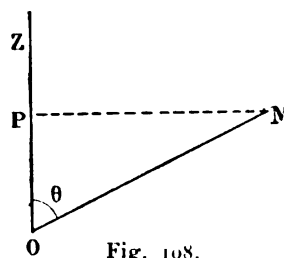


Fig. 108.

Comme

$$-\varphi_c = V_M$$

on a

$$-\varphi_c = 2qV_r \sin \theta.$$

Le vecteur $\overline{\varphi}_c$ égal et opposé à $-\overline{\varphi}_c$ a reçu le nom d'*accélération centrifuge composée* ou accélération de *Coriolis*.

REMARQUE. — 1° On a

$$\overline{\varphi}_a = \overline{\varphi}_r + \overline{\varphi}_c - \overline{\varphi}_c$$

par suite

$$\overline{\varphi}_r = \overline{\varphi}_a - \overline{\varphi}_c + \overline{\varphi}_c.$$

L'accélération relative est la somme géométrique de l'accélération absolue, de l'accélération centrifuge composée et de l'accélération d'entraînement changée de signe.

2° *Démonstration géométrique.* — Comme la vitesse absolue du point M est égale à la somme géométrique de sa vitesse d'entraînement et de sa vitesse relative, on a à l'instant t

$$\overline{V}_a = \overline{V}_r + \overline{V}_c.$$

Pendant le temps infiniment petit dt l'accroissement géométrique de la vitesse absolue est égal à l'accélération absolue $\overline{\varphi}_a$ multipliée par dt; au temps t + dt la vitesse absolue a donc pour mesure $\overline{V}_a + \overline{\varphi}_a dt$.

La vitesse absolue varie pour quatre raisons différentes, car il faut tenir compte : 1° du mouvement d'entraînement ; 2° du mouvement relatif ; 3° de l'entraînement du vecteur $\overline{V}_r$ dans le mouvement des axes mobiles ; 4° de ce que le point P du système mobile qui coïncide avec le point M change aux divers instants.

A l'instant t le mobile M (fig. 109) coïncide avec le point P du système entraîné, à l'instant t + dt il coïncide avec le point P'. Désignons par V_c et φ_c la vitesse et l'accélération du point P à l'instant t; par V'_c et φ'_c la vitesse et l'accélération du point P' au même instant. A l'instant t + dt les points P et P' seront animés des vitesses $\overline{V}_c + \overline{\varphi}_c dt$; $\overline{V}'_c + \overline{\varphi}'_c dt$, qui ne diffèrent que par des in-

$$(1) \quad \overline{V}_a + \overline{\varphi}_a \, dt = \overline{V}_r + \overline{V}_e + \overline{\varphi}_e \, dt.$$

En portant cette valeur de $\overline{V}_r$ dans l'égalité (1) il vient :

On a d'autre part $\overline{V}_a = \overline{V}_r + \overline{V}_e$; en retranchant ces deux dernières égalités membre à membre il vient :

En posant $\overline{\varphi}_a = \overline{\varphi}_r + \overline{\varphi}_c - \overline{\varphi}_c$ il vient :

$$(3) \quad -\overline{\varphi_c} \, dt = \overline{P_1 V_1} - \overline{V_r} + \overline{V_c} - \overline{V_e}.$$

Le quadrilatère $PP_1P_1'P'$ donne

$$\overline{P_1 P'_1} - \overline{P P'} = \overline{P' P'_1} - \overline{P P_1}.$$

$P'P'_1$ est le déplacement du point P' pendant le temps dt , comme ce déplacement s'effectue avec la vitesse V'_e on a

$$P'P'_1 = V'_e dt,$$

de même

$$PP_1 = V_e dt,$$

par suite

$$\overline{P'P'_1} - \overline{PP_1} = (\overline{V'_e} - \overline{V_e}) dt.$$

Or

$$\overline{P_1V_1} - \overline{PV} = \frac{1}{dt} (P_1P'_1 - PP'),$$

donc

$$\overline{P_1V_1} - \overline{PV} = \overline{V'_e} - \overline{V_e}.$$

Comme

$$\overline{PV} = \overline{V_r}$$

on a

$$\overline{P_1V_1} - \overline{V_r} = \overline{V'_e} - \overline{V_e}.$$

En portant cette valeur dans l'égalité (3) il vient :

$$-\overline{\varphi_e} dt = 2 (\overline{V'_e} - \overline{V_e}).$$

L'accélération absolue $\overline{\varphi_a}$ est donc égale à la somme géométrique $\overline{\varphi_r} + \overline{\varphi_e} + (-\overline{\varphi_e})$, l'accélération φ_e étant définie par l'égalité

$$(4) \quad -\overline{\varphi_e} dt = 2 (\overline{V'_e} - \overline{V_e}).$$

Pour expliciter $\overline{\varphi_e}$ il faut évaluer la différence géométrique $\overline{V'_e} - \overline{V_e}$. Les vecteurs $\overline{V_e}$ et $\overline{V'_e}$ sont les vitesses d'entraînement de deux points P et P' appartenant au système mobile invariable. A l'instant t le mouvement de ce système équivaut à un mouvement hélicoïdal instantané, c'est-à-dire à une translation et à une rotation. Les vitesses des points P et P' dues à la translation sont égales et parallèles, leur différence géométrique est donc nulle; par suite tout revient à calculer la différence géométrique des vitesses des points P et P' dues à la rotation.

Choisissons le point P (fig. 110) de façon qu'il soit à l'instant t sur l'axe instantané Pz .

Dans ces conditions, la vitesse de P est nulle, celle de P' ,

c'est-à-dire la différence $\overline{V_e'} - \overline{V_e}$, est perpendiculaire à $PP'z$, donc l'accélération centrifuge composée $\overline{\varphi_c}$ qui a même direction est perpendiculaire à Pz , c'est-à-dire à l'axe instantané, et à PP' , c'est-à-dire à la vitesse relative. Soit $P'N$ la perpendiculaire abaissée de P' sur Pz , on a

$$\overline{V_e'} = q \cdot P'N, \quad \text{or} \quad P'N = PP' \sin \theta,$$

θ désignant l'angle zPP' que forme l'axe instantané avec la vitesse relative du point P , d'ailleurs $PP' = V_r dt$,

$$\text{donc } \overline{V_e'} = q \cdot V_r \sin \theta \cdot dt.$$

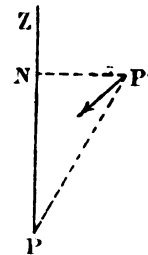


Fig. 110.

En se reportant à l'égalité (4), on obtient pour la mesure de l'accélération de Coriolis :

$$\overline{\varphi_c} = 2q \cdot V_r \sin \theta.$$

REMARQUES. — I. L'accélération centrifuge composée est nulle dans les cas suivants :

1° $q=0$, le mouvement d'entraînement est alors une translation.

2° $\sin \theta=0$, la vitesse relative est alors parallèle à l'axe de rotation.

3° $V_r=0$, le point est alors au repos relatif, c'est-à-dire immobile dans le système mobile.

II. Le théorème de Coriolis montre que l'on peut étudier, au point de vue dynamique, le mouvement relatif du mobile M comme son mouvement absolu, à la condition d'adjoindre à la force qui sollicite le point deux forces fictives capables de lui communiquer, l'une, l'accélération centrifuge composée, l'autre, une accélération égale et opposée à l'accélération d'entraînement. La force centrifuge composée est nulle dans les trois cas cités plus haut, en particulier elle n'intervient pas dans la recherche des conditions de l'équilibre relatif. La force centrifuge composée intervient dans l'explication de plusieurs phénomènes : vents alizés, déviation d'un corps tombant en chute libre dans un puits, etc...

APPLICATIONS. — *Expression des composantes de la vitesse et*

de l'accélération suivant le rayon vecteur et la perpendiculaire à ce rayon. — Considérons une droite tournant dans un plan

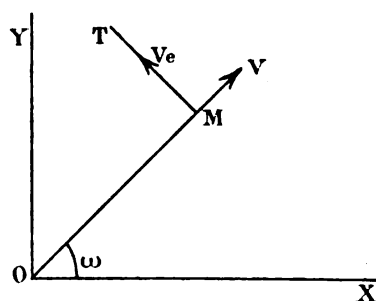


Fig. 111.

autour d'un point O, et soit M un point mobile le long de la droite (fig. 111).

1° *Vitesse*. — La vitesse relative V_r a pour expression $\frac{dr}{dt}$, elle est dirigée le long du rayon vecteur OM. Si le point M était fixe il serait animé d'un mouvement de rotation autour de O, dont la vi-

tesse perpendiculaire à OM a pour mesure $r \cdot \frac{d\omega}{dt}$, c'est la vitesse d'entraînement.

La vitesse absolue, qui est la somme géométrique des deux vitesses précédentes, a donc pour composantes, suivant OM, $\frac{dr}{dt}$, et perpendiculairement à OM, $r \frac{d\omega}{dt}$.

2° *Accélération*. — L'accélération relative φ_r a pour expression $\frac{d^2r}{dt^2}$; comme le mouvement relatif de M est rectiligne, l'accélération est dirigée suivant OM.

Dans le mouvement d'entraînement le point M décrit un cercle, l'accélération d'entraînement φ_e a donc pour composantes — $r \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2$ suivant OM, et $r \frac{d^2\omega}{dt^2}$ suivant la perpendiculaire MT à OM.

L'accélération centrifuge composée est dirigée perpendiculairement à l'axe de rotation O et au rayon vecteur OM, c'est-à-dire suivant MT; elle a d'ailleurs pour mesure $2q \cdot V_r \sin \theta$; or, dans le cas actuel, $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $q = \frac{d\omega}{dt}$, donc $\varphi_c = 2 \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{dr}{dt}$.

D'après l'égalité géométrique $\overline{\varphi_a} = \overline{\varphi_r} + \overline{\varphi_e} - \overline{\varphi_c}$, les composantes de l'accélération absolue sont donc :

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2$$

suivant OM et

$$r \frac{d^2\omega}{dt^2} + 2 \frac{d\omega}{dt} \frac{dr}{dt}$$

suivant MT.

2° *Expression de l'accélération absolue d'un point d'un solide mobile autour d'un point fixe.* — Le mouvement du solide considéré S' équivaut à une rotation instantanée représentée par l'axe OR (fig. 112) dont les projections sur les axes fixes ox, oy, oz sont n, p, q . Supposons un observateur invariablement lié à un second solide S animé de la rotation uniforme OR et étudions le mouvement de S' pour l'observateur placé sur S . Comme à l'instant considéré les deux rotations sont identiques la vitesse relative de S' est nulle, par suite $\varphi_c = 0$ et le théorème de Coriolis donne $\bar{\varphi}_a = \bar{\varphi}_r + \bar{\varphi}_c$. A l'instant $t + dt$ les composantes de la rotation instantanée de S' deviennent :

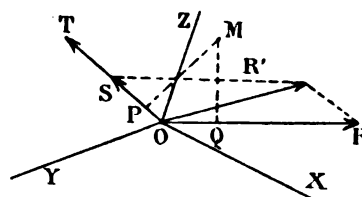


Fig. 112.

$$n + \frac{dn}{dt} \cdot dt; \quad p + \frac{dp}{dt} \times dt; \quad q + \frac{dq}{dt} \cdot dt.$$

L'axe OR' représente cette rotation, OR représente la rotation d'entraînement. Exprimons l'accélération relative. Comme $\bar{\varphi}_r = \bar{\varphi}_a - \bar{\varphi}_c$ le mouvement relatif est la rotation représentée par l'axe OS , différence géométrique des axes OR' et OR . Les projections de OS sur les axes sont $\frac{dn}{dt} dt, \frac{dp}{dt} dt, \frac{dq}{dt} dt$. Ces quantités étant proportionnelles aux projections de l'accélération angulaire sur les axes OS représente l'accélération angulaire multipliée par dt . On a donc $OS = OT \cdot dt$, en représentant par OT l'accélération angulaire. La vitesse relative d'un point M de S' est nulle à l'instant t , à l'instant $t + dt$ elle est due à la rotation OS , elle a par suite pour mesure $OS \times MP$, MP étant la distance du point M à l'axe de rotation. L'accélération relative a donc pour mesure $\frac{OS}{dt} \times MP = OT \times MP$ elle est égale au produit de l'accélération angulaire par la distance.

du point M à l'axe de rotation, et sa direction est perpendiculaire au plan MOT.

Déterminons maintenant l'accélération d'entraînement φ_e . Le mouvement d'entraînement étant un mouvement de rotation uniforme autour de OR, le point M décrit une circonférence de rayon $r = MQ$ avec une vitesse angulaire constante ω . L'accélération a alors pour mesure $\omega^2.r$ et est dirigée suivant le rayon de la circonférence.

Donc $\varphi_e = r\omega^2$. En résumé l'accélération absolue est la somme géométrique de l'accélération relative $\omega = OT \times MP$ et de l'accélération d'entraînement $\varphi_r = OR \times MQ$. On retrouve ainsi le théorème de Rivals: φ_r est l'accélération due à l'accélération angulaire et φ_e l'accélération centripète (p. 91).

CHAPITRE VI

MÉCANISMES

Mouvements usuels. — L'industrie utilise les mouvements les plus simples. Elle emploie surtout : le mouvement circulaire continu; le mouvement circulaire alternatif; le mouvement rectiligne alternatif; le mouvement rectiligne continu.

Il est souvent nécessaire de transformer :

1° Un mouvement circulaire continu en un autre mouvement circulaire continu;

2° Un mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne continu;

3° Un mouvement circulaire continu en un mouvement alternatif rectiligne ou circulaire;

4° Un mouvement circulaire alternatif en un mouvement rectiligne alternatif.

Mécanismes. — Les organes qui permettent de faire passer le mouvement, de la pièce menante à la pièce menée, se nomment *mécanismes*.

Les mécanismes peuvent être classés en deux catégories : la première catégorie comprend les systèmes articulés dans lesquels les angles varient, les distances des articulations restant constantes. La deuxième catégorie comprend les systèmes constitués par une pièce P animée d'un mouvement M qui, par contact continu, imprime un mouvement M' à une autre pièce P'.

Le problème géométrique à résoudre dans ce cas est le suivant : connaissant la forme de la pièce P' par exemple, ainsi que les mouvements M et M', déterminer la forme de la pièce P.

Puisque P et P' sont en contact continu le contour de la pièce P s'obtient en déterminant l'enveloppe des positions suc-

cessives du contour de P' dans le mouvement de P' pour un observateur invariablement lié à la pièce P .

TRANSFORMATION D'UN MOUVEMENT CIRCULAIRE CONTINU EN UN MOUVEMENT CIRCULAIRE CONTINU

Distinguons trois cas :

- 1° Les axes des deux mouvements sont parallèles.
- 2° Les axes des deux mouvements sont concourants.
- 3° Les axes des deux mouvements ne sont pas dans un même plan.

I. *Axes parallèles.* — Dans le cas où les axes de rotation sont parallèles on opère la transformation au moyen de la bielle d'accouplement, de la courroie de transmission ou des engrenages.

Bielle d'accouplement. — Soient O et O' (fig. 113) les traces des axes de rotation sur un plan qui leur est perpendiculaire,

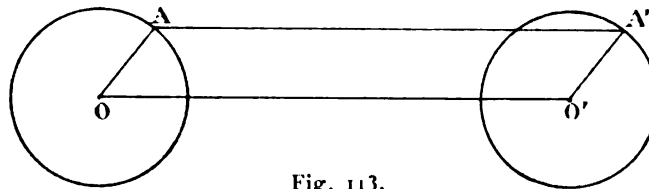


Fig. 113.

OA et $O'A'$ les manivelles égales montées sur chaque axe et dont les *boutons* A et A' sont reliés par une tringle AA' que l'on nomme *bielle d'accouplement*. La figure $AOA'O'$ est un parallélogramme quelle que soit la position de OA . Les points A et A' décrivent des circonférences égales avec des vitesses égales

La bielle d'accouplement est employée dans les locomotives pour réunir les paires de roues motrices.

Courroie de transmission. — Une courroie de cuir supposée flexible et inextensible passe sur la *jante* de deux poulies respectivement calées sur les axes O et O' (fig. 114). Il est facile d'obtenir le rapport des vitesses angulaires ω et ω' des deux poulies dont les rayons ont pour mesure R et R' , en supposant que

la courroie ne glisse pas sur les jantes. En effet la vitesse linéaire de la courroie est égale à la vitesse d'un point de la jante

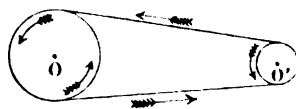


Fig. 114.

de l'une ou de l'autre poulie, comme ces vitesses sont respectivement ωR et $\omega' R'$ on a

$$\omega R = \omega' R'$$

d'où

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{R'}{R}$$

Les vitesses angulaires des deux poulies sont donc dans le rapport inverse de leurs rayons.

REMARQUE. — 1° Si les vitesses de rotation des deux poulies

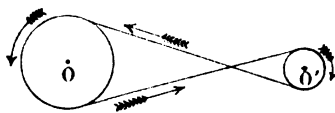


Fig. 114 bis.

doivent être de sens contraires il faut *croiser* la courroie (fig. 114 bis)

2° Souvent on monte sur l'arbre qui porte la poulie une seconde poulie non calée sur l'axe et que l'on nomme *poulie folle* : on fait passer la courroie sur cette poulie lorsqu'on veut amener l'arbre au repos.

3° Lorsqu'on substitue à la courroie une *chaîne de Vaucanson*, on munit la jante de la poulie de dents qui pénètrent dans les mailles de la chaîne pendant la rotation. Lorsqu'on se sert d'un câble dit *télédyamique*, les poulies sont munies de gorges destinées à maintenir le câble en place.

Engrenages. — On appelle engrenage un système de deux roues dentées toujours en contact. Comme les deux roues sont

cylindriques le contact a lieu tout le long d'une génératrice. La roue qui transmet le mouvement se nomme *roue menante* et celle qui le reçoit *roue menée*.

On cherche à obtenir l'uniformité du mouvement de rotation des deux roues. S'il en était autrement il se produirait par moment, à cause de l'inertie des masses à mouvoir, des efforts considérables capables de rompre les dents des roues en contact.

Circonférences primitives. — Soient O et O' (fig. 115) les traces des axes de rotation sur un plan qui leur est perpendiculaire, ω et ω' les vitesses de rotation que doivent avoir les roues menante et menée. Sur la droite OO' déterminons un point A tel que l'on ait :

$$\omega.OA = \omega'.O'A.$$

Des points O et O' avec les rayons OA et $O'A$ décrivons deux circonférences ; on obtient ainsi ce que l'on nomme les circonférences primitives de l'engrenage à construire.

Calcul du nombre des dents de la roue menée. — Supposons

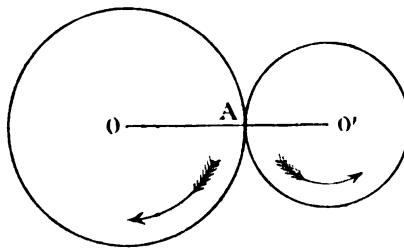


Fig. 115.

que la roue menante, de rayon $OA = R$, doive porter n dents. Lorsqu'elle avance d'une dent elle tourne de l'angle $\alpha = \frac{2\pi}{n}$. La roue menée tourne en même temps d'une dent et par conséquent de l'angle $\alpha' = \frac{2\pi}{n'}$, en désignant par n' le nombre total des dents de la roue menée. Comme les angles α et α' sont décrits dans le même temps ils sont entre eux comme les vitesses angulaires des deux roues. On a donc

$$\frac{\alpha}{\omega} = \frac{\alpha'}{\omega'}, \text{ d'où } n\omega = n'\omega'$$

On voit par là que le rapport du nombre des dents des deux roues est égal à l'inverse du rapport des vitesses angulaires des roues correspondantes.

Eléments d'une roue dentée. — On appelle *dent* la portion des saillies portées par la jante de la roue qui sont extérieures à la circonférence primitive, les portions intérieures se nomment *creux* (fig. 116). La longueur b de l'arc de circonférence primitive interceptée par une dent est l'épaisseur ou la base de la dent; la dimension de la dent comptée parallèlement à l'axe de la roue est sa *largeur*; l'arc de circonférence c intercepté par le creux se nomme *intervalle*. La longueur MN est la saillie de la dent et MQ la profondeur du creux. L'arc de circonférence primitive occupé par une dent et un creux consécutif se nomme le *pas* de la roue dentée. Toutes les dents sont identiques entre elles; il en est de même des creux.

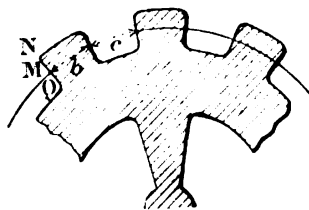


Fig. 116.

Egalité de pas des deux roues d'un engrenage. — La roue menante portant n dents, la circonférence primitive est partagée en n parties égales à a , on a donc

$$(1) \quad 2\pi R = na.$$

On a de même pour la roue menée

$$(2) \quad 2\pi R' = n'a'.$$

Or d'après la construction des circonférences primitives, on a

$$\frac{R}{R'} = \frac{\omega'}{\omega},$$

d'autre part

$$\frac{n}{n'} = \frac{\omega'}{\omega},$$

donc

$$\frac{R}{R'} = \frac{n}{n'}.$$

En divisant membre à membre les égalités (1) et (2) il vient :

$$\frac{R}{R'} = \frac{na}{n'a'},$$

on doit donc avoir

$$\frac{a}{a'} = 1.$$

En d'autres termes les pas des deux roues associées sont égaux.

D'ailleurs il faut que le creux de l'une quelconque des deux roues puisse recevoir la dent de l'autre.

On a par suite $b \leq c'$ et $b' \leq c$. Si l'exécution d'un engrenage pouvait être parfaite on prendrait $b = c'$ et $b' = c$.

Dans la pratique il faut prévoir un jeu i variant de $\frac{1}{10}$ à $\frac{1}{20}$ de l'intervalle. On a donc en réalité :

$$b = c'(1 - i); \quad b' = c(1 - i),$$

ou encore

$$b + b' = (c + c')(1 - i).$$

Généralement on fait en sorte que $b = b'$ et $c = c'$ de façon à donner aux deux dents une égale solidité. Il est évident que la saillie des dents de l'une des roues doit être inférieure ou au plus égale à la profondeur des creux de l'autre roue.

Engrenages réciproques. — Si la dent et le creux des deux roues en contact admettent un plan de symétrie passant par l'axe de la roue correspondante, l'engrenage pourra fonctionner dans les deux sens ; on dit alors que l'engrenage est à *retour* ou *réciproque*.

Les dents en contact doivent être placées près du plan des axes.
— Considérons les deux circonférences primitives O et O' tournant avec les vitesses angulaires constantes ω et ω' autour de leurs axes (fig. 117). On a vu (p. 127) que le mouvement de O' , pour un observateur invariablement lié à O , est un mouvement épicycloïdal ; en d'autres termes, pour l'observateur O la circonférence O' paraît rouler sur la circonférence O . A chaque instant

la vitesse relative du point de contact A des deux circonférences est nulle. Si donc les deux dents *aux prises* se touchent suivant la génératrice placée en A, ces deux dents seront immobiles

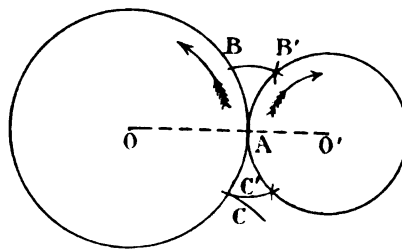


Fig. 117.

l'une par rapport à l'autre et par suite ne frotteront pas l'une sur l'autre.

Si les dents se touchent en dehors du plan des axes leur vitesse relative est différente de zéro, elles glissent alors l'une sur l'autre, d'où frottement.

Pour réaliser la continuité du mouvement on s'arrange dans la pratique de manière à avoir quatre dents en contact. Au moment où le contact a lieu en A, celui du groupe CC' commence et celui du groupe BB' finit, le contact de chaque dent dure le temps que met un point de la circonférence primitive à décrire deux pas. Pour atténuer le frottement, les groupes BB', CC' seront pris de part et d'autre de la ligne OO' et le plus près possible de cette ligne.

Détermination du profil des dents. — Soient O et O' (fig. 118) les circonférences primitives et D le contour ou *profil* de la dent

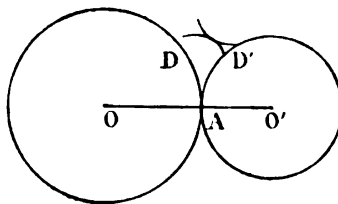


Fig. 118.

relative à la roue O. Il s'agit de déterminer le profil D' de la dent de la roue O'. Considérons un observateur invariablement

lié à la roue O' ; la courbe D' lui paraît fixe ; d'autre part il doit voir la courbe D se déplacer mais en restant constamment tangente à la courbe D' , en d'autres termes la courbe D' est l'enveloppe des positions successives prises par D . Or pour l'observateur considéré le mouvement de O est un mouvement épicycloïdal donc si l'on fait tourner la circonférence O' et qu'on détermine l'enveloppe des positions successives prises par la courbe D , on obtiendra le profil D' demandé. Si le profil D' est donné on détermine de la même manière le profil D . Comme la forme du profil donné est arbitraire il y a théoriquement une infinité de solutions. Pratiquement on n'emploie guère que trois espèces d'engrenages :

Les engrenages à lanternes, les engrenages à flanes, et les engrenages à développantes de cercles.

Engrenage à lanterne. — Le profil D' le plus simple que l'on puisse se donner O' est un point (fig. 119). Lorsque la circonfé-

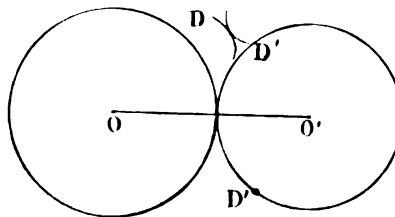


Fig. 119.

rence O' roule sur O le point profil décrit une épicycloïde. Donc le profil D est un arc d'épicycloïde. Pour réaliser l'engrenage à lanterne on plante sur le pourtour de la circonférence O' de petits cylindres régulièrement distribués dont les axes coïncident avec les points profils D' . Le profil de la dent est l'arc d'épicycloïde précédent transporté parallèlement à lui-même à une distance égale au rayon de la tige cylindrique. Cet engrenage, généralement construit en bois, est employé seulement dans quelques machines grossières.

Engrenage à flanc. — Prenons comme profil D' une partie d'un rayon $O'B$ de la circonférence O' (fig. 120). Lorsque la circonférence O' roule sur la circonférence O , le rayon $O'B$ enve-

loppe une épicycloïde (p. 71), donc le profil de la dent D est un arc d'épicycloïde. La portion rectiligne de la dent D' se nomme *flanc*; l'arc D de l'épicycloïde conjugué de ce flanc se nomme *face*.

Les flancs D' sont intérieurs à la circonférence primitive O' et les faces D sont extérieures à la circonférence primitive O. En effet pour obtenir le point de contact de D et de D' à un instant donné il faut abaisser du centre instantané de rotation I une perpendiculaire sur la position correspondante de O'B. Le point M ainsi obtenu est sur la circonférence de diamètre O'I, il est donc à l'intérieur de O' et à l'extérieur de O.

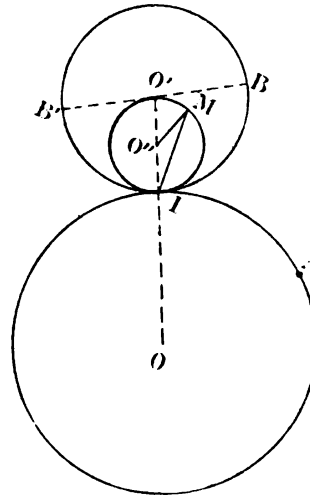


Fig. 120.

REMARQUES. — On peut compléter les flancs de la roue O' par des arcs d'épicycloïde tels que BE (fig. 121). De même les faces

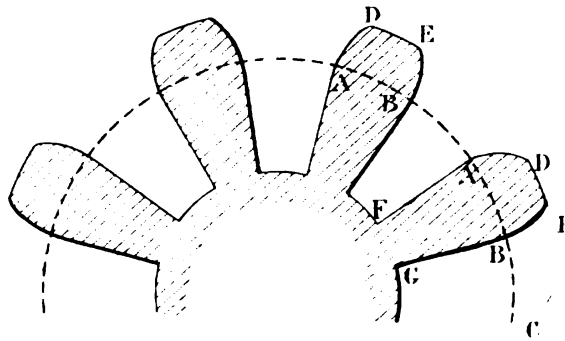


Fig. 121.

épicycloïdales de la roue O peuvent être complétées par des flancs rectilignes. Une dent se composera donc de deux parties : l'une intérieure à la circonférence primitive telle que ABFG dont les côtés AB et FG, portions de rayons de la circonférence primitive, constituent les flancs. L'autre partie ADEB extérieure à la circonférence primitive est limitée par des arcs d'épicycloïde AD, BE profils conjugués des flancs de la seconde roue. On obtient de

cette façon un engrenage réciproque dans lequel le contact peut se produire soit après, soit avant la ligne des centres. Avant la ligne des centres OO' les flancs de la roue menante poussent les faces de la roue menée ; après la ligne des centres ce sont les faces qui poussent les flancs.

Si les dents de la roue conduite portaient seules des flancs, le contact entre les deux roues ne se produirait qu'après le passage de la ligne des centres.

Une même roue à faces épicycloïdales ne peut pas conduire plusieurs roues semblables de diamètres différents.

En effet considérons trois circonférences primitives O, O', O'' (fig. 122) de rayons différents R, R' et R'' . Pour que les dents de la

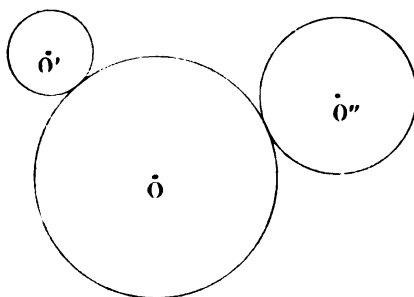


Fig. 122.

roue O engrènent avec celles de la roue O' , il faut, d'après ce qui précède, que les faces des dents de O soient des arcs d'épicycloïde ayant pour base la circonférence O et pour roulette une circonférence de rayon $\frac{R'}{2}$. Mais pour pouvoir engrener avec les dents de O' il faudrait que les faces des dents de O soient des arcs d'épicycloïde ayant pour base O et pour roulette une circonférence de rayon $\frac{R''}{2}$. Il est impossible de satisfaire à ces deux conditions puisque les rayons R'' et R' sont différents.

On pourrait tourner la difficulté en utilisant le théorème suivant.

THÉORÈME. — Le profil conjugué d'une épicycloïde D' ayant pour base la circonférence primitive O' est une autre épicycloïde D ayant pour base l'autre circonférence primitive O .

En effet, soit I (fig. 123) le point de contact des deux circonférences, A et B deux points fixes pris sur chacune d'elles et tels que :

$$\text{arc IA} = \text{arc IB}$$

Considérons une troisième circonférence de centre O'' et tangente en I à O et O' . Soit M un point de cette circonférence tel que

$$\text{arc IM} = \text{arc IA}$$

Le mouvement absolu de M est un mouvement épicycloïdal, car on a à chaque instant

$$\text{arc MI} = \text{arc AI}$$

L'épicycloïde D décrite par le point M a pour base la circonférence O et pour roulette la circonférence O'' . Dans le mouvement relatif, le point M décrit aussi une épicycloïde D' , car dans le système O', O'' on a à chaque instant $\text{arc IM} = \text{arc IB}$, l'épicycloïde D' provient de la base O' et de la roulette — O'' , le signe — indiquant que la roulette est intérieure à la base. La droite IM qui joint le centre instantané de rotation au point considéré M est normale aux deux épicycloïdes D et D' ; donc les deux courbes sont constamment tangentes.

L'une quelconque d'entre elles est l'enveloppe des positions successives prises par l'autre dans le mouvement de roulement.

On construirait donc d'abord les dents de O et de O' , puis on prendrait comme flanc des dents de O'' le profil conjugué des faces épicycloïdales de O. On obtiendrait ainsi des flancs épicycloïdaux, mais cette complication est évitée grâce à l'emploi de l'engrenage à développante.

REMARQUES. — 1° Si la circonférence O'' est telle que son rayon

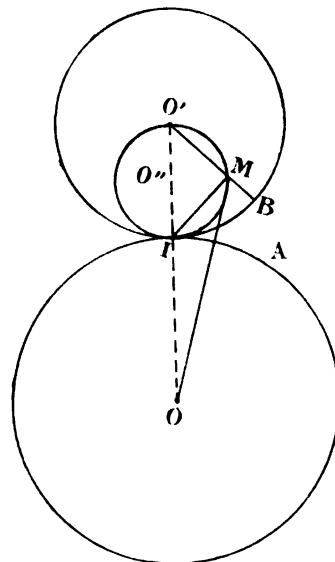


Fig. 123.

$O'I = \frac{O'I}{2}$, la trajectoire relative du point M est un diamètre de la circonférence O' . On a en effet $\text{arc IM} = \text{arc IB}$; l'angle $MO'I$ a pour mesure $\text{arc } \frac{IM}{2O'I}$ ou $\text{arc } \frac{IM}{O'I}$; l'angle $IO'B$ a d'autre part pour mesure $\frac{\text{arc IB}}{O'I}$, donc les angles $IO'M$ et $IO'B$ sont égaux; par suite le point M reste sur la droite $O'B$. On retrouve de cette façon que le profil conjugué du diamètre BB' (fig. 120) est une épicycloïde.

Engrenage à développante de cercle. — En choisissant comme profil D' une développante d'une circonférence concentrique à O' , le profil conjugué D est une développante d'une autre circonférence concentrique à O et facile à déterminer (voir p. 72). Le point de contact des deux développantes est sur la tangente commune aux deux circonférences qui passe par le centre instantané de rotation.

Une même roue à développante de cercle peut conduire plusieurs roues de diamètres différents.

En effet, des centres O, O' et O'' (fig. 122) décrivons trois circonférences de rayons C, C' et C'' . Les développantes de ces circonférences pourront servir de profil si l'on a $\frac{C}{R} = \frac{C'}{R'} = \frac{C''}{R''}$. Dans ces conditions la roue O conduira les roues O' et O'' .

L'engrenage à développante présente encore sur l'engrenage à flanc deux autres avantages importants au point de vue pratique :

1° Si la distance des axes O et O' est altérée, soit par vice d'ajustage, soit par usure des tourillons, l'engrenage à flanc n'est plus exact alors que l'engrenage à développante reste parfait. Supposons que la distance des axes au lieu d'être $R + R'$ devienne $\mathcal{E}(R + R')$; si R_1 et R'_1 sont les rayons des nouvelles circonférences primitives, on a :

$$(1) \quad R_1 + R'_1 = \mathcal{E}(R + R')$$

De plus

$$\omega R_1 = \omega' R'_1.$$

Posons

$$\omega R = \omega' R' = \lambda, \quad \omega R_1 = \omega' R'_1 = \lambda'.$$

L'égalité (1) donne alors

$$\mathfrak{G}\lambda \left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega'} \right) = \lambda' \left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega'} \right),$$

done

$$\lambda' = \mathfrak{G}\lambda;$$

par suite

$$R_1 = R\mathfrak{G}; \quad R'_1 = R'\mathfrak{G}.$$

Pour que l'engrenage à flanc reste exact il faudrait que les saillies des dents de la roue O fussent des arcs d'épicycloïde engendrée par une circonférence de rayon $\frac{R'\mathfrak{G}}{2}$ roulant sur une circonférence de rayon $R\mathfrak{G}$; ce qui n'a pas lieu étant donnée la construction première de l'engrenage.

L'engrenage à développante reste exact, car la nouvelle condition d'exactitude $\frac{C}{\mathfrak{G}R} = \frac{C'}{\mathfrak{G}R'}$ est satisfaite en même temps que l'ancienne condition $\frac{C}{R} = \frac{C'}{R'}$.

2° Si l'usure des dents est uniforme le profil primitif C de chaque dent est remplacé par une courbe parallèle C'; deux telles courbes ont même développée : la courbe C étant une développante de cercle, la courbe parallèle C' sera une développante du même cercle. Une usure uniforme n'altère donc pas les propriétés de l'engrenage à développante.

Malgré ces avantages l'engrenage à développante de cercle est beaucoup moins employé que l'engrenage à flanc, parce que, toutes choses égales d'ailleurs, les dents de l'engrenage à développante de cercle sont beaucoup plus minces à leur extrémité que celles de l'engrenage à flanc, elles sont donc moins résistantes. On l'emploie surtout quand on veut faire conduire un grand nombre de roues par une roue unique. L'horlogerie utilise exclusivement l'engrenage à flanc.

REMARQUE. — Pour transformer un mouvement de rotation O en un mouvement de rotation O'' de même sens, on introduit entre O et O'', s'il y a de la place, une roue intermédiaire O'

(fig. 124). La roue O communique à O' une rotation de sens opposé à la sienne, de même O' communique à O'' une rotation

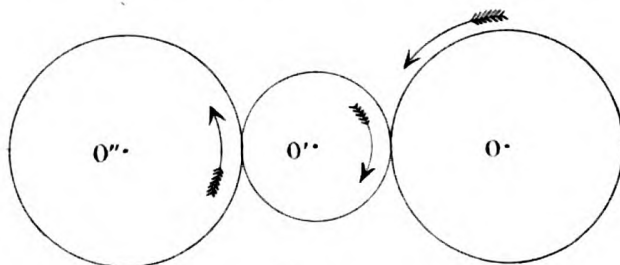


Fig. 124.

contraire à la sienne propre, c'est-à-dire de même sens que celle de O .

Si la place manque pour loger la roue intermédiaire on emploie les engrenages intérieurs.

Engrenages intérieurs. — Soient O et O' (fig. 125) les axes fixes autour desquels s'effectuent les mouvements de rotation de

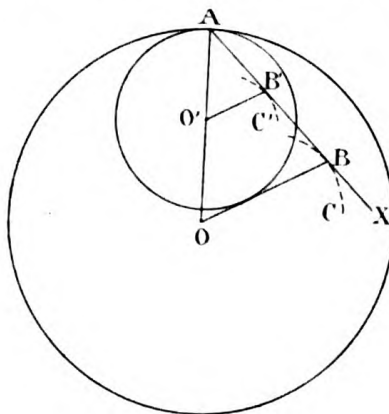


Fig. 125.

même sens et de vitesses angulaires ω et ω' . Déterminons sur OO' le point extérieur A pour lequel on a $\omega.OA = \omega'.O'A$, et traçons des points O et O' comme centres deux circonférences de rayons OA et $O'A$. On obtient ainsi les circonférences primitives de l'engrenage intérieur à établir. Il n'y a rien à changer dans la suite à la théorie des engrenages extérieurs.

On peut réaliser l'engrenage réciproque à développante de

cercle, mais il est désavantageux car les dents de la grande roue sont alors concaves. En effet pour construire l'engrenage à développante il faut tracer deux circonférences C et C' de centres O et O' ayant respectivement pour rayons C et C' . La tangente commune AX à C et C' menée par A est la normale commune aux deux dents. Les pieds B et B' des perpendiculaires abaissées de O et de O' sur la normale sont les centres de courbure des développantes des cercles C et C' . Comme ils sont tous deux du même côté de A les deux profils tournent leur concavité du même côté, donc l'une des dents est concave (fig. 126). Cette condition oblige à construire des dents faibles à leur extrémité, aussi l'engrenage intérieur à développante est-il peu employé.

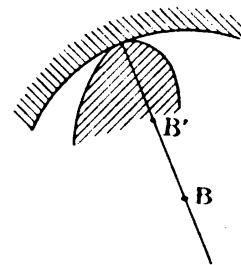


Fig. 126.

Dans le cas où l'on adopte l'engrenage à flanc on ne peut pas donner à la fois à la grande roue des flancs et des faces.

En effet le lieu des points de contact des flancs de la petite roue O' avec les faces de la grande roue O est une circonférence O'' décrite sur $O'A$ comme diamètre. Comme ces points sont à l'intérieur de la circonférence primitive O on ne peut pas donner à la fois aux dents des flancs et des faces.

Si les dents de la petite roue portent des faces celles de la grande roue portent des flancs; le plus souvent on donne des flancs à la petite roue et des faces à la grande.

Il résulte de cette nécessité de construction que le contact ne peut avoir lieu que d'un seul côté de la ligne des centres.

REMARQUE. — Si l'on donne à la petite roue O' des flancs se continuant par des arcs d'épicycloïde formant les faces, il faut prendre comme profils des dents de la grande roue, d'abord le profil conju-

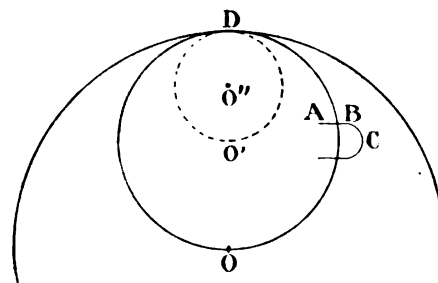


Fig. 127.

gué de AB puis le profil conjugué de BC : ce sont deux arcs d'épicycloïde, mais l'arc conjugué de BC est concave (fig. 127).

Crémaillère. — On obtient ce que l'on nomme une crémaillère (fig. 129) en supposant que le rayon de la circonférence primitive O conservant une valeur

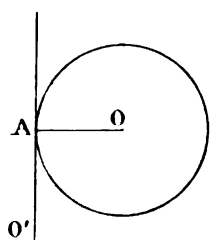


Fig. 128.

finie, celui de la circonférence O' augmente indéfiniment (fig. 128).

On emploie l'engrenage à flanc. En général, le profil conjugué du flanc de la roue O est une épicycloïde engendrée par une circonférence

de rayon $\frac{R'}{2}$ roulant sur la circonférence O .

Dans le cas actuel, la roulette est une ligne droite, puisque R' est infini, donc le profil conjugué du flanc de la roue O est une développante de cercle. Les dents de la tige de la crémaillère ont donc pour faces des développantes de cercle. Les faces de la roue, profils conjugués des flancs de la tige, sont des arcs de cycloïde, car elles sont engendrées par le roulement d'une circonférence sur une droite.

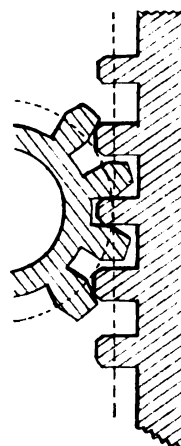


Fig. 129.

Détermination du nombre des dents des roues d'un train d'engrenage. — Considérons quatre axes de rotation parallèles O_1, O_2, O_3, O_4 (fig. 130). Sur l'axe O_1 animé d'une vitesse angulaire de rotation ω_1 est montée une seule roue A_1 . Sur l'axe O_2 , animé d'une vitesse de rotation ω_2 , sont calées deux roues, l'une B_1 qui engrène avec A_1 , et une autre A_2 . L'axe O_3 , animé d'une vitesse angulaire ω_3 , porte également deux roues calées sur lui : l'une B_2 est commandée par A_2 avec laquelle elle engrène, et une seconde A_3 . Enfin, sur le quatrième axe, animé d'une vitesse angulaire ω_4 , est calée une seule roue B_3 qui engrène avec A_3 . Soient α_1 le nombre des dents de A_1 ; α_2 , celui de A_2 ; α_3 , celui de A_3 ; β_1 , le nombre des dents de B_1 ; β_2 , celui de B_2 , et β_3 , celui de B_3 . Les roues A_1 et B_1 engrenant ensemble et tournant avec les vitesses angulaires ω_1 et ω_2 , on a :

$$\omega_1 \alpha_1 = \omega_2 \beta_1.$$

De même $\omega_2 \alpha_2 = \omega_3 \beta_2$ et $\omega_3 \alpha_3 = \omega_4 \beta_3$.

En multipliant ces égalités membre à membre il vient :

$$\frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3}{\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \beta_3}.$$

En raisonnant sur $n+1$ axes et n engrenages (n paires de roues dentées) montés de la même façon, on aurait :

$$\frac{\omega_{n+1}}{\omega_1} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}.$$

Si l'on se donne $\frac{\omega_{n+1}}{\omega_1} = \frac{A}{B}$, on pourra écrire $\frac{AH}{BH} = \frac{\omega_{n+1}}{\omega_1}$,

H étant un nombre quelconque.

En décomposant respectivement AH et BH en n facteurs

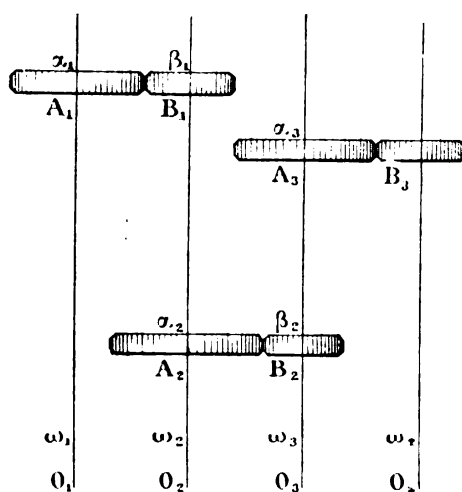


Fig. 130.

entiers, on obtient un système de valeurs pour $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ acceptables sous certaines conditions. Il faut remarquer en effet que le nombre des dents d'une roue a une limite inférieure. Ainsi avec l'engrenage à flanc on met ordinairement au moins dix dents; l'engrenage à développante en porte au moins douze. Cependant en horlogerie on se contente de six dents. D'autre part, il ne faut pas que le rapport des vitesses des deux roues engrenant soit trop petit. Sa limite inférieure est ordinairement $\frac{1}{5}$. En horlogerie on va jusqu'à $\frac{1}{12}$. Enfin le nombre

des dents ne doit pas être trop considérable, sans quoi l'exécution de l'engrenage serait impossible.

Application. — Soit à réaliser le rapport de vitesse $\frac{1}{60}$. Il faut utiliser plus de deux axes puisque le rapport des vitesses doit être supérieur à $\frac{1}{12}$. Prenons trois axes. On aura :

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_1 \beta_2} = \frac{1}{60}$$

En posant $\alpha_1=6$, $\alpha_2=6$, il vient :

$$\frac{1}{60} = \frac{6^2}{\beta_1 \beta_2}, \text{ d'où : } \beta_1 \beta_2 = 60.6^2.$$

On prendra alors $\beta_1=45$, $\beta_2=48$.

REMARQUE. — Supposons que dans le rapport $\frac{\omega_{n+1}}{\omega_1} = \frac{A}{B}$ que l'on se donne, A soit un nombre premier très grand. Ce cas se présente dans la construction de certaines horloges qui donnent les lunaisons (celle de Strasbourg par exemple). Soit $A=1439$ et $\frac{A}{B} = \frac{1439}{3485}$; 1439 est un nombre premier, il faudrait donc donner à l'une des roues 1439 dents, ce qui est difficile. On a alors recours aux trains épicycloïdaux.

TRAINS ÉPICYCLOÏDAUX

Soit AA' (fig. 131) un axe de rotation sur lequel est calée une roue N . Cette roue emporte dans sa rotation un axe BB' qui est parallèle à AA' . L'axe AA' porte de plus deux roues folles P et Q . Enfin, sur l'axe BB' sont calées les roues R et S . Soient ω la vitesse angulaire de la roue N , et ω_2 la vitesse de rotation communiquée à la roue folle Q . La roue N en tournant entraîne dans son mouvement l'axe BB' . La roue Q engrène avec la roue S et communique à cette roue un certain mouvement de rotation. La roue S étant calée sur l'axe BB' imprime son mouvement à cet

axe et par suite à la roue R. Enfin, cette roue R engrène avec la roue P et la fait tourner.

Soient q , p , r et s les nombres respectifs de dents des roues Q, P, R et S. Pour un observateur entraîné dans le mouvement de la roue N, les axes AA' et BB' sont fixes et les roues R et P constituent un engrenage ordinaire. Dans un mouvement résul-

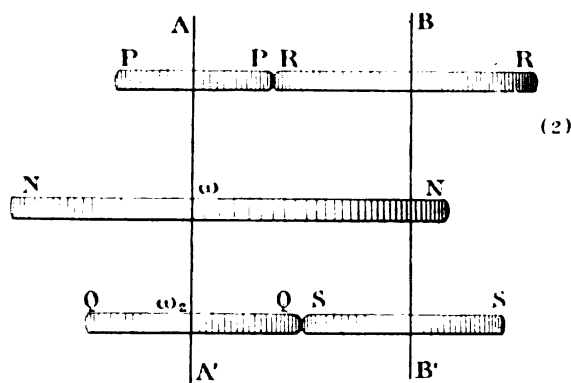


Fig. 131.

tant, la vitesse absolue d'un point est la somme de sa vitesse relative et de sa vitesse d'entraînement. Or, la vitesse relative de la roue Q est $\omega_2 - \omega$; si P tourne avec la vitesse absolue ω_1 , sa vitesse relative est de même $\omega_1 - \omega$. En désignant par z la vitesse relative commune à R et S, on a :

$$(\omega_2 - \omega)q = zs \text{ et } (\omega_1 - \omega)p = zr,$$

d'où

$$\frac{\omega_2 - \omega}{\omega_1 - \omega} = \frac{ps}{rq}, \text{ donc } \frac{rq}{ps} = \frac{\frac{\omega_1}{\omega} - 1}{\frac{\omega_2}{\omega} - 1},$$

ou encore :

$$(1) \quad \frac{\omega_1}{\omega} = 1 - \frac{rq}{ps} + \frac{rq}{ps} \cdot \frac{\omega_2}{\omega}.$$

Dans la plupart des cas, on suppose la roue Q fixe; il faut faire alors $\omega_2 = 0$ dans la formule (1), et il vient :

$$\frac{\omega_1}{\omega} = 1 - \frac{rq}{ps} = \frac{ps - rq}{ps}.$$

Nous pouvons maintenant réaliser le rapport $\frac{1439}{3485} = \frac{\omega_1}{\omega}$.

En posant $p=3485$, on obtient :

$$1439 = 3485 - rq,$$

ce qui conduit à prendre :

$$p=41; s=85; r=33; q=62.$$

REMARQUES. — 1° On peut se servir de trains épicycloïdaux pour réaliser des rapports très petits entre les vitesses de rotation de deux roues. En faisant par exemple $p=n$, $s=n$, $r=n-1$, $q=n-1$, on a

$$\frac{\omega_1}{\omega} = 1 - \frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

2° Les engrenages coniques s'emploient aussi dans les trains épicycloïdaux.

Soit par exemple un axe AA' (fig. 132) sur lequel sont montées deux roues non calées P et Q . L'axe AA' en tournant entraîne

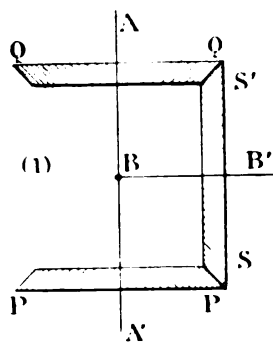


Fig. 132.

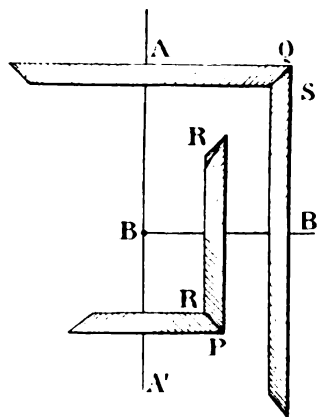


Fig. 133.

dans son mouvement un axe BB' qui lui est perpendiculaire. La roue Q est fixe; sur l'axe BB' est montée, comme dans la figure 132, une roue SS' qui engrène avec les roues P et Q , ou bien, comme dans la figure 133, sur BB' sont montées deux roues R et S calées sur l'axe, de telle sorte que la roue S

entraîne la roue R; la roue fixe Q engrène avec S et R avec la roue P, comme dans le train épicycloïdal étudié plus haut.

Engrenages hélicoïdaux de Hooke et de White. — Dans les engrenages étudiés précédemment, le contact n'a pas lieu seulement sur la ligne des centres, par conséquent les dents ne roulent pas sur leurs conjuguées, elles glissent. Il se produit un frottement que l'on ne peut pas éviter avec des dents de forme cylindrique qui sont en contact tout le long d'une génératrice. Pour supprimer le glissement il faut avoir recours aux engrenages de précision ou engrenages hélicoïdaux de Hooke et de White.

Considérons deux axes parallèles OO_1 , $O'O_1'$ (fig. 134) sur lesquels sont montées deux roues R et R' ayant des vitesses de rota-

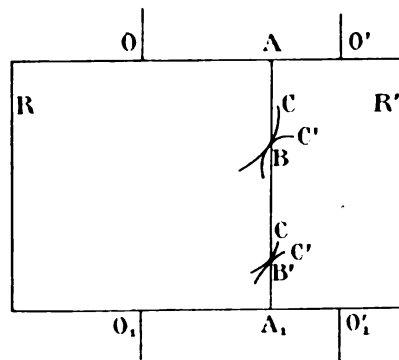


Fig. 134.

tion ω et ω' dont le rapport est constant. Soit A le point de contact des circonférences primitives de ces deux roues O et O' leurs centres définis de façon que $\omega_1 OA = \omega'_1 O'A'$. Considérons en outre les cylindres primitifs ayant pour axes, OO_1 , $O'O_1'$ et pour directrices les circonférences primitives de R et de R', ils sont tangents le long de la génératrice commune AA_1 . Pour un observateur invariablement lié à R, le mouvement de R' sera un mouvement épicycloïdal. Pour qu'il y ait roulement, il faut que la vitesse relative du point de contact des deux dents soit nulle, il faut donc que ce point de contact soit sur l'axe instantané de rotation qui est la génératrice de contact AA_1 des deux cylindres. Le profil de la roue R étant donné, on détermine sa surface enveloppe E. Pour qu'il y ait roulement, le point de contact du

profil R et de son profil conjugué doit être sur la génératrice de contact des deux cylindres primitifs. On est ainsi conduit à prendre pour la forme à donner à la roue R' une surface quelconque tangente à l'enveloppe E tout le long de la courbe d'intersection de E et de R .

Malgré l'arbitraire que semble présenter cette question, il n'y a guère qu'une forme d'engrenages qui y réponde ; ce sont ceux où les roues ont une forme hélicoïdale (fig. 135). En

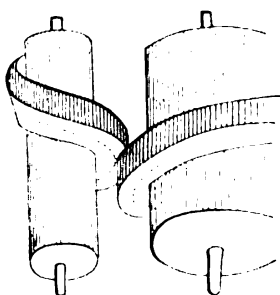


Fig. 135.

effet, si on fait tourner une surface hélicoïdale autour de son axe, son intersection par un plan fixe passant par l'axe reste invariable en grandeur, mais se déplace parallèlement à elle-même d'un mouvement uniforme. Tout se réduit donc dans ce plan fixe à un mouvement de translation uniforme.

Etant donnée une surface hélicoïdale, supposons qu'on lui imprime un mouvement hélicoïdal capable d'engendrer la surface ; nous pouvons décomposer ce mouvement en une rotation R et une translation T . Si nous imprimons à tout le système une rotation — R autour de l'axe du cylindre R , tout se réduit pour lui à une translation T . Supposons qu'à un instant donné les deux roues munies de profils hélicoïdaux soient en contact en B sur AA_1 et considérons les méridiennes des surfaces situées dans le plan déterminé par les deux axes OO_1 , $O'O_1'$. Imprimons une rotation aux deux roues, les deux méridiennes situées dans ce plan se déplacent parallèlement à l'axe. On peut choisir le pas de chaque surface de telle sorte que le mouvement de translation soit le même dans les deux surfaces. Alors si en B les deux méridiennes situées dans le plan OO_1 , $O'O_1'$ sont en contact, elles y seront encore au bout d'un temps quelconque en un autre point B' de AA_1' . Les deux roues restent en contact, en un point qui se déplace le long de la génératrice AA_1 .

Déterminons le rapport des pas des deux surfaces hélicoïdales pour que le contact soit continu.

Lorsque R aura tourné de 2π , la méridienne de la surface invariablement liée à R , qui se trouve dans le plan OO_1 , $O'O_1'$ se

sera déplacée parallèlement à l'axe, de la longueur du pas h de la surface profil de la roue R . Soit V la vitesse de translation et ω la vitesse de rotation ; V sera donnée par la relation

$$\frac{V}{\omega} = \frac{h}{2\pi}.$$

En désignant par h' le pas de la surface hélicoïdale profil de la roue R' , on aura pour l'expression de la vitesse de translation V de la section méridienne $\frac{V}{\omega'} = \frac{h'}{2\pi}$, la vitesse V est la même pour R' et pour R puisque par hypothèse il y a contact continu. Divisons membre à membre les deux relations ainsi trouvées, on a

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{h'}{h},$$

d'où

$$\omega h = \omega' h',$$

et comme d'autre part

$$\omega \cdot OA = \omega' \cdot O'A$$

il vient :

$$\frac{h}{OA} = \frac{h'}{O'A}.$$

Ces engrenages hélicoïdaux ont été inventés par Hooke en 1674, et retrouvés de nos jours par White. White a pris pour l'une de ses roues une vis à filet triangulaire et pour l'autre un profil de vis à filet carré (fig. 136). Le contact a lieu en un des sommets du rectangle qui engendre la surface de vis à filet carré. Le contact n'ayant lieu que par un point, les engrenages hélicoïdaux ne sauraient, sans s'user très rapidement, transmettre des efforts considérables. Ils ont été employés avec succès pour faire tourner des axes avec une très grande vitesse, en les adaptant à des appareils très légers.

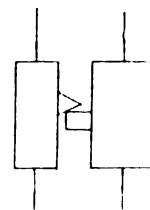


Fig. 136.

LES AXES SONT CONCOURANTS

Lorsque les axes de rotation concourent, le problème de la transformation d'un mouvement circulaire continu en un autre mouvement circulaire continu peut être résolu au moyen des engrenages coniques et du joint universel de Cardan.

Engrenages coniques. — L'engrenage conique se compose de deux roues R et R' (fig. 137) constamment en contact qui tournent

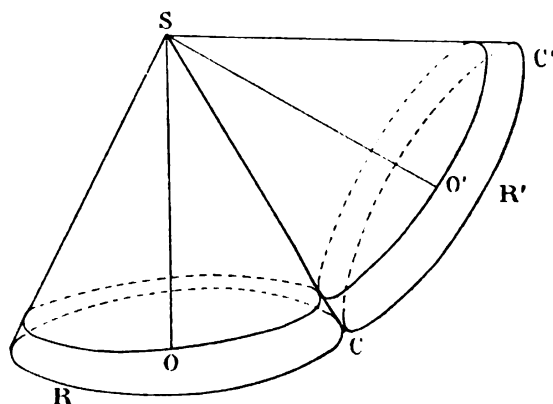


Fig. 137.

uniformément avec les vitesses angulaires respectives ω et ω' autour des axes concourants.

$S\omega$ représente la rotation de la roue R (fig. 138) et $S\omega'$ celle de la roue R'.

Mouvement relatif de R'. — Pour obtenir le mouvement de R' par rapport à R, imprimons à tout le système une rotation $-\omega$. Cette rotation est représentée par le segment de droite $\overline{S-\omega}$ égal et opposé à $S\omega$. Le mouvement relatif n'est pas modifié par cette rotation fictive qui rend fixe la roue R. La roue R' est alors animée de deux rotations concourantes $S\omega'$ et $\overline{S-\omega}$ qui admettent pour résultante la rotation SD (fig. 138).

Cette rotation SD constitue le mouvement relatif de R' par rapport à R ; elle est définie par la diagonale du parallélogramme construit sur $\overline{S\omega'}$ et $\overline{S-\omega}$.

Cônes primitifs. — En faisant tourner SD autour de $S\omega$ on obtient le cône de révolution C . En faisant tourner SD autour de $S\omega'$ on obtient le cône de révolution C' . Ces deux cônes prennent le nom de *cônes primitifs*, ils sont tangents le long de SD ; le mouvement de C' par rapport à C est une rotation instantanée autour de SD ; il se ramène par suite au roulement du cône C' sur le cône C . Le mouvement relatif cherché est donc un mouvement épicycloïdal sphérique.

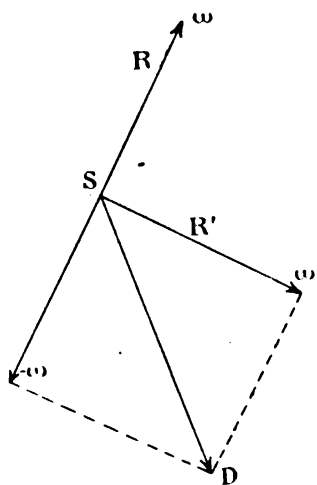


Fig. 138.

Forme des dents. — On donne aux dents la forme de surfaces coniques ayant pour sommet commun le point S , le contact a lieu tout le long d'une génératrice.

Cherchons quelle doit être la forme des dents, pour que la vitesse étant uniforme, il y ait toujours contact entre deux paires de dents. Du point S comme centre avec un rayon arbitraire, décrivons une sphère et cherchons son intersection avec les dents, c'est-à-dire le *profil sphérique des dents*.

Supposons donné le profil sphérique d'une dent d' de la roue R' . Pour un observateur invariablement lié à la roue R , celle-ci est immobile, et la roue R' semble tourner sur R ; l'enveloppe de la dent d' dans ce mouvement est le profil de la dent d de R .

Dans la pratique on ramène la construction du profil sphérique à la construction du profil plan. Au point A de rencontre de l'axe SD (fig. 139) avec la sphère, menons la tangente à la sphère dans le plan SA . Cette tangente coupe $S\omega$ en O , $S\omega'$ en O' .

En faisant tourner OA autour de SO on obtient un cône de révolution K , un second cône de révolution K' est engendré par la révolution de $O'A$ autour de SO' .

Au point A , menons le plan tangent à la sphère, il est aussi tangent aux cônes K et K' car il passe par une génératrice OA , $O'A'$ de chacun de ces cônes et il est perpendiculaire au plan méridien correspondant qui est le plan SOO' :

Au lieu de limiter les dents des roues R et R' à la sphère, limitons celles de R au cône K et celles de R' au cône K' et construisons l'intersection des dents avec ces cônes.

En développant le cône K sur un plan tangent on obtient le développement sur ce plan du profil des dents. Si alors on fait rouler le cône K sur ce plan, les différentes parties du profil

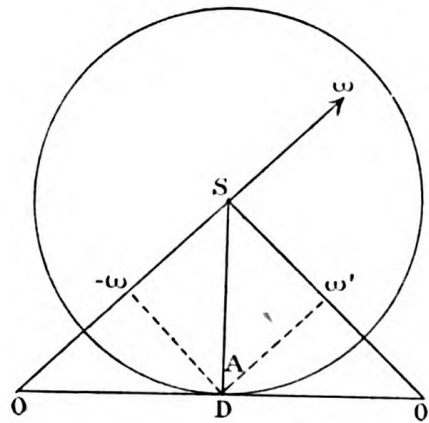


Fig. 139.

développé viendront s'appliquer sur les parties correspondantes du profil sur le cône.

Or quand un cône roule sur un plan, la vitesse relative des points situés sur la génératrice de contact du cône et du plan est nulle, car cette génératrice est l'axe de rotation instantané; si le plan et le cône sont mobiles à la fois, la vitesse absolue sera la même pour tous les points de la génératrice de contact considérée comme appartenant, soit au cône, soit au plan.

Supposons le sommet S fixe pour le plan et le cône. Soit A un point de la génératrice de contact et supposons la vitesse relative de ce point nulle, il en sera de même de tous les points de SA puisque deux de ses points sont fixes dans le mouvement relatif à un instant donné. La droite SA est donc à cet instant, l'axe instantané de rotation dans le mouvement relatif. Il y a roulement du cône sur le plan.

Considérons alors le plan P tangent à la sphère en A , il passe par oo' et il est tangent aux deux cônes de révolution K et K' . Le développement de K donnera pour le développement de son

intersection avec les dents de R une figure F, le développement de K' donnera une figure F'.

Le point A considéré comme appartenant à K a une vitesse linéaire, due à la rotation $S\omega'$; considéré comme appartenant à K', sa vitesse est due à la rotation $S\omega$. Ces deux vitesses sont égales et de même sens puisque A est sur SD qui est l'axe de rotation dans le mouvement relatif des deux roues R et R'.

Imaginons que dans le plan P on fasse tourner les deux figures F et F', la première autour de O, la seconde autour de O' et avec des vitesses telles que la vitesse linéaire du point A regardé comme appartenant à ces deux figures soit encore la même que lorsqu'il appartenait aux cônes K et K'. La vitesse absolue du point A, étant la même dans ces quatre mouvements, il en résulte :

1° Que la figure F roule sur le cône K de telle sorte que les diverses parties du développement viennent s'appliquer successivement sur les parties correspondantes du profil conique;

2° Que la figure F' roule de même sur le cône K';

3° Que si dans le plan P on décrit deux circonférences tangentes entre elles au point A et ayant leurs centres en O et en O', puis qu'on regarde la première de ces circonférences comme appartenant à la figure F' et la seconde à la figure F, ces deux circonférences rouleront l'une sur l'autre. En d'autres termes le mouvement relatif de F' par rapport à F est épicycloïdal.

Les dents sont toujours assez petites, de sorte que le point de contact ne s'éloigne jamais beaucoup du point A et dans le voisinage les profils sphériques diffèrent fort peu des profils coniques et ceux-ci de leur développement.

On peut donc, puisque les profils sphériques doivent rester constamment tangents, supposer que les développements des profils coniques qui en diffèrent très peu, c'est-à-dire les figures F et F' se touchent constamment.

Les figures F et F' devront être constamment tangentes et animées, dans leur plan de mouvements de rotation uniformes. On est ainsi ramené à la construction d'un engrenage plan.

Cet engrenage construit on enroulera les figures F et F' sur les cônes K et K', on aura ainsi sur ces cônes les profils des dents coniques de sommet S qui doivent constituer l'engrenage.

Joint universel, joint de cardan ou joint hollandais. — Le joint de Cardan, employé surtout pour la transformation des mouvements lents, se compose d'un croisillon dont les branches BB' , CC' (fig. 140) sont à angle droit ; les axes de rotation OA , $O'A'$, sont

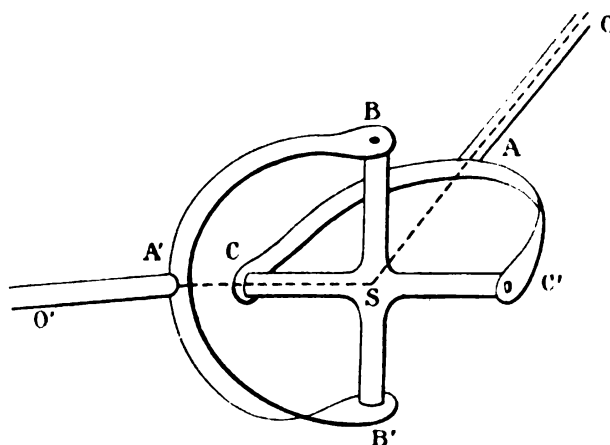


Fig. 140.

invariablement liés aux fourches CAC' , $BA'B'$, articulées aux extrémités des bras opposés du croisillon.

Le centre du croisillon S coïncide avec le point de concours des deux axes. On peut faire varier à volonté l'angle des axes ; toutefois on ne doit pas employer ce joint lorsque l'angle formé par les deux axes est inférieur à 135° .

Rapport des vitesses de rotation des deux axes. — Le rapport des vitesses de rotation des deux axes n'est pas constant.

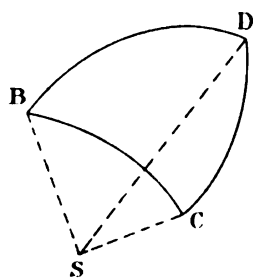


Fig. 141.

Pour calculer ce rapport, décrivons une sphère ayant pour centre le point fixe S (fig. 141) et pour rayon CS .

Soient DC , DB les traces sur la sphère des plans décrits par les bras SC et SB , respectivement perpendiculaires aux axes O et O' dont ils sont solidaires.

L'angle BDC est le supplément de l'angle des axes, dont nous désignerons la mesure par $\pi - \varphi$, comme rectiligne du dièdre formé par les plans SBD , SDC perpendiculaires aux axes, par suite $\widehat{BDC} = \varphi$; d'autre part l'angle $\widehat{BSC}$ est droit.

En prenant le rayon de la sphère pour unité, l'arc BC est égal à $\frac{\pi}{2}$. Posons $BD = \omega$, et $DC = \omega'$.

La formule de trigonométrie sphérique

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

appliquée au triangle BDC donne

$$0 = \cos \omega \cos \omega' + \sin \omega \sin \omega' \cos \varphi.$$

ou

$$(1) \quad \operatorname{tg} \omega \cdot \operatorname{tg} \omega' = -\frac{1}{\cos \varphi};$$

on obtient une relation entre les vitesses angulaires $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d\omega'}{dt}$ des deux axes en prenant les différentielles logarithmiques de l'équation (1) ce qui donne :

$$d\omega \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \omega)}{\operatorname{tg} \omega} + d\omega' \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \omega'}{\operatorname{tg} \omega'} = 0.$$

Or d'après (1) :

$$\operatorname{tg} \omega' = -\frac{1}{\cos \varphi \operatorname{tg} \omega},$$

donc

$$d\omega \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \omega}{\operatorname{tg} \omega} - \frac{d\omega' \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \omega}\right)}{\frac{1}{\cos \varphi \operatorname{tg} \omega}} = 0$$

toutes réductions faites il vient :

$$\frac{d\omega}{d\omega'} = \frac{1 - \sin^2 \omega \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$$

Ce rapport est une fonction de l'angle ω ; lorsque ω varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$ le rapport $\frac{d\omega}{d\omega'}$ varie de $\frac{1}{\cos \varphi}$ à $\cos \varphi$.

Si on fait $\varphi = 45^\circ$, c'est-à-dire si l'angle des axes est égal à

la limite 135° , le rapport des vitesses varie de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à $\sqrt{2}$, c'est-à-dire du simple au double.

TROISIÈME CAS. Les axes ne sont pas dans un même plan. — Dans le cas où les deux axes ne sont pas dans un même plan on peut introduire un axe auxiliaire rencontrant les deux premiers et employer deux systèmes d'engrenages coniques ; on peut encore employer des courroies de transmission ou faire la transformation directe par des engrenages hyperboliques.

Engrenages hyperboliques. — Soient AB, A'B' (fig. 142) les axes des roues R et R'. Etudions le mouvement de R' par rap-

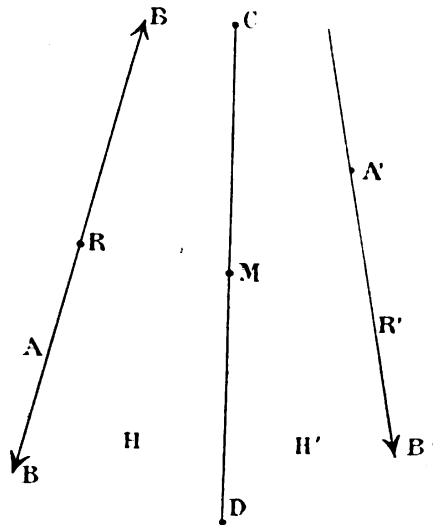


Fig. 142.

port à R. Pour cela imprimons à tout le système un mouvement de rotation égal et opposé au mouvement qui s'effectue autour de AB. Ce nouveau mouvement ne change pas le mouvement relatif. La roue R se trouve au repos ; la roue R' est soumise à deux rotations qui, n'étant pas dans un même plan, ne peuvent se composer en une autre.

Mais on peut les remplacer par un mouvement hélicoïdal instantané.

Soit CD l'axe instantané de rotation et de glissement dans le mouvement hélicoïdal résultant.

Si on fait tourner CD autour de AB , on engendre un hyperboloïde H , en faisant tourner CD autour de $A'B'$ on engendre un hyperboloïde H' .

Les deux hyperboloïdes H et H' sont les hyperboloïdes primitifs ; ils sont tangents : en effet, les droites AB , $A'B'$ sont deux droites conjuguées. Donc toute normale à la trajectoire d'un point de AB rencontre $A'B'$; considérons un point M sur CD et

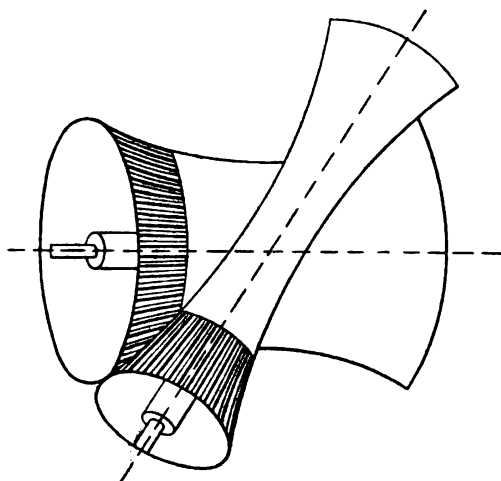


Fig. 143.

menons la normale en ce point à l'hyperboloïde H , cette droite est perpendiculaire à CD , de plus elle rencontre AB ; or les droites AB , CD , $A'B'$ sont sur un paraboloides dont le plan directeur est perpendiculaire à CD puisque CD est l'axe instantané du mouvement hélicoïdal ; les points situés sur CD ont pour trajectoire cette droite, la normale à la trajectoire de ces points qui rencontre la droite AB doit rencontrer sa conjuguée $A'B'$; donc la normale à l'hyperboloïde H au point M de CD , rencontre AB et $A'B'$. Mais CD est une génératrice de l'hyperboloïde H' , la droite considérée est normale à cette génératrice et passe par l'axe, donc elle est normale à la surface.

Ainsi les deux hyperboloïdes H et H' ont en un point quelconque M de leur génératrice commune CD , une normale commune. Ces deux hyperboloïdes sont donc tangents.

Forme des dents. — Pour trouver la forme des dents on peut appliquer la construction générale. On se contente ordinairement de stries tracées le long des génératrices (fig. 143).

Dans les engrenages hyperboliques il n'y a pas roulement, mais glissement, car le mouvement relatif ne se réduit pas à une rotation instantanée mais à un mouvement hélicoïdal.

Vis sans fin. — Dans le cas particulier, où les axes de rotation ne se rencontrent pas, mais forment un angle droit, on emploie pour la transmission du mouvement la vis sans fin.

Génération théorique d'une vis. — Traçons une hélice de pas h sur le cylindre circulaire droit qui doit constituer le *noyau* de la vis

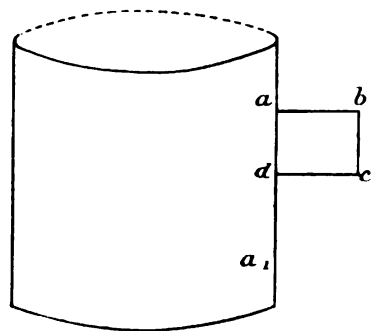


Fig. 144.

(fig. 144). Construisons un rectangle $abcd$ dont le plan passe par l'axe du cylindre et dont le côté ad , plus petit que $\frac{h}{2}$ est disposé suivant une génératrice. Si l'on déplace le rectangle, de manière que l'un de ses sommets décrive l'hélice, il engendre la vis à *filet carré*; les côtés ab , cd engendrent des hélicoïdes réglés à plan directeur; les côtés ad , bc engendrent deux

cylindres concentriques qui limitent la vis.

Pour obtenir la vis à filet triangulaire on prend comme figure génératrice un triangle isocèle dont la base est placée le long de la génératrice. La section méridienne du filet est alors formée par une suite de triangles isocèles égaux.

On construit aussi des vis à plusieurs filets carrés : pour cela partageons le pas aa_1 en deux parties égales aa' , $a'a_1$ et construisons les rectangles égaux $abcd$, $a'b'c'd'$ de façon que l'on ait

$$ad = a_1 d' < \frac{aa'}{2}$$

L'ensemble des deux rectangles constitue le profil générateur de la vis (fig. 145).

Tous les systèmes de vis jouissent d'une propriété commune.

Si on fait tourner une vis d'un mouvement uniforme autour de son axe, son intersection par un plan invariable passant par l'axe reste toujours égale à elle-même et est animée d'un mouvement uniforme parallèlement à l'axe de la vis.

Vis sans fin. — Le mécanisme complet se compose d'une vis à filet carré et d'une roue dentée dont les axes sont rectangulaires; la roue dentée et la vis se touchent en un point situé dans le plan passant par l'axe de la vis qui est perpendiculaire à l'axe de la roue et qu'on appelle *plan méridien*. Lorsque la vis tourne, son profil situé dans le plan méridien avance d'un mouvement uniforme, tout se passe donc comme si la roue engrenait avec une crémaillère.

D'après la théorie de la crémaillère il faut donner aux dents de la roue la forme de développantes de cercle. Il ne suffit pas

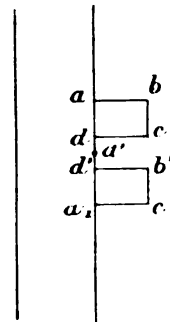


Fig. 145.

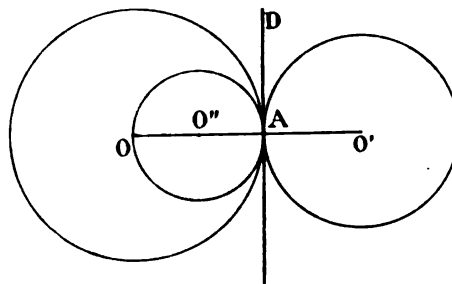


Fig. 146.

que les intersections par le plan méridien de la vis et de la roue se touchent, il faut encore qu'au point de contact les deux surfaces aient même plan tangent; il faut donc chercher le plan tangent à la surface de la vis au point de contact. Dans le cas des engrenages extérieurs le point de contact du flanc de la roue O avec la face de la roue O', se trouve sur la circonférence O'' décrite sur OA comme diamètre (fig. 146).

Dans le cas de la crémaillère, les circonférence O et O' se réduisent à la tangente AD et à la circonférence O'. Le point de contact est sur la droite AD, droite primitive de la crémaillère.

Le point de contact se trouve donc, dans la vis sans fin, sur la droite primitive de la crémaillère fictive (fig. 146).

Soit M (fig. 147) le point de contact, cherchons le plan tangent en ce point, ce plan passe par la droite MP , perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe AB du cylindre, car cette droite

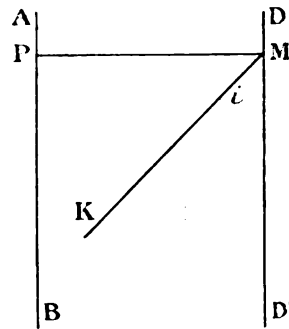


Fig. 147.

est une génératrice de la surface de la vis, il contient aussi la tangente à l'hélice qui passe par le point M ; cette tangente MK est perpendiculaire à MP . L'angle du plan tangent PMK avec le plan méridien du cylindre est donc égal à l'angle de la génératrice du cylindre et de MK . On sait que cet angle est constant, donc le plan tangent fait toujours le même angle avec l'axe de la vis.

Si on appelle i cet angle, r le rayon PM (fig. 148) du cylindre sur lequel est tracée l'hélice qui passe par M , h le pas de cette hélice, on a :

$$\operatorname{tg} i = \frac{2\pi r}{h}$$

Le plan tangent à la surface de vis fait donc un angle constant avec le plan méridien qui passe par le point de contact.

Il faut par suite construire la dent de la roue de telle sorte que la section médiane, dans laquelle est le point de contact, ait des profils à développante de cercle et que le plan tangent fasse avec le plan médian un angle constant.

La surface de cette dent devra donc être une hélicoïde développable.

En effet l'hélicoïde développable est la surface engendrée par une droite MT (fig. 148) qui reste constamment tangente à une hélice. Le plan tangent à cette surface est le plan osculateur à l'hélice, il fait par suite un angle constant. La première condition se trouve donc remplie ; reste à montrer que la section de cette surface par un plan perpendiculaire à l'axe est une développante de cercle.

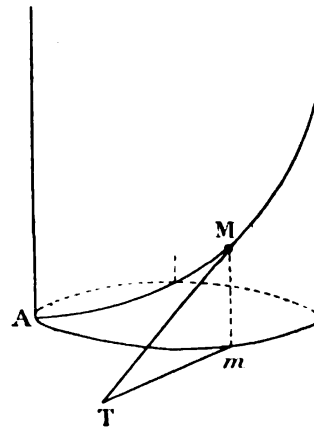


Fig. 148.

Considérons en effet le plan de la section droite du cylindre qui passe par les points A et T.

Le point T est un point de la surface ; la sous-tangente mT en un point de l'hélice est égale à l'arc de cercle mA, donc le lieu du point T dans un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre est une développante de cercle ; il en est ainsi en particulier dans le plan médian de la roue perpendiculaire à l'axe du cylindre.

Pratiquement on remplace souvent l'hélicoïde développable par un cylindre incliné d'un certain angle sur l'axe de la roue.

On complète le système en donnant à la crémaillère des faces cycloïdales et des flancs à la roue. Le contact a alors lieu de part et d'autre de la ligne des centres.

Vitesses de rotation. — Soient ω la vitesse de rotation de la roue et ω' celle de la vis ; n le nombre des dents de la roue et n' celui des filets de la vis.

La roue et la crémaillère fictive avancent simultanément d'une dent.

Par tour la roue a avancé de n dents et la vis d'un pas h. Comme la vis a n' filets, la distance de deux de ces filets est $\frac{h}{n'}$, c'est le pas de la crémaillère fictive correspondante ; lorsque la vis fait un tour, la crémaillère fictive avance donc de n' dents.

Or pendant un temps donné le nombre des dents qui passent au contact doit être le même, on doit donc avoir :

$$\omega n = \omega' n'.$$

On peut prendre $n' = 1$, dans ce cas l'angle que nous avons appelé i est presque égal à 90° , l'engrenage n'est pas réversible.

Au contraire si l'effort à transmettre n'est pas considérable, on peut prendre i très petit et n' très grand ; dans ce cas l'engrenage est réversible.

REMARQUE. — On construit aussi des vis sans fin qui touchent la roue tout le long d'une ligne.

II. Transformation d'un mouvement circulaire continu en rectiligne continu. — Les différents appareils qui servent à cette transformation sont la crémaillère, dont la théorie a été exposée (p. 152), puis le treuil et la vis, dont l'étude appartient au cours élémentaire.

III. Transformation du mouvement circulaire continu en rectiligne alternatif. — Cette transformation se fait ordinairement à l'aide de la bielle à manivelle.

Une tige rigide AB (fig. 149) appelée *bielle* s'articule, en A avec le bouton d'un bras OA tournant autour de O et appelé *manivelle*.

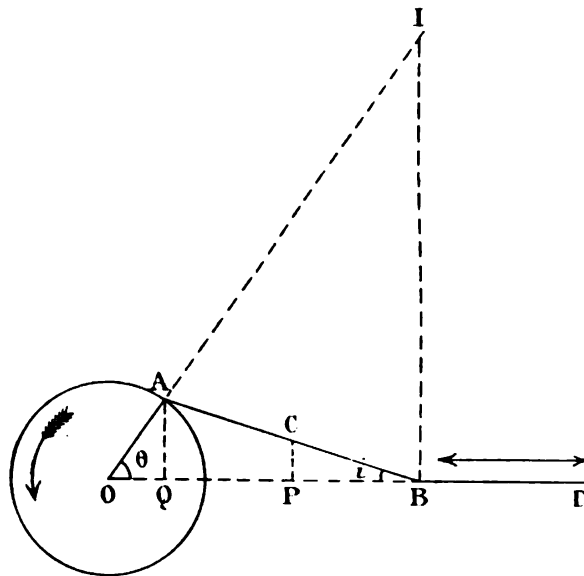


Fig. 149.

velle, et en B avec une pièce BD assujettie par des glissières à prendre un mouvement rectiligne.

Centre instantané de la bielle. — Le point A décrit une circonférence de centre O, le centre instantané est donc sur la normale à la trajectoire de ce point, c'est-à-dire sur le prolongement de OA. Il est d'ailleurs sur la perpendiculaire en B à la droite BD qui est le lieu de l'autre extrémité B. Le centre instantané de la bielle est par suite à l'intersection I de ces deux lignes.

Lorsque la manivelle OA est verticale le point I est à l'infini,

et la rotation instantanée est remplacée par une translation instantanée.

Loi du mouvement. — Soient R la longueur de la manivelle oA , L celle de la bielle AB et ε le rapport $\frac{R}{L}$ de ces deux longueurs. Comme ce rapport n'est jamais plus grand que $\frac{1}{4}$ on peut en négliger les puissances à partir d'un degré qui dépend des cas examinés.

Soient θ l'angle de oA avec oB , i l'angle de AB avec BO on a :

$$OB = R \cos \theta + L \cos i.$$

D'autre part :

$$\frac{\sin i}{\sin \theta} = \frac{R}{L} = \varepsilon$$

donc

$$\sin i = \varepsilon \sin \theta \quad \text{et} \quad \cos i = \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta}$$

ou en développant :

$$\cos i = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2 \theta + \frac{\varepsilon^4}{8} \sin^4 \theta \dots$$

En négligeant les termes à partir de ε^4 il vient :

$$OB = R \cos \theta + L - L \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2 \theta$$

ou :

$$OB = L + R \left[\cos \theta - \frac{\varepsilon}{2} \sin^2 \theta \right]$$

Telle est la loi du mouvement du point B .

Trajectoire approximative d'un point de la bielle. — Cherchons la trajectoire d'un point C de la bielle en négligeant ε , soit :

$$\frac{CP}{AQ} = \frac{BC}{AB} = h ;$$

on a :

$$y = CP = h \cdot AQ$$

or

$$AQ = R \sin \theta$$

done

$$(1) \quad y = Rh. \sin \theta.$$

D'ailleurs

$$OP = x = OB - PB = L + R \cos \theta - PB,$$

ou en remplaçant BP par BC

$$(2) \quad x = L(1 - h) + R \cos \theta.$$

le lieu décrit par le point C est donc une ellipse au degré d'approximation adopté.

Cas particulier. — Si l'on prend le point C à une distance de B

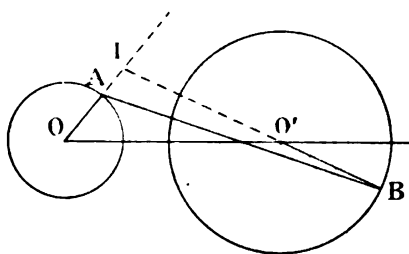


Fig. 150.

égale à AB on a $h = -1$ et l'ellipse se réduit à une circonférence.

Cette disposition est employée à la transformation du mouvement circulaire continu en mouvement circulaire alternatif. — Soit $o'B$ le balancier (fig. 150), et oA la manivelle ; les points A et B sont réunis par une tige articulée AB. Le centre instantané est en I, point de rencontre de BO' et de AO , normales aux trajectoires des points A et B.

Excentrique circulaire. — Ce mécanisme se compose d'un plateau circulaire monté perpendiculairement à un axe qui ne passe pas par son centre. Le plateau est entouré d'un anneau ou bague qui est relié à l'extrémité de la tige par des barres.

Soit O l'axe, A le centre (fig. 151), le plateau ayant une forme

et des dimensions fixes, et étant d'ailleurs relié au point B par des barres rigides, on peut supposer les points O et A d'une part et A et B d'autre part, invariablement liés, par suite tout se passe comme si on avait en oA une manivelle et en AB une bielle.

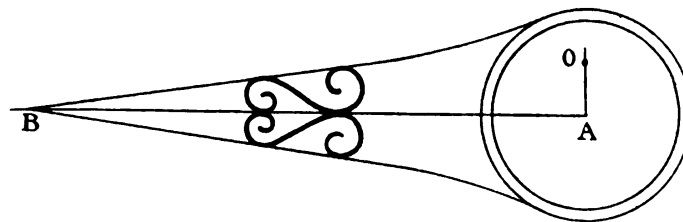


Fig. 151.

Dans l'excentrique le frottement est plus considérable que dans le système bielle et manivelle. On l'emploie lorsque l'excentricité est trop petite pour qu'il soit possible d'utiliser la manivelle.

D'ailleurs la manivelle ne peut pas être montée en un point quelconque de l'arbre, il faut qu'elle soit à l'extrémité, à moins

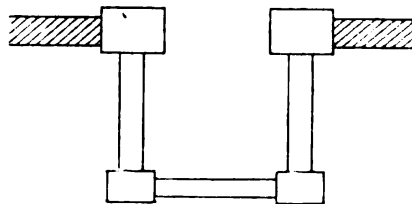


Fig. 152.

qu'on emploie un *axe coudé* (fig. 152) ce qui complique la construction.

L'excentrique au contraire s'adapte en un point quelconque de l'axe. Dans les machines à vapeur on se sert de la bielle à manivelle pour les effets principaux, comme la transformation du mouvement du piston en mouvement circulaire; l'excentrique sert aux mouvements qui n'exigent pas d'effort, comme le mouvement du tiroir.

Excentrique à came. — Dans les excentriques à cames le plateau d'excentrique a une forme qui dépend de la loi du mouvement qu'il faut réaliser. La tige se meut par l'intermédiaire d'une roulette qui lui est invariablement fixée (fig. 153) et qu'un

ressort pousse constamment sur la came. La tige porte parfois deux roulettes qui pressent l'une sur la partie supérieure du plateau, l'autre sur la partie inférieure.

Soit $\rho = f(\theta)$ l'équation en coordonnées polaires du profil de la came, la trace de l'axe de rotation sur le plateau étant prise pour pôle.

Le chemin parcouru par la tige est mesuré par la distance ρ de la roulette au centre de rotation (fig. 153). Si le mouvement de rotation est uniforme, on a :

$$\theta = \omega t$$

et

$$\rho = f(\omega t).$$

On peut donc théoriquement réaliser un mouvement quelconque.

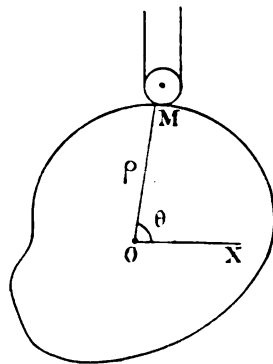


Fig. 153.

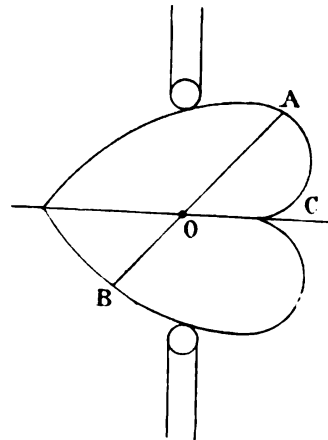


Fig. 154.

Excentrique à cœur. — Le plus usité est l'excentrique à cœur.

En posant

$$\rho = a + b\theta \text{ de } 0 \text{ à } \pi$$

et

$$\rho = a - b\theta \text{ de } 0 \text{ à } -\pi$$

on obtient comme profil deux portions de spirale d'Archimède, symétriques par rapport à l'axe polaire et constituant par leur ensemble une courbe en forme de cœur (fig. 154). Comme ρ est une fonction linéaire de θ , le mouvement alternatif de la tige

sera uniforme si le mouvement de rotation de l'excentrique est lui-même uniforme. Cet excentrique jouit d'une propriété remarquable :

Par le point O menons une sécante AB, nous avons :

$$OA = a + b\theta$$

$$OB = a - b(\theta - \pi),$$

ajoutant membre à membre, il vient :

$$AB = 2a + b\pi,$$

c'est une constante, et les deux roulettes dont la distance est :

$$2a + b\pi$$

sont toujours en contact avec l'excentrique.

Lorsque la roulette passe en C, il y a un changement brusque de vitesse qui produit un choc et par suite une dépense de force vive qui détruit peu à peu le mécanisme; c'est pourquoi on arrondit quelquefois les extrémités.

Excentrique à cadre. — Dans l'excentrique à cadre, la came

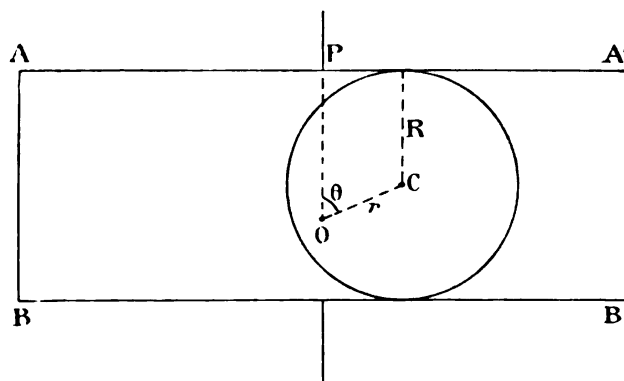


Fig. 155.

agit sur un châssis ou cadre rectangulaire AA' BB' (fig. 155), qui est tangent à la came.

Prenons un plateau circulaire de rayon R comme came.

Cherchons la loi du mouvement. Le point O est fixe et $OC = r$.

La position de la barre AA' est donc déterminée par la distance OP , on a :

$$OP = r \cos \theta + R,$$

Le mouvement transmis à la tige est donc rigoureusement sinusoïdal.

Excentrique triangulaire. — L'excentrique triangulaire sert à produire un mouvement rectiligne (fig. 156), alternatif et intermittent.

On détermine la came en décrivant des trois sommets d'un triangle équilatéral ABC des arcs de cercle ayant pour rayon

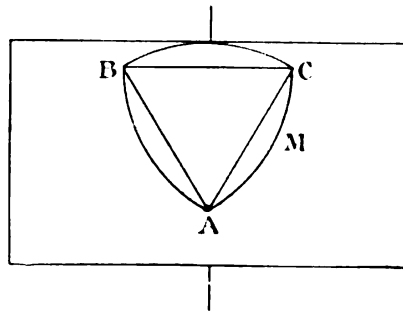


Fig. 156.

le côté du triangle. On obtient ainsi un triangle équilatéral curviligne.

Cet excentrique tourne autour du sommet A . Il faut distinguer trois cas, suivant que le côté supérieur du cadre dans lequel roule la came est tangent au côté BC , au côté AC ou au côté AB .

Si le cadre est tangent le long de BC , la tige reste stationnaire, pendant que l'arc BC tourne autour de son centre A .

Pendant que le cadre est tangent en un point quelconque M de AC ou de AB , le mouvement est identique à celui que produirait l'excentrique circulaire à cadre; le mouvement est donc sinusoïdal.

Lorsque l'excentrique décrit un tour complet, le mouvement se décompose en six phases : deux où le cadre reste immobile, deux où il va dans un sens et deux où il va dans l'autre.

Dans certains cas, on arrondit les angles. On se sert quel-

quefois de ces excentriques pour la distribution de la vapeur dans certaines machines d'un type particulier. Comme tous les excentriques développent un frottement considérable, on ne s'en sert que pour transmettre de faibles efforts et dans le cas des mouvements lents.

COULISSE DE STEPHENSON

La coulisse imaginée par Stephenson, au début de la découverte des machines à vapeur, a immédiatement donné les résul-

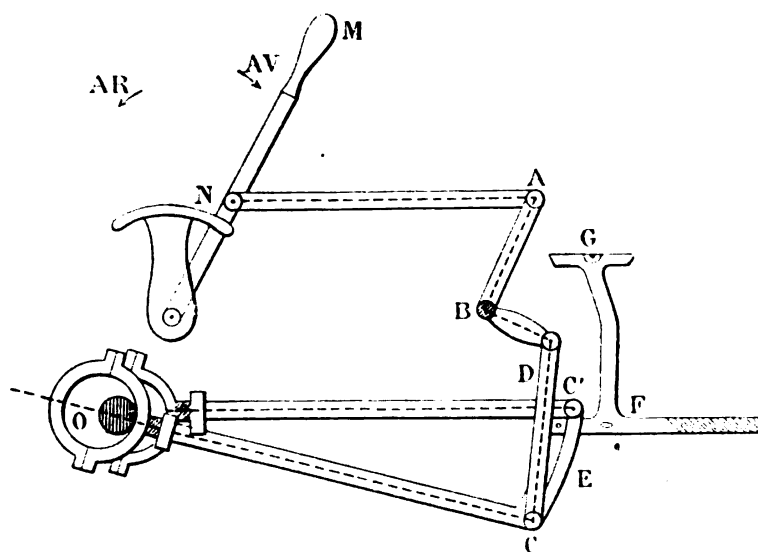


Fig. 157.

tats espérés et a toujours été le mécanisme le plus employé pour la distribution de la vapeur dans les locomotives.

Elle permet : 1° de modifier à volonté le sens de marche de la machine ; 2° de changer la marche *avec détente*, en marche à *pleine pression* et inversement.

L'appareil se compose d'une coulisse circulaire CC' (fig. 157) articulée à ses extrémités avec deux bielles mues par deux excentriques calés en sens inverse sur l'essieu des roues motrices. Dans la coulisse peut glisser un coulisseau E (en C' sur la figure) auquel est articulée la tige du tiroir ; enfin, un levier coudé

ABD, dont le sommet est fixe, est articulé par une barre rigide DC à la coulisse et est relié par une autre barre rigide AN à une poignée M manœuvrée par le mécanicien.

En déplaçant la poignée M, on peut abaisser ou élever la coulisse CC'; la poignée M ayant une position fixe, le levier ABD est fixe, le point C de la coulisse est alors assujéti à décrire une circonférence ayant pour centre le point D; CD est la *bielle de relevage*.

Centre instantané de la coulisse. — Cherchons le centre instantané de rotation de la coulisse. Soit O l'axe commun aux

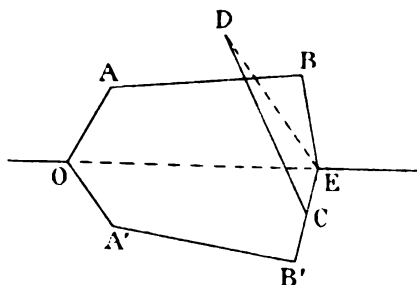


Fig. 158.

deux plateaux d'excentriques, dont les centres sont en A et A' (fig. 158). Soient AB, A'B' les deux barres et C le point d'articulation de la bielle de relevage CD, dont le point D est fixe pendant le mouvement, la tige du tiroir vient s'adapter au coulisseau en E et son prolongement passe par le point O.

Le point C décrivant une circonférence de centre D (fig. 157), le centre instantané I demandé se trouve sur CD. Pour le déterminer complètement, cherchons le centre instantané de AB; le point A décrivant un cercle de centre O, le centre instantané est sur OA (fig. 159); le point B, considéré comme appartenant à la coulisse, décrit un cercle ayant le point I pour centre; le centre instantané de AB est donc aussi sur la droite IB, il est en S. De même le centre instantané de A'B' est en S'.

Théorème de Philipps. — Le point de rencontre T des bielles des excentriques, le centre O de rotation des plateaux et le centre instantané I de la coulisse sont en ligne droite, ou encore le centre instantané I de la coulisse est à l'intersection des deux droites TO et DC.

Soient ω la vitesse angulaire instantanée de l'arbre O des excentriques, ω' celle de la coulisse, ω_1 et ω'_1 les vitesses angulaires de AB et de A'B' au même instant.

La vitesse du point A est d'une part $\omega.OA$; c'est d'ailleurs $\omega_1.AS$; par suite $\omega.OA = \omega_1.AS$.

On a de même pour le point B, $\omega_1.SB = \omega'.IB$, d'où :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{OA \times SB}{AS \times IB},$$

la seconde barre A'B' donne d'autre part :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{OA'.S'B'}{A'S'.IB'}.$$

En égalant les deux valeurs de $\frac{\omega'}{\omega}$, il vient :

$$(1) \quad \frac{OA.SB}{AS.IB} = \frac{OA'.S'B'}{A'S'.IB'}.$$

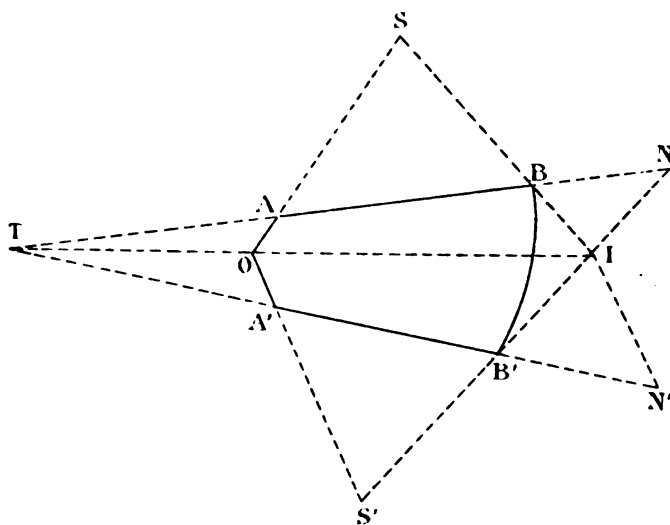


Fig. 159.

Menons IN parallèle à AO, IN' parallèle à A'O; on a

$$IN = \frac{AS.BI}{SB}.$$

et

$$IN' = \frac{A'S'.BI}{S'B'}.$$

D'ailleurs l'équation (1) peut s'écrire

$$\frac{OA}{\frac{AS.BI}{SB}} = \frac{OA'}{\frac{A'S'.BI}{B'S'}}$$

on a donc d'après (2)

$$\frac{OA}{IN} = \frac{OA'}{IN'}.$$

Les trois droites IO, BA, B'A' sont par suite concourantes.

Autre démonstration du théorème de Philipps. — On peut se proposer de chercher le centre instantané relatif à une tige faisant partie d'un système articulé quelconque. La coulisse est un système à *liaison complète*, car la position d'un de ses points étant donnée, la position de toutes les parties du système se trouve déterminée. Le centre instantané de l'une quelconque des pièces est par suite entièrement défini.

Il n'en est plus de même dans le cas des systèmes à liaisons incomplètes. Dans ce cas le système pouvant prendre une infinité de mouvements, le centre instantané d'une tige du système n'est plus déterminé, il décrit un *lieu*.

THÉORÈME. — Le lieu du centre instantané d'une tige d'un système incomplet auquel il ne manque qu'une liaison est une droite.

Considérons une tige qui peut se mouvoir dans un *plan horizontal* et soit I le centre instantané qui correspond à un premier mouvement μ du système (fig. 160).

Soit I_1 le centre instantané qui correspond à la même tige dans le mouvement μ_1 .

Dans le mouvement μ_2 résultant des deux premiers, la vitesse d'un point est la somme géométrique des vitesses composantes.

Le mouvement résultant des deux rotations instantanées qui s'effectuent autour des axes verticaux I et I_1 , est une rotation dont l'axe est situé dans le plan des deux premiers, donc le point I_2 est sur la droite II_1 . Composons encore les deux rotations

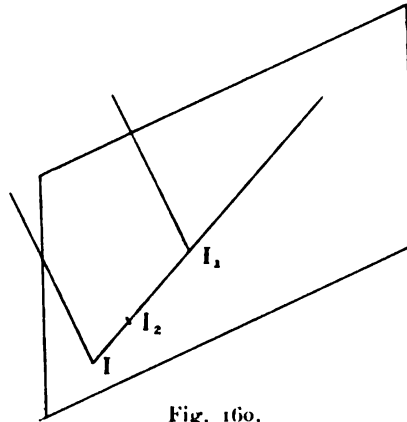


Fig. 160.

instantanées μ et μ_1 , mais en changeant les vitesses de rotation ; le mouvement résultant évidemment compatible avec les liaisons sera encore une rotation instantanée autour d'un axe passant par un point I_2 situé sur II_1 , mais n'occupant plus la même position que dans le cas précédent ; en faisant varier d'une

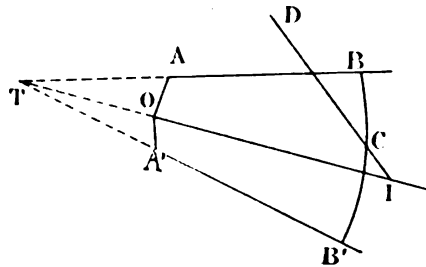


Fig. 161.

manière continue les vitesses de rotation, le point I_2 se déplace sur II_1 . Donc II_1 est le lieu du point I_2 . Dans le cas de la coulisse la bielle de relevage est un lieu du centre instantané. Si on coupe la bielle de relevage on obtient un système à liaison incomplète.

Cherchons quel est alors le lieu des centres instantanés :

Parmi les mouvements compatibles on a d'abord une rotation autour du point O , dans cette rotation le point O est le centre

instantané de la coulisse BB' (fig. 161). Supposons les points A et A' fixés et cherchons le centre instantané de la coulisse BB'. Le point B est sur un cercle décrit du point A comme centre, le centre instantané est donc sur BA, il est de même sur B'A', il est par suite à leur point de rencontre T.

Donc le lieu des centres instantanés est la droite TO. Si maintenant on rétablit la liaison, le centre instantané sera en un point particulier de cette droite.

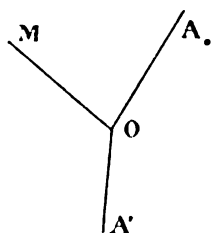


Fig. 162.

REMARQUE. — Dans la pratique on prend :

$$OA = OA' \quad \text{et} \quad AB = A'B'.$$

Soit maintenant OM la manivelle du piston qui communique le mouvement à l'arbre, on a (fig. 162)

$$\widehat{AOM} = \widehat{A'OM} > \frac{\pi}{2}$$

on pose

$$\widehat{AOM} = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

α est appelé l'angle de calage.

Étude analytique de la coulisse de Stephenson. — Supposons la distribution de la vapeur commandée par un seul excentrique.

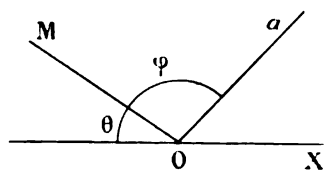


Fig. 163.

Soient O l'axe de rotation (fig. 163), $OM = R$ le rayon de la manivelle par l'intermédiaire de laquelle le piston commande l'arbre, a le centre du plateau d'excentrique. L'excentrique se comporte comme une manivelle de longueur $r = oa$ dont le bouton est en a.

Si la machine est horizontale, la tige du piston et celle du tiroir se meuvent horizontalement et parallèlement à OX. Comme l'excentrique et la manivelle sont montés sur le même axe, l'angle $Moa = \frac{\pi}{2} + \alpha$ est constant.

En désignant par θ et par φ les angles que forment OM et Oa avec OX on a :

$$\varphi - \theta = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

On appelle *élongation* du tiroir la quantité dont il s'écarte de sa position moyenne ; de même l'élongation du piston est la quantité dont le piston s'écarte de sa position moyenne.

En comptant positivement les segments suivant X'X vers la droite, l'élongation du piston est égale à la projection de OM sur OX, c'est-à-dire à :

$$-R \cos \theta.$$

L'élongation du tiroir sera de même :

$$-r \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} + \alpha \right) = r \sin (\theta + \alpha).$$

Cela posé, du point O comme centre, décrivons une circonférence de rayon R (fig. 164), c'est-à-dire la circonférence décrite par le bouton de la manivelle ; l'élongation du tiroir,

$$x = r \sin (\theta + \alpha)$$

est maximum lorsque $\sin (\theta + \alpha) = 1$, c'est-à-dire pour $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, le point M se trouve alors aux extrémités B, B' d'une droite faisant avec oA l'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Considérons deux points M et M' symétriques par rapport à BB'. En ces points $\sin (\theta + \alpha)$ a la même valeur, car les valeurs de $\theta + \alpha$ qui correspondent aux points M et M' sont supplémentaires. En ces points l'élongation du tiroir est donc la même.

Les points dont l'élongation est x sont symétriques par rapport à BB', et la droite MM' qui joint deux points symétriques vient couper le diamètre AA' en H et sous un angle α .

On a

$$\text{MOB} = \theta - \frac{\pi}{2} + \alpha = -\pi$$

donc

$$(1) \quad \text{OD} = R \cos \widehat{\text{MOD}} = -R \cos \varphi = \frac{xR}{r}.$$

L'angle $\text{DOH} = \alpha$, par suite

$$(2) \quad \text{OD} = \text{OH} \sin \alpha.$$

Des égalités (1) et (2) on tire

$$\text{OH} = \frac{xR}{r \sin \alpha}$$

Soient x_0 et x_1 les elongations relatives aux positions pour lesquelles la lumière commence à être ouverte, puis fermée par le

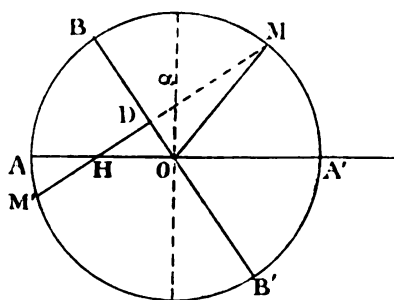


Fig. 164.

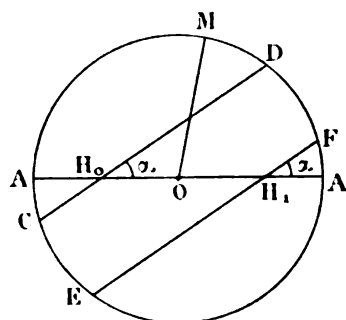


Fig. 165.

tiroir; x_0 sera le *recouvrement extérieur*, x_1 le *recouvrement intérieur*.

Pour $x > x_0$ il y a *admission*.

Si x est compris entre x_0 et $-x_1$ la lumière d'admission est ouverte, il y a *détente* ou *compression*.

Enfin pour $x < -x_1$ la lumière d'admission est démasquée, elle communique avec la lumière d'échappement, il y a *échappement*.

Prenons sur le diamètre horizontal AA' deux points H_0 et H_1 (fig. 165) tels que :

$$\text{OH}_0 = \frac{x_0 R}{r \sin \alpha}, \quad \text{OH}_1 = \frac{x_1 R}{r \sin \alpha};$$

par ces points H_0 et H_1 menons deux droites parallèles faisant avec AA' un angle égal à α . La droite CD correspond à l'elongation x_1 la parallèle EF correspond à l'elongation $-x_1$.

Nous avons trouvé pour l'elongation du piston $-R \cos \theta$, en comptant positivement les elongations de o vers A' . Supposons

que la demi-circonférence supérieure corresponde à la course d'aller du piston et la demi-circonférence inférieure à la course de retour; sa manivelle oM partira de la position oA . A l'aller lorsque le bouton M va de A en D , il y a admission;

De D en F , il y a détente, en F l'échappement commence;

De F en A' il y a échappement anticipé.

Pour la course de retour lorsque le bouton M va de A' en E il y a échappement continu, de E en C il y a compression, de C en A il y a admission anticipée.

Le diagramme (fig. 165) montre en même temps la durée de chacune de ces phases et le chemin parcouru par le bouton de la manivelle pendant chaque phase.

Par exemple, l'arc DF représente le temps de la détente, puisque le bouton de la manivelle décrit le cercle d'un mouvement uniforme.

Le chemin parcouru par le piston est la projection horizontale du chemin parcouru par le bouton M .

Il est facile maintenant de voir quelle est l'influence de la coulisse de Stephenson sur l'admission, la détente ou l'échappement de la vapeur.

Représentons les excentriques par leurs manivelles fictives.

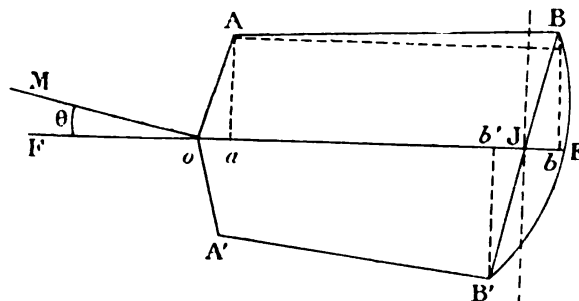


Fig. 166.

Soient o l'axe de rotation; A le centre du premier plateau d'excentrique; oA la première manivelle fictive; A' le centre du second plateau d'excentrique; oA' la seconde manivelle fictive; oM la manivelle motrice (fig. 166).

Les barres d'excentriques peuvent être remplacées par des bielles s'articulant au bouton de la manivelle fictive correspondante.

La coulisse est en BB' , elle est circulaire ; la tige du tiroir est fixée en E au coulisseau, elle est horizontale et son prolongement passe par o , il rencontre BB' au point J .

Soient $oA = oA' = r$; $AB = A'B' = l$; $\widehat{AoM} = \widehat{A'oM} = \frac{\pi}{2} + \alpha$.

Posons $BB' = 2c$, $BJ = c - u$; $B'J = c + u$ et conduisons le calcul, comme si c , u et r étaient des infiniment petits, r qui est le plus petit sera considéré comme du second ordre, les infiniment petits du troisième ordre seront négligés.

Ces hypothèses, que les dimensions de l'appareil autorisent, simplifient la théorie tout en conduisant à des résultats assez voisins de la réalité pour pouvoir être considérés comme pratiquement exacts. On a :

$$OE = OJ + JE.$$

Calcul de OJ. — Soient b et b' les projections de B et B' sur la droite OE . Le point J partage bb' dans le rapport $\frac{c - u}{c + u}$, ce qui s'exprime par l'équation :

$$(1) \quad OJ = ob. \frac{c + u}{2c} + ob' \frac{c - u}{2c}.$$

Evaluons ob et ob' : comme le point A se projette en a sur l'horizontale on a :

$$(2) \quad ob = oa + ab$$

mais $oa = r \sin (\theta + \alpha)$: en effet l'angle $\widehat{AoM} = \frac{\pi}{2} + \alpha$ et $\widehat{MoF} = \theta$ donc l'angle $\widehat{AoF}$ a pour mesure $\frac{\pi}{2} - (\theta + \alpha)$.
et

$$oa = r \sin (\theta + \alpha).$$

D'autre part

$$ab = \sqrt{l^2 - [Bb - Aa]^2}.$$

Dans l'expression :

$$[Bb - Aa]^2 = \overline{Bb}^2 - 2 Aa. Bb + \overline{Aa}^2$$

Bb est un infiniment petit du premier ordre, Aa est du second

ordre, d'où en négligeant les infiniment petits du troisième et du quatrième ordre :

$$[Bb - Aa]^2 = \overline{Bb}^2.$$

Désignons par ε l'angle infiniment petit que forme BB' avec la verticale, on a :

$$Bb = BJ \cos \varepsilon = (c - u) \cos \varepsilon.$$

Aux infiniment petits du second ordre près $\cos \varepsilon$ est égal à 1. Comme $(c - u)$ est infiniment petit en remplaçant $\cos \varepsilon$ par 1, on néglige seulement des infiniment petits du troisième ordre.

Aux infiniment petits du troisième ordre près on a donc :

$$ab = \sqrt{l^2 - (c - u)^2},$$

on

$$ab = l \sqrt{1 - \left(\frac{c - u}{l}\right)^2}.$$

En développant le radical suivant les puissances croissantes de $(c - u)$, il vient au degré d'approximation adopté.

$$ab = l - \frac{(c - u)^2}{2l}$$

d'où en remplaçant oa et ab par leur valeur dans l'égalité (2)

$$ob = r \sin (\theta + \alpha) + l - \frac{(c - u)^2}{2l}$$

puis

$$(1) \quad ob = \sin \theta . r \cos \alpha + \cos \theta . r \sin \alpha + l - \frac{(c - u)^2}{2l}.$$

Pour obtenir la valeur de ob' , il suffit de changer θ en $-\theta$ et u en $-u$ dans l'expression (1), ce qui donne

$$ob' = -\sin \theta . r \cos \alpha + \cos \theta . r \sin \alpha + l - \frac{(c - u)^2}{2l}.$$

Il vient enfin en remplaçant dans la relation (1) ob et ob' par les valeurs précédemment calculées :

$$OJ = r \cos \alpha . \sin \theta \frac{u}{c} + \sin \alpha . \cos \theta + l - \frac{c^2 - u}{2l}.$$

Calcul de JE. — Soit ρ le rayon de la coulisse circulaire (fig. 167), on a :

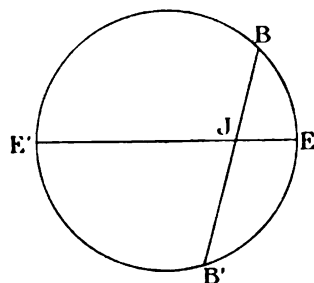


Fig. 167.

$$BJ.B'J = EJ.JE'$$

$$c^2 - u^2 = EJ \times 2\rho.$$

Car au degré d'approximation choisi on peut considérer JE' comme un diamètre :

De là on tire :

$$JE = \frac{c^2 - u^2}{2\rho}.$$

Calcul de OE. — En définitive on a :

$$OE = r \cos \alpha \sin \theta \frac{u}{c} + r \sin \alpha \cos \theta + 1 + \frac{c^2 - u^2}{2} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{1} \right).$$

Cherchons la valeur moyenne de OE : u varie très peu quand la barre de relevage est fixe ; supposons le paramètre u indépendant de θ . La valeur moyenne de OE est :

$$1 + \frac{c^2 - u^2}{2} \left[\frac{1}{\rho} - \frac{1}{1} \right].$$

Il faut qu'elle soit constante et indépendante de u parce qu'il faut que la position moyenne du tiroir corresponde au milieu de la lumière d'échappement, c'est ce qu'on obtient en prenant $\rho = 1$.

La coulisse doit donc avoir un rayon égal à la longueur de la barre d'excentrique.

L'élongation du tiroir, différence entre OE et sa valeur moyenne, est :

$$x = r \cos \alpha \sin \theta \frac{u}{c} + r \sin \alpha \cos \theta;$$

En posant :

$$r \sin \alpha = r' \sin \alpha'; \quad r' \cos \alpha' = r \cos \alpha \frac{u}{c}, \quad \text{on a } x = r' \sin (\alpha + \theta).$$

Ce résultat montre que le tiroir se comporte comme s'il n'y avait qu'un seul excentrique ayant pour excentricité r' et pour angle de calage α' .

Cherchons comment varie cet angle de calage α' quand u varie. L'angle α' est donné par l'équation :

$$\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha \frac{c}{u} ; \text{ si } u = c \text{ ou } \frac{u}{c} = 1 \text{ on a } \alpha' = \alpha.$$

Si u décroît, α' augmente et pour $u=0$, $\alpha' = \frac{\pi}{2}$.

Si u décroît, α' augmente encore et pour $u=-c$, $\alpha' = \pi - \alpha$.

Voyons encore comment varie le diagramme qui représente les diverses circonstances de la distribution. Calculons les distances :

$$OH_0 \text{ et } OH_1$$

on a

$$OH_0 = \frac{x_0 R}{r' \sin \alpha'} = \frac{x_0 R}{r \sin \alpha} ; \quad OH' = \frac{-x'_1 R}{r' \sin \alpha'} = \frac{-x_1 R}{r \sin \alpha}.$$

Les segments OH_0 et OH_1 (fig. 168) sont donc constants, et par suite, les points H_0 et H_1 sont fixes. α' varie pour les positions extrêmes de la bielle de relevage de α à $\pi - \alpha$.

En prenant comme origine le point A' , les durées des phases successives de la distribution de la vapeur sont proportionnelles aux arcs :

$AD, DF, \dots$, etc.

Influence du déplacement de la bielle de relevage. — Supposons que l'on parte de l'extrémité de la course en avant, le diagramme présente DC et EF en D_0, F_0 (fig. 168). Elevons la bielle de relevage en avançant le levier d'un cran ou deux, les points H_0 et H_1 étant fixes, les droites $C_0 D_0$ et $E_0 F_0$ vont faire un angle plus grand avec l'horizon et prendre les positions $C'D', E'F'$.

La durée de la détente est proportionnelle à DF ; elle a donc augmenté, car $D'F'$ est plus grand que $D_0 F_0$. En même temps on augmente la durée de l'admission anticipée et de la détente anticipée.

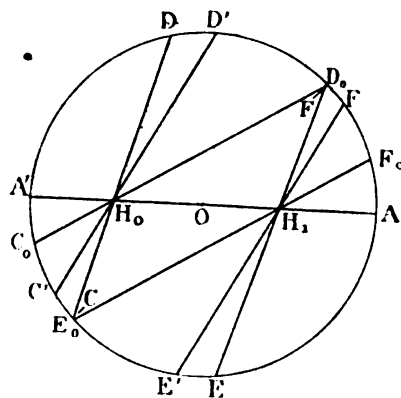


Fig. 168.

Lorsque $u=0$, on a $\alpha = \frac{\pi}{2}$, l'angle de calage est $\frac{\pi}{2}$, les droites CD et EF sont verticales (fig. 169). L'admission anticipée CA est égale à l'admission utile AD; le travail de la vapeur est négatif pendant l'admission anticipée CA' et positif pendant l'admission AD. Au bout d'une course de piston le travail opéré sera nul. On est au point mort. Si on continue de tourner le levier dans le même sens, l'angle α' devient obtus. En arrivant à

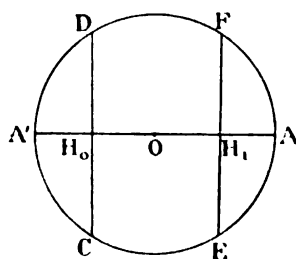


Fig. 169.

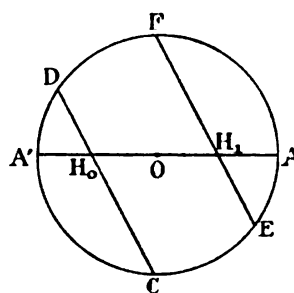


Fig. 170.

l'extrémité de la course, il a pour mesure $\pi - \alpha$. Que donne le diagramme? L'admission anticipée CA (fig. 170) est plus grande que l'admission utile... Le travail négatif pendant l'admission anticipée est plus grand que le travail positif pendant l'admission utile. On marche à contre-vapeur, le travail de la machine est complètement négatif.

IV. Transformation d'un mouvement circulaire alternatif en rectiligne alternatif. — Ce problème a été résolu d'une façon approchée par le balancier, le contre-balancier et le parallélogramme de Watt, et d'une manière rigoureuse par l'inverseur Peaucellier.

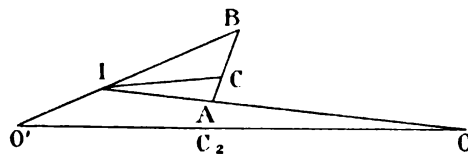


Fig. 171.

1° *Balancier et contre-balancier.* — Le système se compose de deux balanciers, le premier oA mobile autour du point O (fig. 171),

le second $O'B$ mobile autour du point O' . Ces balanciers sont égaux : $OA = OB = L$ et leurs extrémités A et B sont réunies par une bielle de longueur $2l$.

Lorsque les balanciers tournent autour de O et de O' , le milieu C de AB décrit une courbe appelée *courbe à longue inflexion* qui diffère très peu d'une droite.

Cherchons la tangente en un point de cette courbe.

Le centre instantané de la bielle AB est en I point de rencontre de AO et de BO' . La droite CI est donc normale en C à la courbe à longue inflexion.

Cette courbe passe par le milieu C_2 de OO' . Supposons en effet

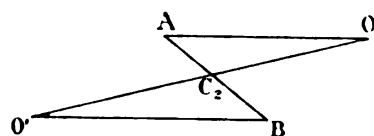


Fig. 172.

$O'B$ et OA parallèles (fig. 172). Dans cette position C est au milieu de OO' en C_2 .

Il est aisé de trouver la tangente en C_2 . En effet lorsque OA et $O'B$ sont parallèles, le centre instantané I de la bielle AB est à l'infini dans la direction commune à OA et à $O'B$. La normale au point C_2 à la courbe à longue inflexion est donc la parallèle à OA menée par C_2 et la tangente est par suite la perpendiculaire commune à OA et $O'B$ menée par le point C_2 .

Le point C_2 est de plus un centre de symétrie. En effet faisons tourner la figure de 180° dans son plan autour de C_2 (C dans la figure 173), O vient en O' , A en A' , B en B' , C en C' (fig. 173), la ligne brisée $OB'C'A'O$ peut être considérée comme une nouvelle position de la bielle et des balanciers.

Donc à tout point C de la courbe correspond un point C' symétrique du premier par rapport au point C_2 également sur la courbe.

Le point C_2 est donc un centre de symétrie de la courbe, et comme il est sur la courbe c'est un point d'inflexion.

Considérons les conditions pratiques de ce système.

L'extrémité A du premier balancier décrit un arc de cercle

A_1A_3 (fig. 174). L'extrémité B du deuxième balancier décrit un arc de cercle B_1B_3 . On s'arrange de façon que les extrémités A_1, A_3 du premier arc et le milieu B_2 du second soient sur une même verticale, et de même que le milieu A_2 du premier arc et les extrémités B_1, B_3 du second soient également sur une même verticale.

La position moyenne des deux balanciers est horizontale.

L'angle $A_1OA_2 = A_2OA_3 = \alpha$. De même $B_1OB_2 = B_2OB_3 = \alpha$.

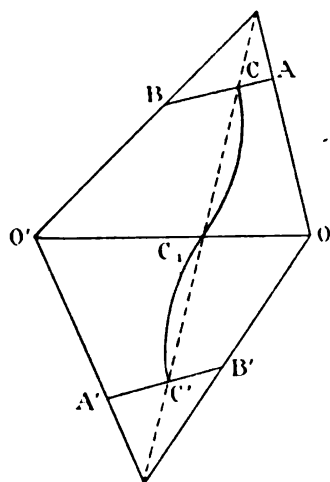


Fig. 173.

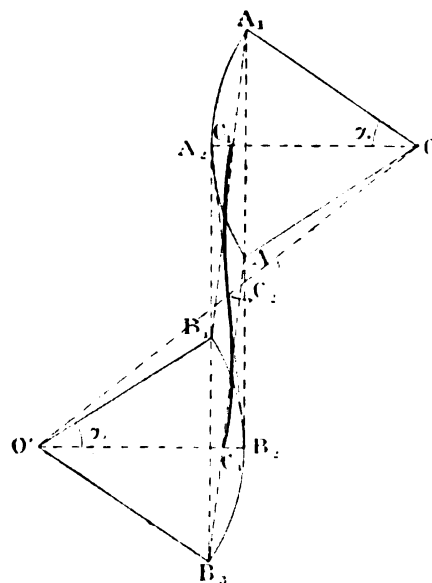


Fig. 174.

Les positions extrêmes de la bielle sont A_1B_1, A_3B_3 , et la position moyenne s'obtient en joignant A_2 et B_2 . Ces trois distances sont égales entre elles, la bielle ayant une longueur invariable.

Cherchons comment varie l'angle de la bielle avec la verticale ; soit β l'angle que fait A_1B_1 avec la verticale, on a :

$$\sin \beta = \frac{\text{flèche de } A_1A_3}{2l}.$$

Dans la position moyenne, l'angle de A_2B_2 avec la verticale est encore β mais en sens contraire, c'est $-\beta$; enfin l'angle de A_3B_3 avec la verticale est β puisque A_3B_3 est parallèle à A_1B_1 . La bielle oscille donc deux fois, pendant qu'elle passe de la posi-

tion extrême supérieure à la position extrême inférieure ; l'angle de la bielle avec la verticale part de $+\beta$, varie d'une manière continue jusqu'à $-\beta$, et croît de nouveau jusqu'à $+\beta$.

Cherchons où sont les milieux de la bielle dans les deux positions extrêmes et dans la position moyenne. Dans cette dernière nous avons vu que C_2 est le milieu de OO' . Dans les positions extrêmes, C sera en C_1 et en C_3 . Ces points sont sur la verticale moyenne entre $A_1A_3B_2$ et $A_2B_1B_3$. C'est cette verticale que décrira la tige du piston.

La courbe à longue inflexion aura donc ses deux extrémités et son centre de symétrie sur cette verticale. La verticale moyenne est tangente en C_2 et c'est une tangente d'inflexion.

La courbe dans sa partie utile, présente une forme du genre de celle tracée ci-contre (fig. 175). Le point C s'écartera fort peu de la verticale de C_2 .

Il est du reste facile de s'en rendre compte et de démontrer que l'écart de C est infiniment petit du cinquième ordre en prenant pour infiniment petit principal l'angle α qui ne dépasse jamais 18° .

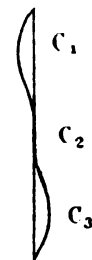


Fig. 175.

Il faut distinguer deux sortes d'écart, l'écart linéaire et l'écart angulaire ; l'écart linéaire est la distance d'un point C de la courbe à la verticale moyenne ; l'écart angulaire est l'angle de CC_2 avec la verticale.

On a : écart linéaire $= CC_2 \times (\sinus \text{ écart angulaire})$ d'où écart linéaire $< CC_2 \times \text{écart angulaire}$.

On a d'ailleurs $CC_2 < C_1C_2 < L \sin \alpha < L\alpha$; donc

$$\text{écart linéaire} < \text{écart angulaire} \times L\alpha.$$

Pour déterminer l'écart angulaire démontrons d'abord un théorème de géométrie.

THÉORÈME. — Considérons les deux balanciers AO , AO' (fig. 176) et la bielle AB . Par le point O menons OII égal et parallèle à AC . Les lignes CC_2 et C_2II sont rectangulaires.

En effet les deux droites OB , CH se coupent en K.

Les triangles CKB , KOH sont égaux et donnent :

$$HK = CK = \frac{L}{2}.$$

Joignons les points K et C₂ les triangles OKC₂(¹), OBO' sont semblables et le rapport de similitude est $\frac{1}{2}$ donc : $KC_2 = \frac{1}{2} O'B = \frac{1}{2}$.

Si du point K comme centre on décrit une circonférence, elle passera par les points C, H et C₂; donc l'angle CC₂H est droit, comme inscrit dans une demi-circonférence avec un rayon égal à $\frac{L}{2}$.

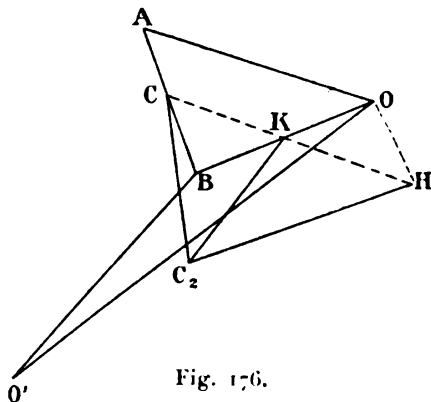


Fig. 176.

Alors au lieu de dire que l'écart angulaire est l'angle de CC_2 avec la verticale, on peut dire que c'est l'angle de C_2H avec l'horizontale.

Variation de l'écart angulaire. — Du point O comme centre (fig. 177), avec l (demi-longueur de la bielle pour rayon) décrivons une circonférence, ce sera le lieu du point II. Nous avons vu que lorsque le balancier est dans sa position extrême supérieure, l'angle de la bielle avec la verticale est β , il en est de même lorsqu'il est dans la position extrême inférieure. Aux positions extrêmes correspond le point H_1 . A la position moyenne correspondra le point H_2 .

Fig. 177.

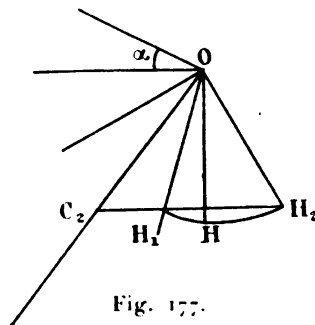


Fig. 177.

L'écart angulaire est l'angle de C_1H avec l'horizontale, il est nul en trois points : C_1 et C_2 points extrêmes, et C_3 point d'inflexion et centre, car en ces trois points l'horizontale de C_2 passe par les points H_1 et H_2 .

Pour un point de la courbe autre que ces points particuliers, le point Π sera sur l'arc $\Pi_1 \Pi_2$ en un certain point Π et l'écart angulaire sera l'angle $\Pi C, \Pi_1$.

L'écart angulaire maximum est l'angle sous lequel du point C,

(¹) Le point C₂ devrait se trouver sur la figure 176 au milieu de OO'.

on voit la flèche de l'arc $H_1 H_2$, il est plus petit que $\frac{\text{flèche } H_1 H_2}{C_2 H_1}$.

Or $C_2 H_1$ est à peu près égal à L ; on aura donc pour la limite de l'écart angulaire maximum $\frac{\text{flèche } H_1 H_2}{L}$.

Or (fig. 174) :

$$\text{flèche } A_1 A_3 = L(1 - \cos.\alpha).$$

ou :

$$\text{flèche } A_1 A_3 = 2L \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Comme α est infiniment petit, on peut remplacer $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ par $\frac{\alpha^2}{4}$, ce qui nous donne :

$$\text{flèche } A_1 A_3 = L \frac{\alpha^2}{2}$$

de même :

$$\text{flèche de l'arc } H_1 H_2 = l \frac{\beta^2}{2}.$$

Calculons β . On a $\sin \beta = \frac{\text{flèche de } A_1 A_3}{2l}$ ou, en remplaçant le sinus par l'arc et la flèche $A_1 A_3$ par sa valeur :

$$\beta = \frac{L}{l} \cdot \frac{\alpha^2}{4}.$$

α étant infiniment petit du premier ordre, on voit que β est du second ordre.

La limite de l'écart angulaire $\frac{\text{flèche } H_1 H_2}{L}$

a pour mesure :

$$\frac{1}{L} \cdot \frac{\beta^2}{2}; \text{ or } \frac{\beta^2}{2} = \frac{L^2}{l^2} \frac{\alpha^4}{32}$$

Donc l'écart angulaire maximum est $\frac{L}{l} \cdot \frac{\alpha^4}{32}$.

C'est un infiniment petit du quatrième ordre.

L'écart linéaire sera par suite plus petit que $\frac{L^2}{l} \cdot \frac{\alpha^5}{32}$, infiniment petit du cinquième ordre, si α est du premier.

On prend ordinairement $z = \text{arc tg } \frac{1}{3}$ ou $z = \frac{1}{3}$, puis $\frac{1}{L} = \frac{1}{3}$.

On trouve ainsi que l'écart linéaire est plus petit que $\frac{L}{2500}$.

Si $L = 2$ mètres (c'est un grand balancier) l'écart linéaire sera à peu près de $\frac{1}{2}$ millimètre, c'est à peine le jeu de l'appareil.

Ce système est très peu employé.

Parallélogramme de Watt. — Soit un balancier mobile autour d'un point fixe O.

Prenons $OA = AE$ et sur AE construisons un parallélogramme articulé ABDE, c'est le parallélogramme de Watt (fig. 178). Le

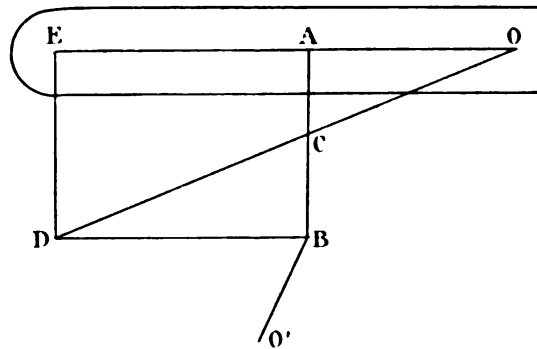


Fig. 178.

sommet D est relié à un point fixe O par une bielle DO et le sommet B au point O' par la bielle O'B.

Si on fait abstraction de AE, ED, DB on a le système précédent (balancier, contre-balancier) dans lequel le milieu C de AB décrit une courbe à longue inflexion.

La droite OD passe par le milieu de AB. En effet, les triangles EDO, ACO sont semblables et le rapport de similitude est $\frac{1}{2}$, donc $AC = \frac{ED}{2} = \frac{AB}{2}$, d'où $OD = 2OC$.

Ce qui montre que les courbes décrites par les points C et D sont homothétiques, C décrivant une courbe à longue inflexion, D en décrit donc une aussi.

En théorie, ce système ne diffère en rien du premier, mais en pratique, il présente de sérieux avantages :

1° Le contre-balancier est moins long, par suite la machine tient moins de place ;

2° On a deux points D et C qui décrivent sensiblement des lignes droites.

Donc en D on articulera le piston et en C la tige de la pompe du condenseur.

On a cru longtemps que le problème de la transmission des mouvements circulaires alternatifs n'était susceptible que d'une solution approchée, c'était une erreur, le colonel Peaucelien a trouvé une transformation très simple qui permet la transformation rigoureuse.

Inverseur Peaucelien. — Soit un losange articulé ABCD (fig. 179), l la longueur commune de ses côtés, ses sommets B et D sont reliés par des tiges rigides égales entre elles à un point fixe O. Soit L la longueur commune de ces deux bielles.

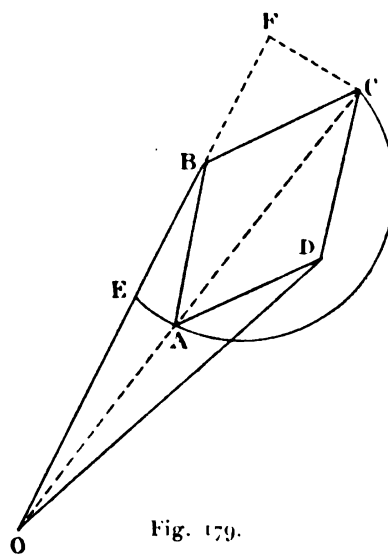


Fig. 179.

Cette figure est symétrique par rapport à la diagonale AC du losange.

Du point B comme centre avec L pour rayon décrivons une circonférence qui coupe la bielle OB en E et F.

Nous avons OA. OC = OE. OF.

Or :

$$OE = L - l \quad OF = L + l$$

donc :

$$OA.OC = L^2 - l^2 = C^te$$

Supposons alors que le point C décrive une courbe dont l'équation en coordonnées polaires soit $\rho = f(\omega)$; A aura même ω que C en prenant pour pôle le point O. L'équation de la courbe décrite par A sera $\rho = \frac{L^2 - l^2}{f(\omega)}$.

Les deux points A et C décrivent deux courbes transformées l'une de l'autre par rayons vecteurs réciproques.

C'est pour cela qu'on a appelé quelquefois l'appareil de M. Peaucellier un *inverseur*.

Supposons en particulier que C décrive un cercle qui passe par le point O. L'équation de ce cercle sera :

$$\rho = a \cos. \omega.$$

Alors l'équation du lieu du point A sera :

$$\rho = \frac{L^2 - l^2}{a \cos. \omega}$$

C'est l'équation d'une droite.

Il devait bien en être ainsi puisque la transformée d'une droite par rayons vecteurs réciproques est un cercle passant par le centre de transformation. Quoi qu'il en soit l'appareil de M. Peaucellier n'est guère employé parce qu'il est encombrant.

DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE PREMIER

FONCTIONS DES FORCES. — POTENTIEL

GÉNÉRALITÉS. — Désignons par X, Y, Z les composantes d'une force F sollicitant un point M de coordonnées x, y, z (fig. 180).

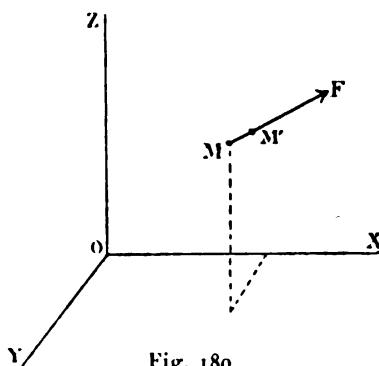


Fig. 180.

Pour un déplacement du point M dont les composantes sont : dx, dy, dz , cette force produit le travail :

$$d\mathcal{G} = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Supposons qu'il existe une fonction V de x, y, z telle que

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z},$$

le travail élémentaire a alors pour expression :

$$d\mathcal{G} = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = dV.$$

$V(x, y, z)$ se nomme en général *fonction de la force F*; dans la théorie de l'attraction, elle prend le nom de *potentiel* de la force F.

REMARQUE. — Ainsi définie, la fonction V n'est déterminée qu'à une constante près, mais comme cette constante n'intervient ni dans l'expression des composantes, ni dans celle du travail, sa considération est sans grand intérêt.

Surface de niveau. — Le lieu des points de l'espace pour lesquels la fonction $V(x, y, z)$ prend la même valeur C est une surface qui a pour équation

$$V(x, y, z) = C;$$

on la nomme *surface de niveau*. Par chaque point M de coordonnées x_0, y_0, z_0 , passe une surface de niveau S ayant pour équation

$$V(x, y, z) = V(x_0, y_0, z_0).$$

THÉORÈME. — La force F appliquée au point M est normale à la surface S .

En effet, les cosinus directeurs de F sont proportionnels à X, Y, Z et par suite à

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}.$$

c'est-à-dire aux cosinus directeurs de la normale à la surface en M (fig. 181).

On peut choisir la constante additive de V de façon à faire

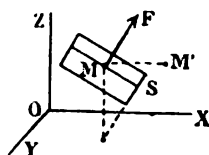


Fig. 181.

correspondre une valeur donnée du potentiel à une surface de niveau également donnée.

Lignes de force. — On appelle *lignes de force* les trajectoires orthogonales de la famille des surfaces de niveau S .

Puisque la force F est normale aux surfaces de niveau, elle est tangente à la ligne de force qui passe par son point d'application.

Intensité et direction de la force F . — On a en coordonnées rectangulaires :

$$F^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2.$$

Quant aux cosinus directeurs de F , ils sont définis par les équations :

$$\alpha F = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \beta F = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \gamma F = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

THÉORÈME. — La force F appliquée en un point M d'une surface de niveau $V = V_0$ est égale au quotient de l'accroissement du

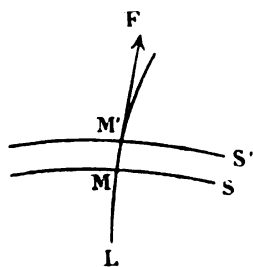


Fig. 182.

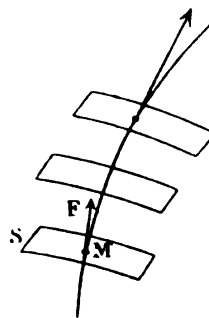


Fig. 183.

potentiel, lorsqu'on passe de la surface de niveau S à la surface de niveau infiniment voisine S' , par la distance MM' de ces deux surfaces, cette distance étant comptée sur la normale en M .

Soient x, y, z les coordonnées de M (fig. 182), et $x + dx, y + dy, z + dz$ celles de M' ; si le déplacement MM' a lieu dans le sens de la force, on a, en posant $MM' = dn$:

$$(1) \quad dx = \alpha dn; \quad dy = \beta dn; \quad dz = \gamma dn.$$

La variation du potentiel lorsqu'on passe de M en M' est

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz.$$

En remplaçant les dérivées partielles par leurs valeurs αF , βF , γF et dx , dy , dz par les valeurs (1) il vient :

$$dV = F \, dn \, (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

d'où $dV = F \, dn$, c'est-à-dire $F = \frac{dV}{dn}$.

Conditions d'équilibre du point M. — Pour que le point M soit en équilibre dans l'espace, il faut que la force F soit nulle, c'est-à-dire que l'on ait :

$$(1) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Pour déterminer de plus si l'équilibre du point M est stable ou instable, il faut faire application du théorème de Dirichlet.

THÉORÈME DE DIRICHLET. — Pour que les coordonnées x, y, z rendent la fonction V maximum ou minimum, il est nécessaire que les conditions d'équilibre (1) soient vérifiées. Si les solutions x, y, z du système (1) rendent effectivement la fonction V maximum, l'équilibre du point M de coordonnées x, y, z est stable. Si au contraire la fonction V est minimum, ou plus généralement si elle n'est pas maximum, la position d'équilibre M est instable.

La démonstration de ce théorème est donnée dans le Cours de dynamique (1).

EXPRESSION DU POTENTIEL DANS LE CAS D'UNE FORCE CENTRALE

Cas d'un point attirant. — Un point M de coordonnées x, y, z

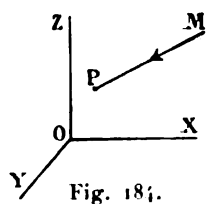


Fig. 184.

est actionné par un point fixe P de coordonnées x_0, y_0, z_0 (fig. 184); la force F est dirigée suivant la droite qui joint les deux points (vers P s'il s'agit d'une attraction, du côté opposé au point P s'il s'agit d'une répulsion). De plus l'intensité $F = \varphi(r)$ de cette force est exclusivement fonction de la distance $PM = r$ des deux points.

(1) Voir *Cours professé à la Sorbonne*, par M. Appell.

Expression du potentiel.— Si la force est dirigée de M vers P (attraction), ses cosinus directeurs sont :

$$\frac{x_0 - x}{r}, \quad \frac{y_0 - y}{r}, \quad \frac{z_0 - z}{r}.$$

Le travail $d\mathcal{U}$ correspondant au déplacement de composantes dx, dy, dz est donc :

$$(1) \quad d\mathcal{U} = F \left[\frac{x_0 - x}{r} dx + \frac{y_0 - y}{r} dy + \frac{z_0 - z}{r} dz \right].$$

On a d'autre part :

$$r^2 = (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2$$

et, par suite

$$-r dr = (x_0 - x) dx + (y_0 - y) dy + (z_0 - z) dz$$

L'équation (1) peut donc s'écrire :

$$d\mathcal{U} = -F dr = -\varphi(r) dr.$$

Il est facile de trouver une fonction V telle que

$$dV = -\varphi(r) dr$$

il suffit de prendre

$$V = -\int \varphi(r) dr.$$

En désignant par $F(r)$ la fonction admettant $\varphi(r)$ comme dérivée, on a

$$V = -F(r).$$

En résumé, la force centrale d'intensité $F = \varphi(r)$ admet un potentiel dont la valeur est exprimée par la fonction ayant pour dérivée $-\varphi(r)$.

Cas d'un nombre quelconque de centres d'action. — Soient $P_1, P_2 \dots P_n$ les centres d'action, $r_1, r_2 \dots r_n$ leurs distances au point M sur lequel ils agissent (fig. 185).

Si le point P_1 existait seul, le potentiel relatif au système $P_1 M$

serait V_1 ; soit de même $V_2, V_3, \dots, V_n$ les potentiels relatifs au système $P_2M, P_3M, \dots, P_nM$.

Les composantes suivant Ox des actions exercées sur M sont respectivement :

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x}, \dots, \quad \frac{\partial V_n}{\partial x}.$$

La projection de leur résultante sur Ox est donc $\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial x} \dots \frac{\partial V_n}{\partial x}$, ou $\frac{\partial V}{\partial x}$ en posant $V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$.

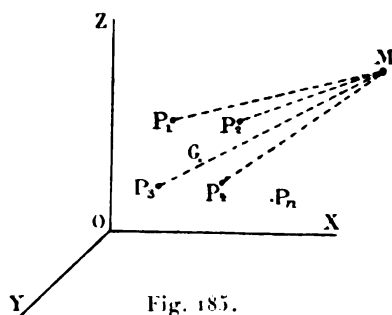


Fig. 185.

En conséquence, le potentiel relatif à un système de centres d'action est égal à la somme des potentiels relatifs à chaque centre.

APPLICATIONS

Expliciter le potentiel $V = -F(r)$ pour diverses lois de force.

— 1° *L'attraction est proportionnelle à la distance r .* — On a dans ce cas $\varphi(r_1) = m_1 r_1$, V_1 étant la fonction qui admet comme dérivée $-\varphi(r_1)$, la fonction cherchée doit admettre comme dérivée $-m_1 r_1$; on a donc

$$V_1 = -\frac{m_1}{2} r_1^2.$$

Si plusieurs centres $P_1, P_2, \dots, P_n$ agissent sur le point M, on a

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

par suite

$$V = -\frac{1}{2} \sum m_p r_p^2.$$

Supposons que les coefficients m soient les masses des points attirants $(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$, désignons par G (fig. 185) leur centre de gravité et par ξ, η, ζ les coordonnées de ce point. On a toujours

$$\xi \Sigma m = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n$$

$$\eta \Sigma m = m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n$$

$$\zeta \Sigma m = m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n.$$

Si le point G est l'origine des coordonnées, les valeurs de ξ, η, ζ sont nulles et par suite

$$\Sigma m_1 x_1 = 0, \quad \Sigma m_1 y_1 = 0, \quad \Sigma m_1 z_1 = 0$$

Les distances $r_1, r_2, \dots$ ont pour expression

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2xx_1 - 2yy_1 - 2zz_1 + x^2 + y^2 + z^2$$

$$r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2xx_2 - 2yy_2 - 2zz_2 + x^2 + y^2 + z^2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$r_n^2 = x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 - 2xx_n - 2yy_n - 2zz_n + x^2 + y^2 + z^2.$$

En multipliant ces égalités par $-\frac{m_1}{2}, -\frac{m_2}{2}, \dots, -\frac{m_n}{2}$ et ajoutant, il vient

$$V = -\frac{1}{2} \Sigma m_p (x_p^2 + y_p^2 + z_p^2) - \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) \Sigma m$$

car les coefficients de x, y, z sont nuls d'après les conditions (1).

Le premier terme de V est une constante, puisque c'est la somme des produits des diverses masses des points agissants par le carré de leurs distances au centre de gravité du système indéformable qu'ils constituent. L'équation $V = \text{constante}$ représente donc des sphères ayant pour centre commun le centre de gravité du système des points agissants.

Les lignes de force qui sont les trajectoires orthogonales de ces sphères concentriques se réduisent aux droites tracées à partir du centre de gravité G .

Les composantes de la force F qui agit sur M ont pour mesure

$$\frac{\partial V}{\partial x}; \quad \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

donc $X = -x \Sigma m$; $Y = -y \Sigma m$; $Z = -z \Sigma m$.

Tout se passe pour M comme si les diverses masses agissantes étaient placées au centre de gravité G du système.

Pour qu'il y ait équilibre, les composantes X, Y, Z doivent être nulles, ce qui ne peut se produire qu'à l'origine G .

L'équilibre est stable, car le potentiel V , qui est nul en G , est négatif pour tout autre point de l'espace : en effet, il a pour expression $V = -\frac{\rho^2}{2} m$, ρ désignant la distance GM .

2° *L'attraction est inversement proportionnelle à la distance r .*

— Prenons le point attirant comme origine, on a $F = \frac{m}{r}$, par suite

$$V = -m \int \frac{dr}{r} = -m \log r,$$

Cette fonction V satisfait à l'équation différentielle $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$.

En effet

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{m}{r} \frac{\partial r}{\partial x}; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{m}{r} \frac{\partial r}{\partial y},$$

or $r^2 = x^2 + y^2$, donc

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

d'où

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{m}{r^2} x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{m}{r^2} y.$$

En prenant une seconde fois la dérivée, il vient :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\left(\frac{m}{r^2} - x^2 \frac{2m}{r^4}\right),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\left(\frac{m}{r^2} - y^2 \frac{2m}{r^4}\right).$$

En ajoutant membre à membre ces deux dernières équations on a enfin :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Cette propriété de la fonction $V = -m \log. r$ subsiste en

Il en est encore de même dans le cas d'un système de points attirants situés dans un même plan passant par M.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} &= 0, \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2} &= 0, \end{aligned}$$
$$\sum \frac{\partial^2 V_p}{\partial x^2} + \sum \frac{\partial^2 V_p}{\partial y^2} = 0.$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} x - a_1 &= r_1 \cos \omega_1 \\ y - b_1 &= r_1 \sin \omega_1 \\ \vdots & \end{aligned}$$

$$z - c_1 = r_1 e^{i\omega_1}$$
$$\begin{aligned} \mathbf{z} - \mathbf{c}_2 &= r_2 e^{i\omega}, \\ \mathbf{z} - \mathbf{c}_n &= r_n e^{i\omega_n}. \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{z} - \mathbf{c}_1) &= \mathbf{L}\mathbf{r}_1 + i\omega_1 \\ \mathbf{L}(\mathbf{z} - \mathbf{c}_2) &= \mathbf{L}\mathbf{r}_2 + i\omega_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{L}(\mathbf{z} - \mathbf{c}_n) &= \mathbf{L}\mathbf{r}_n + i\omega_n, \end{aligned}$$

Formons la fonction

$$f(z) = -\sum m_p L_p (z - c_p).$$

ou

$$f(z) = -\sum m_p L_p - i \sum m_p \omega_p.$$

Comme le potentiel du système a pour valeur

$$V = -\sum m_p L_p$$

il vient en posant

$$W = -\sum m_p \omega_p, \quad f(z) = V + iW$$

Les lignes de force du système ont pour équation $W = c^{te}$.

Pour le montrer il suffit d'établir que les courbes $W = c^{te}$ coupent orthogonalement les courbes de niveau $V = c^{te}$, c'est-à-dire que l'on a

$$(1) \quad \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

or,

$$f'_x(z) = \frac{\partial V}{\partial x} + i \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx}$$

$$f'_y(z) = \frac{\partial V}{\partial y} + i \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dy}.$$

mais

$$\frac{dz}{dx} = 1, \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dy} = i$$

donc

$$(2) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y}; \quad \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial y}.$$

En multipliant les égalités (2) membre à membre, on obtient la condition (1).

REMARQUE. — Les relations (2) donnent :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

d'où par addition

$$(3) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

La fonction $V = -\Sigma m_p \log. r_p$ est donc une solution de l'équation (3).

RECHERCHE DES POSITIONS D'ÉQUILIBRE. — Les coordonnées x et y des positions d'équilibre sont solutions des équations

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

en vertu des relations (2) elles vérifient aussi le système

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0$$

par suite pour les positions d'équilibre on a $f'(z) = 0$;

Or

$$f(z) = -\Sigma m_p L(z - c_p),$$

donc

$$f'(z) = -\Sigma \frac{m_p}{z - c_p}$$

Les valeurs de z qui déterminent les positions d'équilibre du point figurent donc parmi les solutions de l'équation :

$$\sum_0^n \frac{m_p}{z - c_p} = 0.$$

Si l'on chasse les dénominateurs, on voit que cette équation est entière et de degré $n - 1$, elle admet donc $n - 1$ solutions et par suite il y a $n - 1$ positions d'équilibre pour le point M_1 .

Vérifions que l'équilibre du point M est toujours instable. Prenons pour origine des coordonnées la position d'équilibre étudiée. La fonction V peut alors s'écrire :

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_k + \dots + V_n + \dots$$

le terme en V_k étant un polynôme homogène en x et y de degré k .

Pour que l'origine corresponde à un maximum de la fonction V , il faut que l'on ait $V_1 = 0$ et que le premier des polynômes V qui ne s'annule pas pour l'origine soit négatif (théorie du maximum des fonctions).

La fonction W peut se développer de la même manière en polynômes homogènes, ce qui permet d'écrire :

$$W = W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_k + \dots + W_n + \dots$$

par suite

$$(1) \quad V + iW = \Sigma (V_k + iW_k).$$

En développant directement la fonction $f(z)$ suivant les puissances croissantes de z on a

$$(2) \quad f(z) = \Sigma B_k e^{i\theta_k} (x + iy)^k,$$

En posant $x = r \cos \omega$, $y = r \sin \omega$ ou $x + iy = re^{i\omega}$, et exprimant l'identité des développements (1) et (2) il vient :

$$V_k + iW_k = B_k r^k e^{i(\theta_k + k\omega)}.$$

En identifiant les parties réelles, on a

$$V_k = B_k r^k \cos (\theta_k + k\omega).$$

Supposons que V_k soit le premier polynôme qui ne s'annule pas identiquement pour l'origine.

Pour un point quelconque voisin de l'origine V_k ne peut pas rester négatif, car le facteur cosinus peut varier de -1 à $+1$. puisque V_k ne reste pas négatif la fonction V n'est pas maximum pour l'origine, par suite les $n-1$ positions d'équilibre sont instables.

3° *L'action varie en raison inverse du carré de la distance.* — Cette loi d'action est importante car elle règle la gravitation universelle ainsi que les phénomènes magnétiques et divers phénomènes électriques.

Puisque la force appliquée en M par le centre P a pour expression $\frac{m}{r^2}$ le potentiel V est égal à

$$-m \int \frac{dr}{r^2}$$

donc

$$V = \frac{m}{r}.$$

Surface de niveau. — Pour que V soit constant, il faut que r soit constant ; donc les surfaces de niveau sont des sphères ayant leurs centres au point agissant P .

Les droites issues de P sont les lignes de force.

Montrons que la fonction V des coordonnées x, y, z de M est solution de l'équation $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$ que l'on représente par la notation abrégée

$$\Delta V = 0.$$

On a

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{m}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x}; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{m}{r^2} \frac{\partial r}{\partial y}; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{m}{r^2} \frac{\partial r}{\partial z}.$$

Or,

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2,$$

a, b, c étant les coordonnées du point P , donc

$$r dr = (x - a) dx + (y - b) dy + (z - c) dz,$$

par suite

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{m}{r^3} (x - a); & \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{m}{r^3} (y - b); \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= -\frac{m}{r^3} (z - c). \end{aligned}$$

En calculant les dérivées secondes, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= -\frac{m}{r^3} + (x - a)^2 \frac{3m}{r^5} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= -\frac{m}{r^3} + (y - b)^2 \frac{3m}{r^5} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= -\frac{m}{r^3} + (z - c)^2 \frac{3m}{r^5}. \end{aligned}$$

Enfin, en ajoutant ces égalités membre à membre, il vient

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

GÉNÉRALISATION. — Le point M est soumis aux actions des points $P_1, P_2 \dots P_n$ de potentiels respectifs $V_1, V_2, \dots V_n$ et le potentiel résultant est

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n,$$

Comme l'équation ΔV est linéaire, on a

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots + \Delta V_n;$$

Or, d'après ce qui précède

$$\Delta V_1 = 0; \quad \Delta V_2 = 0; \quad \Delta V_n = 0,$$

donc la fonction

$$V = \Sigma \frac{m}{r} \text{ est une solution de l'équation } \Delta V = 0$$

Equation des surfaces de niveau et des lignes de force dans le cas de deux points agissants P_1 et P_2 . — La surface de niveau qui passe par le point M est une surface de révolution ayant pour axe

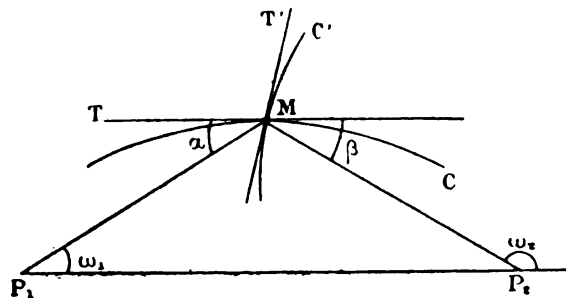


Fig. 186.

la ligne $P_1 P_2$ (fig. 186). La méridienne de cette surface dans le plan $MP_1 P_2$ a pour équation $\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} = c$.

Pour obtenir l'équation des lignes de force, menons les tangentes MT, MT' à la courbe de niveau et à la ligne de force et supposons qu'un mobile se déplace le long de MT avec la vitesse V_1 , pendant qu'un autre mobile parcourt MT' avec la vitesse V_2 ; si α et β sont les angles de MT avec les rayons vecteurs MP_1 et MP_2 , MT' fait avec les mêmes rayons vecteurs les angles com-

plémentaires de α et de β , on a donc en projetant les vitesses V_1 et V_2 sur les rayons vecteurs et sur la perpendiculaire à ces rayons,

$$v_1 \cos \alpha = \frac{dr_1}{dt}; \quad v_1 \cos \beta = \frac{dr_2}{dt},$$

$$v_2 \cos \alpha = r_1 \frac{d\omega_1}{dt}; \quad v_2 \cos \beta = r_2 \frac{d\omega_2}{dt}.$$

En égalant les deux valeurs du rapport $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$ il vient :

$$\frac{dr_1}{dr_2} = \frac{r_1 d\omega_1}{r_2 d\omega_2}.$$

Il est à remarquer que les différentielles dr_1 et dr_2 se rapportent aux lignes de niveau, et $d\omega_1$, $d\omega_2$ aux lignes de force.

L'équation des lignes de niveau $\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} = c^{te}$, donne $m_1 \frac{dr_1}{r_1^2} + m_2 \frac{dr_2}{r_2^2} = 0$, par suite on a pour les lignes de force

$$m_1 \frac{d\omega_1}{r_1} + m_2 \frac{d\omega_2}{r_2} = 0$$

Le triangle $P_1 MP_2$ donne :

$$r_1 \sin \omega_1 = r_2 \sin \omega_2$$

en substituant à r_1 et r_2 les valeurs proportionnelles $m_1 d\omega_1$; $m_2 d\omega_2$ il vient :

$$m_1 d\omega_1 \sin \omega_1 + m_2 d\omega_2 \sin \omega_2 = 0$$

d'où en intégrant :

$$m_1 \cos \omega_1 + m_2 \cos \omega_2 = C^{te}.$$

Telle est l'équation des lignes de force.

Importance de l'équation $\Delta V = 0$. — L'équation $\Delta V = 0$ joue un grand rôle en physique : c'est l'équation du potentiel dans l'attraction newtonienne en magnétisme et en électricité statique. On rencontre encore l'équation $\Delta V = 0$ en électricité dynamique et en hydrodynamique.

Dans la théorie de la propagation de la chaleur elle se présente avec une autre signification. Soit V la température d'un point de coordonnées x, y, z , il y a échange de chaleur entre ce point et les points voisins : V est une fonction du temps et des coordonnées définie dans la théorie de la conductibilité par l'équation

$$K \frac{dV}{dt} = \Delta V.$$

Comme $\frac{dV}{dt} = 0$ dans le cas de l'équilibre mobile de température, la fonction V est solution de l'équation $\Delta V = 0$.

FLUX DE FORCE ET APPLICATIONS

Traçons une surface quelconque S dans l'espace (fig. 187), soit $d\omega$ un élément de cette surface, M le centre de gravité de cet élément, MN la projection de la force F appliquée au point M sur la normale MN à la surface. Par définition, le flux de force relatif à l'élément $d\omega$ a pour mesure (1) $MN \cdot d\omega$.

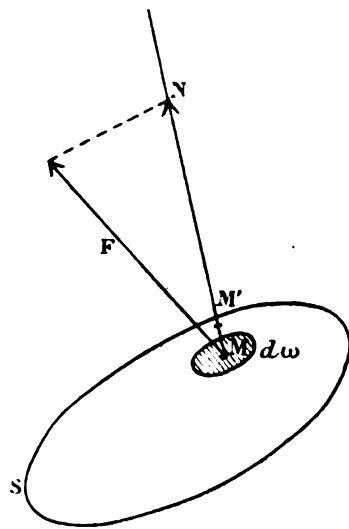


Fig. 187.

REMARQUES. — 1° Soit V le potentiel en M , $V + dV$ le potentiel en un point très voisin M' pris sur la normale. Le travail de la force F relatif au déplacement MM' a pour mesure d'une part dV et d'autre part $MM' \times MN$. Donc $dV = dn \times MN$, dn désignant le déplacement MM' .

En remplaçant MN par sa valeur dans l'expression (1) celle-ci prend la forme

$$\frac{dV}{dn} \times d\omega.$$

2° En comparant les calculs de Fourier relatifs à la conductibilité de la chaleur et ceux auxquels conduit la théorie du potentiel,

Expression du flux de force élémentaire dans le cas d'un point attirant unique. — Le flux de force relatif à l'élément AB d'étendue $d\omega$ a pour expression première

Fig. 188.

d'où

$$(2) \quad dF = \frac{m}{r^2} \cos \varphi \, d\omega.$$

$$d\omega' = d\omega \cos \varphi,$$
$$(3) \quad dF = \frac{m}{r^2} d\omega'$$

$$(4) \quad dF = m d\tau.$$

Flux de force relatif à une surface donnée. — Pour obtenir le flux de force relatif à une portion finie de surface S , il faudra faire

la somme des flux relatifs aux divers éléments de S , on aura par suite

$$F = m\sigma.$$

σ étant l'angle solide total sous lequel de P on aperçoit le contour de S .

Examinons le cas où la surface S est fermée, l'espace est alors partagé en deux régions : l'une intérieure à la surface et l'autre

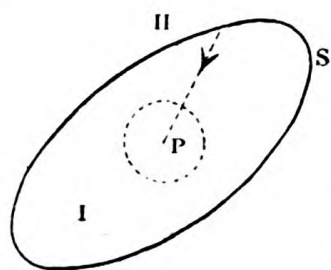


Fig. 189.

extérieure. On convient d'affecter du signe $+$ le flux de force relatif à un élément de surface lorsque la force appliquée au centre de gravité M de cet élément est dirigée vers la région extérieure (II). Dans le cas contraire le flux de force élémentaire est affecté du signe $-$. S'il existe un seul point attirant P , il peut être soit dans la région

intérieure (I), soit dans la région extérieure (II). Dans le premier cas l'angle solide σ sous lequel de P on voit la surface fermée est égal à 4π ; par suite, dans le cas d'une attraction exercée par P sur M , on a, la force étant dirigée vers P (fig. 189) dans la région (I)

$$F = -4\pi m.$$

Si le point P appartient à la région (II), les flux de force élémentaire relatifs à deux éléments AB et $A'B'$ (fig. 190) découpés par

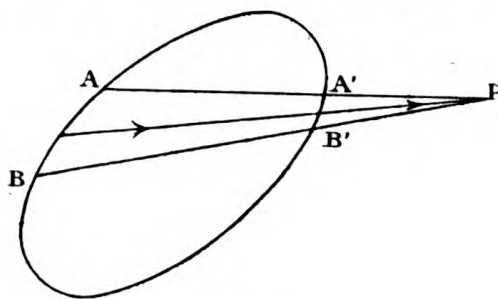


Fig. 190.

un cône infiniment délié et de sommet P sont tous deux égaux en valeur absolue à $m.d\sigma$, mais l'un est affecté du signe $+$ (flux sortant), et l'autre du signe $-$ (flux rentrant). Donc leur somme

est nulle, il en résulte que le flux F relatif à la surface totale est nul, chacun des couples d'éléments $AB, A'B'$ donnant une somme nulle lorsqu'on fait tourner le cône autour du point P de manière à balayer toute la surface.

En résumé, le flux de force relatif à une surface fermée, dans le cas d'un point *attirant* unique, est nul lorsque ce point est extérieur à la surface; il a pour valeur $-4\pi m$ s'il est placé à l'intérieur de la surface.

Cas d'un système de points agissants. — L'attraction totale est la somme géométrique des attractions dues à chaque point; la composante normale totale est donc la somme algébrique des attractions normales partielles. Comme le flux de force pour un point est égal au produit de cette composante normale par $d\omega$, le flux de force total est égal à la somme algébrique des flux de force partiels. Comme les points extérieurs à une surface fermée S ont un effet nul sur le flux, celui-ci se réduit dans tous les cas à $-4\pi M$, M désignant la somme des masses des points attirants intérieurs à la surface.

REMARQUE. — On vient d'envisager la matière attirante comme constituée par des points isolés; en la supposant répartie suivant une certaine loi, dans un volume, sur une surface ou sur une ligne, le potentiel a respectivement pour expression :

$$V = \iiint \delta \frac{dv}{r}; \quad V = \iint \delta \frac{d\omega}{r}; \quad V = \int \delta \frac{ds}{r}.$$

$dv, d\omega, ds$ désignent un élément de volume, de surface ou d'arc; δ désigne la densité au centre de gravité de l'élément et r la distance de ce point au point attirant.

En mécanique céleste on considère quelquefois les astres comme des points isolés, mais lorsqu'il s'agit de l'étude de la figure des corps célestes on tient compte de leurs dimensions.

En électricité l'agent attirant est supposé réparti sur des surfaces.

L'attraction par une ligne n'a pas en général de signification physique, mais l'attraction exercée par un volume ou une surface se ramène dans certains problèmes à l'attraction exercée par une ligne convenablement déterminée.

Pour étendre la notion du flux de force au cas où la matière attirante est répartie dans un volume, il suffit de décomposer celui-ci, par exemple en petits cubes limités par des plans parallèles aux plans des coordonnées (fig. 191). On peut supposer la

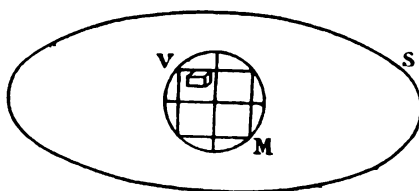


Fig. 191.

masse de chaque élément cubique condensée en son centre de gravité. Le flux de force qui traverse une surface entourant le volume sera encore égale à $4\pi M$, M étant la masse de l'agent considéré.

Lorsque le volume de tous les éléments cubiques tend vers 0, l'erreur que l'on commet dans l'assimilation de chacun d'eux à leur centre de gravité tend vers 0. Comme M reste constant et que cet agent est à la limite distribué par points, on a bien rigoureusement.

$$F = -4\pi M.$$

Le même raisonnement s'applique au cas d'une ligne ou d'une surface attirante.

REMARQUE. — La considération du flux de force, comme celle du potentiel, permet de substituer à des compositions de force de simples sommes algébriques.

Equation de Poisson. — Considérons un petit cube de dimensions dx, dy, dz (fig. 192) renfermant une matière attirante de masse spécifique moyenne ρ , ρ étant d'ailleurs une fonction des coordonnées x, y, z du sommet M . La masse agissante placée à l'intérieur du cube est $\rho dx dy dz$, donc le flux relatif à cette surface est

$$-4\pi \rho dx dy dz.$$

Calculons ce flux d'une autre manière.

Comparons d'abord les faces latérales parallèles à yoz . Si X est la composante normale en M , $X + \frac{d^2V}{dx^2} dx$ est la compo-

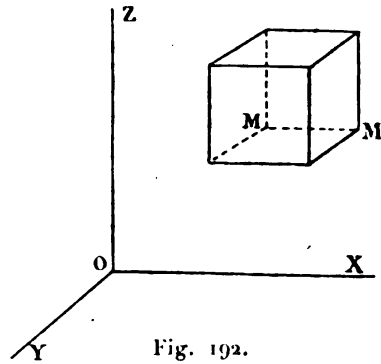


Fig. 192.

sante en M' , par suite le flux relatif à l'ensemble des deux faces considérées a pour expression

$$\frac{d^2V}{dx^2} dx dy dz.$$

Les deux autres groupes de faces parallèles donnent de même

$$\frac{d^2V}{dy^2} dy dx dz,$$

$$\frac{d^2V}{dz^2} dz dy dx.$$

Le flux cherché est par suite

$$\left(\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} \right) dx dy dz.$$

Les fonctions V et ρ doivent donc être solutions de l'équation

$$(1) \quad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\rho.$$

L'équation (1) se nomme *équation de Poisson*.

On peut l'écrire pour abrégé

$$\Delta V = -4\pi\rho.$$

Si le cube ne contient pas d'agent attirant la densité ρ est nulle et l'équation de Poisson se réduit à l'équation de Laplace $\Delta V = 0$.

Applications. — THÉOREME. — L'attraction exercée par une couche sphérique homogène sur un point extérieur est la même que si toute la masse active était condensée en son centre.

En désignant par R le rayon de base de la couche, par ε son épaisseur infiniment petite et par ρ la densité de sa matière, la masse agissante est

$$M = 4\pi R^2 \varepsilon \rho$$

aux infiniment petits du second ordre près. Du point O comme centre (fig. 193) décrivons une sphère de rayon $OP = r$. Comme

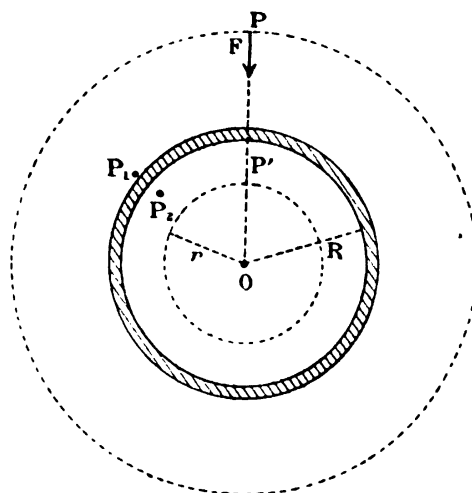


Fig. 193.

l'attraction exercée sur le point P est par raison de symétrie dirigée suivant le rayon PO et que son intensité est constante pour la distance r , le flux de force total relatif à la sphère de rayon r a pour valeur $-4\pi r^2 F$. Il est d'ailleurs égal à $-4\pi M$, donc

$$F = \frac{M}{r^2}$$

C'est bien l'attraction qu'exercerait la masse M placée au point O sur le point P .

THÉORÈME. — L'attraction exercée par une couche sphérique infiniment mince sur un point intérieur P' est nulle.

En effet, la sphère de rayon $r < R$ ne renfermant pas de matière attirante se trouve traversée par un flux $4\pi r^2 F$ qui est nul, donc $F = 0$.

REMARQUE. — D'après ce qui précède, la fonction qui permet de calculer F est discontinue pour tous les points de la sphère agissante S . La différence des valeurs de F en deux points P_1 et P_2 infiniment voisins de la couche sphérique, mais placés l'un à l'intérieur et l'autre à l'extérieur, est

$$\frac{M}{r^2} = 4\pi\epsilon\rho.$$

Le produit $\epsilon\rho$ est quelquefois appelé *densité superficielle* ; on peut en effet substituer à la couche attirante infiniment mince une surface attirante de même rayon à laquelle on attribuerait la densité $\epsilon\rho$.

Calcul du potentiel V dû à la couche. — On a $F = \frac{M}{r^2}$; or le potentiel V est défini par l'équation

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{M}{r^2},$$

donc

$$V = \frac{M}{r} + C.$$

Si le point P est entouré par la couche, $F = 0$, donc

$$\frac{dV}{dr} = 0.$$

et par suite le potentiel est constant pour tous les points qu'enveloppe la couche attirante.

REMARQUE. — En partant de l'expression

$$V = \int \rho \frac{dv}{r'},$$

et effectuant le calcul pour le centre de la couche, on obtient

$$V = \frac{1}{R} \int \rho dv = \frac{M}{R}.$$

C'est la valeur du potentiel en tous les points intérieurs à la couche.

Cette même formule $V = \int \rho \frac{dv}{r'}$ appliquée au cas d'un point extérieur doit fournir

$$V = \frac{M}{r} + c^te.$$

Comme pour un point qui s'éloigne indéfiniment $\int \rho \frac{dv}{r'}$ tend vers zéro, la constante C doit être prise égale à zéro. Cela revient à prendre pour zéro le potentiel à l'infini.

Action exercée par une sphère homogène sur un point. — 1° *Le point P est extérieur à la sphère.* — On peut toujours supposer que l'on décompose la sphère en couches concentriques infiniment minces. Chacune de ces couches agissant comme si sa masse était

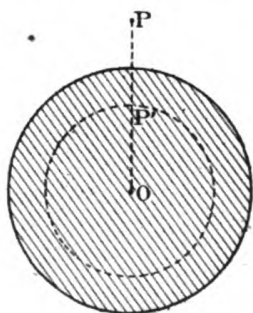


Fig. 194.

reportée en son centre, l'action totale exercée par la sphère aura pour mesure $\frac{M}{r^2}$ et le potentiel au point P sera $\frac{M}{r}$; le facteur M est la masse $\frac{4}{3} \pi R^3 \rho$ de la sphère.

2° *Le point P est intérieur.* — Traçons une sphère de centre O et de rayon OP' (fig. 194), toutes les couches extérieures à cette sphère sont sans action sur le point P' , donc la force F appliquée en P' a pour mesure

$$\frac{M_1}{r^2},$$

M_1 désignant la masse $\frac{4}{3} \pi r^3 \rho$ de la sphère de rayon OP' .

Comme la masse M de la sphère donnée est égale à

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

on a

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{M}{R^3}$$

et par suite

$$F = \frac{Mr}{R^3}.$$

Lorsque le point P se déplace dans la sphère, l'action que celle-ci exerce sur lui est proportionnelle à la distance r du point P au centre O.

Il est facile d'obtenir le potentiel en P' car il doit satisfaire à l'équation

$$\frac{dV}{dr} = -F = -\frac{Mr}{R^3}.$$

Donc

$$(1) \quad V = C - \frac{Mr^2}{2R^3},$$

Pour un point extérieur $V = \frac{M}{r}$; pour que ces deux formules coïncident, lorsque le point P est pris sur la surface de la sphère, il faut que l'on ait :

$$\frac{M}{R} = C - \frac{MR^2}{2R^3},$$

ou

$$C = \frac{3M}{2R}.$$

Ce qui conduit pour le potentiel (1) à l'expression suivante :

$$V = \frac{3M}{2R} - \frac{Mr^2}{2R^3}.$$

REMARQUE. — En calculant ΔV on trouve

$$\Delta V = -\frac{3M}{R^3}$$

comme

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

on voit que la fonction V est bien solution de l'équation de Poisson.

$$\Delta V = -4\pi\rho.$$

Action exercée sur un point P par une droite indéfinie. — Par raison de symétrie, l'action exercée par la droite sur le point P

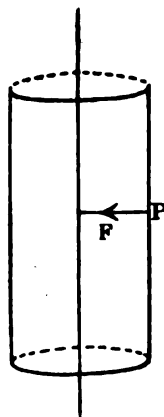


Fig. 195.

est dirigée suivant la perpendiculaire PO abaissée du point P sur la droite (fig. 195). Considérons un cylindre de révolution autour de la droite et de rayon PO limité par les plans de deux parallèles distants de h . Comme tous les points de la surface latérale de ce cylindre sont dans la même position par rapport à la droite, l'action F exercée sur chacun d'eux est la même. Le flux de force relatif à ce cylindre se réduit au flux de force qui pénètre par la surface latérale puisque les bases renferment l'action qui s'exerce en leurs différents points. On a donc

$$-4\pi M = -2\pi rhF;$$

donc

$$F = \frac{2M}{rh}.$$

Or, en désignant par $\hat{\sigma}$ la densité linéaire de la droite attirante, on a

$$M = h\hat{\sigma},$$

donc

$$F = \frac{2\hat{\sigma}}{r},$$

L'attraction exercée par la droite indéfinie sur un point varie en raison inverse de la distance de ce point à la droite.

Action exercée sur un point P par une couche infiniment mince comprise entre deux cylindres de révolution. — Par raison de symétrie, l'attraction sera dirigée suivant la perpendiculaire abaissée du point attiré P (fig. 196) sur l'axe de la couche et elle ne dépendra que de la distance r de ce point à l'axe; si ε est l'épais-

seur de la couche, R le rayon du cylindre intérieur et ρ la densité de la matière attirante, la masse attirante M est

$$M = 2\pi R h \varepsilon \rho.$$

Appliquons le théorème du flux de force à un cylindre de hau-

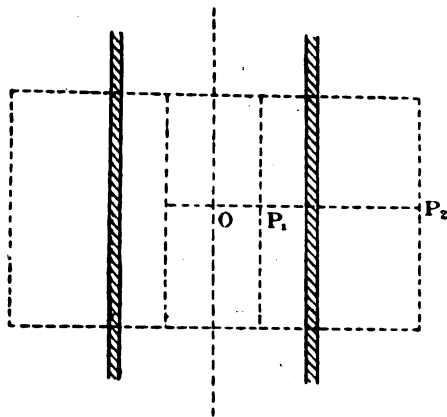


Fig. 196.

teur h et de rayon $OP = r$. La portion de flux relative aux bases est nulle, reste la surface latérale.

Distinguons deux cas: 1° $r < R$ (point P_1), la masse attirante est extérieure au cylindre, donc

$$- 2\pi r h F = 0.$$

d'où $F = 0$.

L'attraction de la couche sur un point intérieur est nulle.

2° $r > R$ (point P_2). Le flux de force est alors

$$- 4\pi M = - 4\pi (2\pi R h \varepsilon \rho),$$

donc

$$- 2\pi h r F = 4\pi (2\pi R h \varepsilon \rho),$$

d'où

$$F = \frac{4\pi R \varepsilon \rho}{r}.$$

L'attraction de la couche sur un point extérieur est en raison inverse de la distance du point à l'axe de la couche. Elle est la même que si toute la masse était concentrée sur l'axe.

Action exercée par un plan indéfini de densité superficielle δ sur un point P. — Par raison de symétrie, l'attraction est normale au plan (plan des yz) (fig. 197) et ne dépend que de la distance x du point attiré au plan. Appliquons le théorème du flux de force à un cylindre dont les génératrices sont parallèles à Ox . Soient $x = x_0$, $x = x_1$ les équations des plans de base et S la surface commune de ces bases.

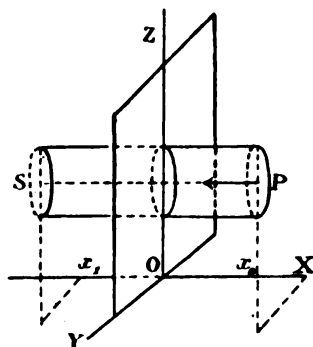


Fig. 197.

Le flux de force relatif à la surface latérale est nul ; celui relatif aux bases est égal à

$$SF(x_0) - SF(x_1).$$

Si x_0 et x_1 sont deux abscisses positives, la matière intérieure au cylindre a une masse nulle, donc dans ce cas

$$SF(x_0) - SF(x_1) = 0.$$

d'où

$$F(x_0) = F(x_1).$$

L'attraction en un point est indépendante de sa distance au plan. Si x_0 et x_1 ont des signes contraires,

$$S[F(x_0) - F(x_1)] = -4\pi S\delta,$$

donc

$$F(x_0) - F(x_1) = -4\pi\delta,$$

or

$$F(x_0) = -F(x_1)$$

d'où

$$F(x_0) = -2\pi\delta$$

et

$$F(x_1) = 2\pi\delta.$$

L'attraction est constamment égale à $2\pi\delta$ en valeur absolue, mais elle est positive d'un certain côté du plan et négative de l'autre côté.

Discontinuité de l'action. — Imaginons la matière attirante répartie sur une surface S (fig. 198) suivant une loi quelconque, soit δ la densité en un point. Menons la normale MN à la surface au point M de $d\omega$ et prenons de part et d'autre de M deux points infiniment voisins, l'un intérieur M_1 , l'autre extérieur M_2 . Démontrons que la différence géométrique des attractions sur M_1 et M_2 est une quantité finie. Soient N_1 la composante normale de l'attraction en M_1 et N_2 la même composante en M_2 .

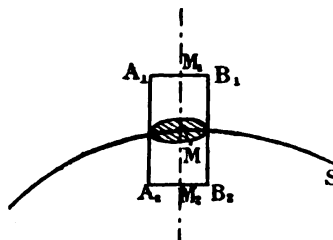


Fig. 198.

Démontrons que $N_1 - N_2 = 4\pi\delta$.

Aux différents points de l'élément $d\omega$, menons les normales à la surface et prenons de part et d'autre de la surface une longueur ϵ . On détermine ainsi un volume limité par deux surfaces parallèles à S : $A_1M_1B_1$ et $A_2M_2B_2$ et par la surface réglée, engendrée par les normales aux différents points du contour de $d\omega$. Ce volume infiniment petit contient une quantité de matière égale à $\delta d\omega$. Le flux de force relatif à cet élément est donc $4\pi\delta d\omega$. Prenons les dimensions linéaires de l'élément $d\omega$ pour infiniment petits du premier ordre et supposons ϵ du second ordre au moins. En A_1B_1 , la composante normale est N_1 , donc le flux de force correspondant est $N_1 d\omega$; de même le flux de force relatif à A_2B_2 est $N_2 d\omega$. Comme on peut négliger le flux qui traverse la surface latérale, puisque celle-ci est du troisième ordre au moins, le flux total a pour expression $(N_2 - N_1) d\omega$, donc

$$4\pi\delta d\omega = (N_2 - N_1) d\omega,$$

d'où

$$N_1 - N_2 = 4\pi\delta.$$

Application. Distribution de l'électricité. — **THÉOREME.** — La densité électrique à l'intérieur d'un conducteur électrique en équilibre, est nulle, en d'autres termes l'électricité se porte à la surface du conducteur.

Considérons un corps conducteur isolé, chargé d'une certaine quantité d'électricité et une molécule de fluide positif à l'intérieur.

Cette molécule par hypothèse peut se mouvoir librement, donc il faut pour l'équilibre que la force qui la sollicite soit nulle. Par suite il faut que l'on ait

$$\frac{dV}{dx} = 0, \quad \frac{dV}{dy} = 0, \quad \frac{dV}{dz} = 0$$

ce qui exige que $V = C^k$. En différentiant de nouveau, il vient :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2V}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2V}{dz^2} = 0,$$

donc $\Delta V = 0$. Or l'équation de Poisson fournit $\Delta V = -4\pi\rho$, par suite $\rho = 0$.

THÉORÈME. — Si de l'électricité est en équilibre sur un conducteur, l'attraction en un point infiniment voisin est égale au produit par 4π de la densité électrique au point correspondant du conducteur.

Prenons un point extérieur M_1 . Au point intérieur. M_2 infiniment voisin de la surface l'attraction est nulle. Or en M_1 l'attraction est normale à la surface du conducteur, car la surface du conducteur est une surface de niveau puisqu'on a $V = C^k$, pour tous les points intérieurs quelque voisins qu'ils soient de la surface.

Appliquons la formule $N_1 - N_2 = 4\pi\delta$, comme $N_2 = 0$ on a $N_1 = 4\pi\delta$.

CHAPITRE II

THÉORÈME DE GREEN ET APPLICATIONS

LEMME.— Considérons un volume W limité par une surface S . Soit dv un élément quelconque de W et $d\omega$ un élément quelconque de la surface S (fig. 199). Menons la portion extérieure

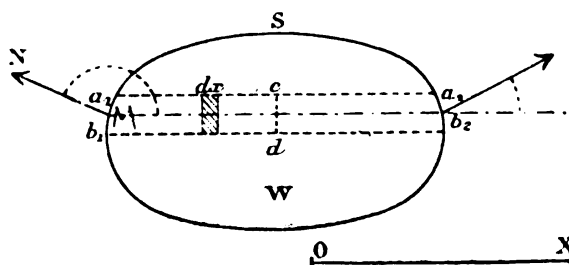


Fig. 199.

de la normale en un point M de $d\omega$. Soient $\alpha \beta \gamma$ les cosinus directeurs de la direction MN et F une fonction quelconque de x, y et z .

Le lemme s'exprime ainsi :

$$\int F \alpha d\omega = \int \frac{dF}{dx} dv.$$

La première intégrale est une intégrale double et s'étend à tous les éléments de S , la deuxième est une intégrale triple qui doit être étendue au volume W .

DÉMONSTRATION. — Construisons un cylindre ayant ses génératrices parallèles à Ox et pour directrice le contour de $d\omega_1$ soit $d\sigma$ sa section droite cd . Il découpe sur S un second élément $d\omega_2$; Désignons par F_1 la valeur de la fonction au centre de gravité de $d\omega_1$ et par F_2 sa valeur au centre de gravité de $d\omega_2$. Appelons α_1

le cosinus de l'angle que forme la portion extérieure de la normale à la surface S au centre de gravité de $d\omega_1$ avec Ox , et α_2 le même angle relativement à $d\omega_2$. Dans le cas actuel, on a

$$\alpha_1 < 0 \quad \text{et} \quad \alpha_2 > 0.$$

D'ailleurs :

$$(1) \quad d\tau = -d\omega_1\alpha_1 = d\omega_2\alpha_2.$$

Coupons le cylindre infiniment mince précédemment défini par des plans équidistants entre eux et perpendiculaires à Ox . Soit dx la distance de deux plans consécutifs. On a

$$dv = dx d\tau,$$

dv étant l'un des éléments cylindriques formés, alors

$$\int_c \frac{dF}{dx} dv = \int_c \frac{dF}{dx} dx d\tau$$

$d\tau$ étant une constante. Or on doit intégrer de x_1 à x_2 de façon à aller de $a_1 b_1$ à $a_2 b_2$, donc

$$\int_c \frac{dF}{dx} dv = d\tau (F_2 - F_1)$$

ou encore en remplaçant $d\tau$ par ses valeurs (1)

$$\int_c \frac{dF}{dx} dv = \alpha_1 d\omega_1 F_1 + \alpha_2 d\omega_2 F_2 = d\tau \int_{x_1}^{x_2} \frac{dF}{dx} dx.$$

On aura tout le volume en étendant convenablement les intégrales

$$\int \alpha_1 F_1 d\omega_1 \quad \text{et} \quad \int \alpha_2 F_2 d\omega_2$$

$$\text{donc} \quad \int_w \frac{dF}{dx} dv = \int_s \alpha_1 F_1 d\omega_1 + \int_s \alpha_2 F_2 d\omega_2.$$

La première intégrale du second membre doit être étendue à tous les éléments de S pour lesquels α_1 est négatif et la deuxième à tous les éléments pour lesquels α_2 est positif; on peut encore écrire :

$$\int \alpha F d\omega = \int \frac{dF}{dx} dv$$

la seconde intégrale étant étendue à toute la surface S . Par analogie, on a :

$$\int F\beta d\omega = \int \frac{dF}{dy} dv$$

$$\int F\gamma d\omega = \int \frac{dF}{dz} dv.$$

Théorème de Green. — En faisant dans la première de ces équations

$$F = U \frac{dV}{dx},$$

U et V étant des fonctions quelconques, il vient

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dU}{dx} \frac{dV}{dx} + U \frac{d^2V}{dx^2},$$

on peut par suite écrire

$$(1) \quad \int \alpha U \frac{dV}{dx} d\omega = \int \frac{dU}{dx} \frac{dV}{dx} dv + \int U \frac{d^2V}{dx^2} dv$$

et par symétrie :

$$(1) \quad \int \beta U \frac{dV}{dy} d\omega = \int \frac{dU}{dy} \frac{dV}{dy} dv + \int U \frac{d^2V}{dy^2} dv$$

$$(1) \quad \int \gamma U \frac{dV}{dz} d\omega = \int \frac{dU}{dz} \frac{dV}{dz} dv + \int U \frac{d^2V}{dz^2} dv.$$

Le théorème de Green s'obtient en ajoutant les trois équations (1), c'est une conséquence immédiate de la définition des intégrales multiples.

Introduisons l'expression

$$\Delta V = \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}.$$

Soit V le potentiel en un point M de la surface et $V + dV$ le potentiel de la surface M' voisine. Posons $MM' = dn$; $\frac{dV}{dn}$ mesure la composante normale de l'attraction.

Evaluons $\frac{dV}{dn}$.

Désignons par x, y, z les coordonnées de M , par $x + dx, y + dy, z + dz$ celles de M' . On a $dx = \alpha \, dn$; $dy = \beta \, dn$; $dz = \gamma \, dn$.

La variation de potentiel dV entre M et M' est d'ailleurs

$$\frac{dV}{dx} dx + \frac{dV}{dy} dy + \frac{dV}{dz} dz$$

En remplaçant dx, dy, dz par leurs valeurs $\alpha \, dn, \beta \, dn, \gamma \, dn$, on a

$$\frac{dV}{dn} = \frac{dV}{dx} \alpha + \frac{dV}{dy} \beta + \frac{dV}{dz} \gamma.$$

En faisant enfin la somme des trois équations (1) il vient :

$$\int \frac{dV}{dn} U d\omega = \int \left(\frac{dU}{dx} \frac{dV}{dx} + \frac{dU}{dy} \frac{dV}{dy} + \frac{dU}{dz} \frac{dV}{dz} \right) dv + \int U \Delta V dv.$$

Telle est l'expression analytique du théorème de Georges Green.

COROLLAIRES. — Les conséquences du théorème de Green sont très nombreuses.

1° Supposons que $U = 1$ et que V représente un potentiel, la formule fournit alors :

$$\int \frac{dV}{dn} d\omega = \int \Delta V dv.$$

Or, d'après l'équation de Poisson

$$\Delta V = -4\pi\rho,$$

done

$$\int \frac{dV}{dn} d\omega = - \int 4\pi\rho dv = 4\pi \int \rho dv.$$

Comme $\rho \, dv$ représente la quantité de matière attirante contenue dans un élément de volume de W , $\int \rho \, dv$ représente la masse M de matière comprise dans le volume W , donc

$$\int \frac{dV}{dn} d\omega = -4\pi M.$$

on retrouve ainsi le théorème du flux de force.

S'il n'y avait pas de matière à l'intérieur du volume W , le potentiel V vérifierait l'équation

$$\Delta V = 0.$$

2° Pour $U = V$, le théorème de Green donne

$$\int V \frac{dV}{dn} d\omega = \int \left[\left(\frac{dV}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dz} \right)^2 \right] dv.$$

Si de plus $V = 0$ sur toute la surface S , on a

$$\int V \frac{dV}{dn} d\omega = 0.$$

et par suite

$$\int \left[\left(\frac{dV}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dz} \right)^2 \right] dv = 0.$$

Comme les éléments de l'intégrale sont positifs, il faut pour qu'elle soit nulle que

$$\frac{dV}{dx} = 0, \quad \frac{dV}{dy} = 0, \quad \frac{dV}{dz} = 0,$$

en tous les points de W . Il résulte de là que le potentiel V est constant à l'intérieur de ce volume, et comme $V = 0$ sur S , on a

$$V = 0.$$

pour tous les points intérieurs.

3° Si donc une fonction $V(x, y, z)$ satisfait à l'équation $\Delta V = 0$, est continue ainsi que ses dérivées à l'intérieur d'un volume et s'annule en tous les points de la surface que limite le volume, cette fonction est nulle en tout point de celui-ci.

Il résulte de là que l'on ne peut pas trouver deux fonctions V_1 et V_2 satisfaisant à l'intérieur d'une surface fermée à l'équation

$$\Delta V = 0.$$

On verra plus loin (p. 247) que ce problème admet une solution. Si deux fonctions V_1 et V_2 ont même valeur en tous les points de

la surface limite S et sont telles que $\Delta V_1 = 0$, $\Delta V_2 = 0$, V_1 et V_2 satisferaient à l'équation

$$\Delta (V_1 - V_2) = 0,$$

Or la fonction $V_1 - V_2 = 0$ sur la surface, par suite elle est aussi nulle à l'intérieur; donc les fonctions V_1 et V_2 sont identiques et le problème n'admet qu'une solution.

4° Si $\frac{dV}{dn} = 0$ en tous les points de S , on a

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

en tout point intérieur à W , d'où $V = C^e$; au lieu de prendre

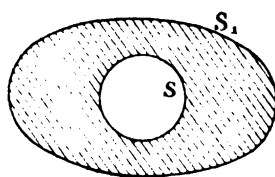


Fig. 200.

une surface fermée, on pourrait appliquer le théorème au volume compris entre deux surfaces fermées S et S_1 (fig. 200). Si la fonction V est nulle sur S et S_1 , elle est nulle pour tout point de l'espace intermédiaire.

Supposons qu'il s'agisse du potentiel, on sait qu'il s'annule à l'infini, c'est une conséquence de la définition.

$$V = \int \frac{m}{r}.$$

Soit S une surface fermée telle que $V = 0$ en tous ses points. S'il n'y a pas de masse attirante à l'extérieur de S , on a $V = 0$ pour tout point extérieur.

Considérons en effet l'espace limité par S et par une sphère S_1 de très grand rayon R , d'après ce qui précède si le potentiel est nul sur S et sur S_1 il est nul en tout point intermédiaire: or il est nul sur S par hypothèse, il est nul aussi sur S_1 , car lorsque R croît indéfiniment, l'intégrale

$$\int V \frac{dV}{dn} d\omega,$$

étendue à la sphère S_1 tend vers zéro puisque d'après sa définition V est de l'ordre de $\frac{1}{R}$, $\frac{dV}{dn}$ de l'ordre de $\frac{1}{R^2}$ et la surface

de la sphère de l'ordre de R^2 . L'intégrale est donc infiniment petite de l'ordre de $\frac{1}{R}$.

APPLICATION DU THÉORÈME DE GREEN

THÉORÈME. — Si une fonction $V(x, y, z)$, finie et continue ainsi que ses dérivées à l'intérieur d'une surface S satisfait, pour cette région de l'espace, à l'équation de Laplace $\Delta V = 0$, l'intégrale

$$\int_{(S)} \frac{dV}{dn} d\omega = 0.$$

En effet, dans les conditions indiquées, la fonction V se comporte comme un potentiel pourvu que toutes les masses attirantes soient extérieures à la surface. Comme d'autre part l'intégrale $\int_S \frac{dV}{dn} d\omega$ mesure le flux de force relatif à la surface S et que celui-ci est nul, on a bien :

$$\int_{(S)} \frac{dV}{dn} d\omega = 0.$$

Valeur moyenne de V sur une sphère. — La fonction V prend une infinité de valeurs sur la surface d'une sphère. On appelle *moyenne arithmétique* de ces valeurs l'expression

$$M = \int_{(S)} \frac{V d\omega}{4\pi R^2}$$

c'est-à-dire le rapport de l'intégrale $\int V d\omega$ à la surface de la sphère ; c'est là une extension de la définition élémentaire de la moyenne arithmétique

$$m = \sum_1^n \frac{a_i}{n}.$$

La moyenne M est comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs V sur la surface : car l'intégrale $\int_S \frac{d\omega}{4\pi R^2} = 1$.

THÉORÈME. — La moyenne M est égale à la valeur de la fonction V au centre O de la sphère

$$M = \int_{(S)} \frac{V d\omega}{4\pi R^2} = V_0.$$

Soient μ la valeur de cette moyenne sur une sphère S_1 de rayon r , et μ' sa valeur sur une sphère S'_1 concentrique et de rayon $r + dr$ (fig. 201).

Comparons μ à μ' . Un cône infiniment délié ayant son sommet au centre O découpe en M l'élément superficiel $d\omega$, en M' l'élément $d\omega'$. Les deux figures Oab et $Oa'b'$ ont pour rapport d'homothétie $\frac{r + dr}{r}$, par suite

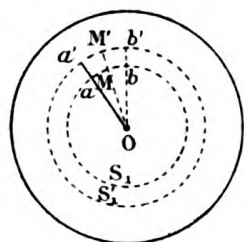


Fig. 201.

$$\frac{d\omega}{r^2} = \frac{d\omega'}{(r + dr)^2}.$$

En désignant par V et $V + dV$ les valeurs de la fonction V aux centres de gravité M et M' des éléments $d\omega$ et $d\omega'$ distants de dr sur la normale en M , on a

$$\mu = \int_{(S_1)} \frac{V d\omega}{4\pi r^2}; \quad \mu' = \int_{(S'_1)} \frac{(V + dV) d\omega'}{4\pi (r + dr)^2},$$

de sorte que

$$\mu' - \mu = - \int_{S_1} \frac{V d\omega}{4\pi r^2} + \int_{S_1} \frac{(V + dV) d\omega}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_1} dV d\omega$$

Or $dV = \frac{dV}{dn} dn$ ou $\frac{dV}{dn} dr$, par suite

$$\mu' - \mu = \frac{dr}{4\pi r^2} \int \frac{dV}{dn} d\omega.$$

Mais $\int \frac{dV}{dn} d\omega = 0$, donc la différence $\mu' - \mu$ est aussi égale à 0.

Il résulte de là qu'en passant d'une sphère à une autre μ ne varie pas, donc $\mu = V_0$.

THÉORÈME. — La fonction V n'a ni maximum, ni minimum. — Si la fonction V atteignait un maximum V_0 en un point P (fig. 202),

il existerait une sphère Σ de centre P et de rayon ε assez petit pour que V fût inférieur à V_0 à l'intérieur de la sphère et sur la sphère. Dans ces conditions on aurait :

$$M \leq \int_{\Sigma} \frac{V_0 d\omega}{4\pi\varepsilon^2}$$

ou $M < V_0$ puisque

$$\int_{\Sigma} \frac{d\omega}{4\pi\varepsilon^2} = 1.$$

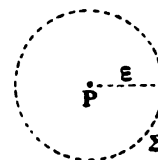


Fig. 202.

Cette conclusion est inadmissible d'après le théorème précédent.

On démontrerait de même que la fonction V ne peut pas avoir de minimum.

État d'équilibre de P . — Le point attiré P est en équilibre lorsque ses coordonnées x, y, z vérifient les équations

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Il faut de plus pour la stabilité que les coordonnées de P rendent V maximum, donc la stabilité est impossible. Comme nos raisonnements supposent que la sphère Σ ne contient pas de masses attirantes, il pourra y avoir équilibre stable au contact de celles-ci.

THÉORÈME. — Si une fonction V reste comprise entre deux limites g et h sur une surface fermée S limitant un volume W , on a pour tous les points de ce volume

$$h \leq V \leq g.$$

La fonction V est supposée finie, continue à l'intérieur de W et solution de l'équation $\Delta V = 0$.

Parmi les valeurs que prend la fonction $V(x, y, z)$ à l'intérieur du volume W ou sur la surface S , (fig. 203) il y en a une plus grande que les autres ; W ne comprenant pas de masses attirantes, ce maximum ne peut pas être atteint ailleurs que sur S , donc la propriété est démontrée.

On verrait de même que le minimum de V correspond à un point de la surface S .

Si donc V a une valeur nulle en tous les points de S , elle a une valeur nulle pour tous les points du volume W .

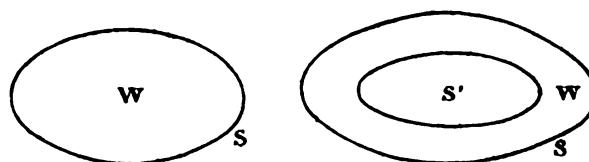


Fig. 203.

Pour un volume annulaire, le résultat est le même, le maximum et le minimum de V sont atteints sur les surfaces S ou S' .

COROLLAIRE.—Considérons une surface S (fig. 204) à l'extérieur de laquelle il n'y ait pas de masses attirantes et une fonction V dont les valeurs sur S sont comprises entre 0 et g ; la valeur de V restera entre ces limites pour tous les points extérieurs.

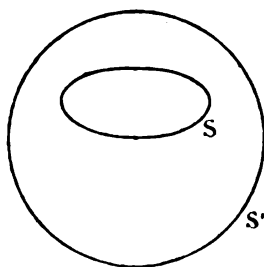


Fig. 204.

Imaginons en effet une sphère S' de grand rayon limitant avec S un volume annulaire. Sur S on a

$$0 < V < g.$$

On peut d'autre part déterminer le rayon de la sphère de manière que sur sa surface la fonction V soit inférieure à un petit nombre arbitrairement choisi α ; car si R grandit indéfiniment les potentiels aux points de S' tendent vers zéro.

D'après la remarque précédente la valeur de V à l'intérieur de l'espace annulaire restera comprise entre g et $-\alpha$, c'est-à-dire entre g et 0 puisque α est aussi voisin que l'on veut de zéro. En particulier si en tous les points de S on a $V = 0$, il en est de même pour tout l'espace extérieur à S .

PROBLÈME DE DIRICHLET

Trouver une fonction $V(x, y, z)$ finie et continue ainsi que ses dérivées à l'intérieur d'un volume limité par une surface S et prenant en chaque point de S des valeurs données. On veut de plus que V vérifie l'équation $\Delta V = 0$.

1° *Ce problème ne peut pas avoir deux solutions.* — En effet si les fonctions V et V_1 satisfont aux conditions imposées, leur différence $V_1 - V$ est solution de l'équation $\Delta V = 0$ et a une valeur nulle pour tous les points de S , ce qui exige que les fonctions V et V_1 coïncident.

2° *Il y a toujours une solution.* — Considérons en effet l'ensemble des fonctions V finies et continues à l'intérieur de S et prenant sur S les valeurs données ; l'intégrale $\int \sum \left(\frac{dV}{dx} \right)^2 dv$ ne peut pas s'annuler, sans quoi on aurait

$$\frac{dV}{dx} = 0; \quad \frac{dV}{dy} = 0; \quad \frac{dV}{dz} = 0,$$

puisque tous ses éléments sont essentiellement positifs, et l'on conclurait que la fonction V est une constante, ce qui est impossible puisque V doit prendre toutes les valeurs, inégales en général, données sur S ; l'intégrale $\int \sum \left(\frac{dV}{dx} \right)^2 dv$ admet donc un certain minimum.

Reste à montrer que la fonction V répondant au minimum vérifie l'équation $\Delta V = 0$. Pour cela partons de la fonction $V + tU$, où U est une fonction quelconque finie et continue à l'intérieur de S , mais nulle sur S ; en vertu de ce choix, $V + tU$ reprend sur la surface les valeurs données en chaque point.

L'intégrale $\int \left(\frac{dV + tdU}{dx} \right)^2 dv$ est plus grande que $\int \left(\frac{dV}{dx} \right)^2 dv$ puisque V correspond au minimum de cette dernière et que les deux intégrales coïncident pour $t = 0$.

On a

$$\begin{aligned} \int \sum \left(\frac{dV + tdU}{dx} \right)^2 dv &= \int \sum \left(\frac{dV}{dx} \right)^2 + 2t \int \sum \frac{dV \cdot dU}{dx} dv \\ &\quad + t^2 \int \sum \left(\frac{dU}{dx} \right)^2 dv. \end{aligned}$$

Ce polynôme du second degré en t doit atteindre son minimum pour $t = 0$, donc

$$\int \sum \left(\frac{dV \cdot dU}{dx dx} \right) dv = 0.$$

Le théorème de Green donne d'autre part

$$\int \sum \frac{dV}{dn} d\omega = \int \sum \left(\frac{dV}{dx} \frac{dU}{dx} \right) dv + \int U \Delta V dv.$$

D'après les propriétés de U l'intégrale $\int U \frac{dV}{dn} d\omega$ est nulle sur S .

En résumé, quelle que soit la fonction U on a

$$(1) \quad \int U \Delta V dv = 0.$$

Cette condition exige que ΔV soit identiquement nul, sans quoi en choisissant la fonction U , dont on peut disposer arbitrairement, de telle sorte qu'elle soit toujours de même signe que ΔV , l'intégrale (1) aurait tous ses éléments positifs, et par suite ne pourrait être nulle. Le problème de Dirichlet admet donc toujours une solution.

REMARQUE. — Cette démonstration, dont on s'est longtemps contenté, n'est pas rigoureuse, on en possède qui sont tout à fait satisfaisantes, mais extrêmement longues.

Distribution de l'électricité à la surface des conducteurs. — Soit M la charge électrique de la surface S du conducteur. S'il n'y a pas de masses attirantes à l'extérieur de S on aura pour tous les points de cet espace $\Delta V = 0$, de plus V est nul à l'infini et prend la valeur constante V_0 sur le conducteur et en tous les points intérieurs à S .

La recherche de la distribution de l'électricité consiste à trouver une fonction V satisfaisant à toutes ces conditions. Le problème de Dirichlet permet de déterminer une fonction V' s'annulant à l'infini, vérifiant l'équation $\Delta V' = 0$ et égale à l'unité en tous points de S . Connaissant V' on aura $V = V' V_0$.

Pour un point $P(x, y, z)$ très éloigné, on peut remplacer l'attraction du corps par celle qu'exercerait un de ses points où l'on concentrerait toute la charge M ; le rapport $\frac{V}{M}$ où $r = OP$, a

pour limite l'unité lorsque r croît indéfiniment, donc, :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V'}{M} = \frac{1}{V}.$$

Connaissant V' et M on déduit de là le potentiel V_0 à l'intérieur du conducteur. La fonction V se trouve alors entièrement déterminée.

La formule $4\pi\delta = \frac{dV}{dn}$ permet ensuite de calculer la densité électrique en un point du conducteur.

THÉORÈME. — Le potentiel en un point P reste le même lorsqu'on substitue au conducteur électrisé primitif une surface de niveau également chargée et laissant le point à l'extérieur.

La surface d'un conducteur est une surface de niveau. Considérons une seconde surface de niveau quelconque S et imaginons qu'elle limite un conducteur sur lequel serait distribuée la même quantité M d'électricité que sur S . Soient V le potentiel en un point dû à S , et V' le potentiel au même point dû à S' , on a

$$\Delta V = 0 \quad \Delta V' = 0$$

de plus à l'infini $V = 0$, $V' = 0$.

Le potentiel sur S' est une constante V_1 puisque S' est une surface de niveau pour S . En considérant S' comme un conducteur, il a en chacun des points de sa surface un potentiel constant V_0' . La fonction

$$V - \frac{V_1}{V_0'} V'$$

satisfait à l'équation de Laplace et est nulle pour un éloignement infini; ayant la valeur zéro sur S' , elle sera nulle en tous les points extérieurs à S' . Donc le rapport $\frac{V}{V'}$ est constant.

Si P s'éloigne à l'infini la limite de $\frac{V}{V'} = 1$, donc $V = V'$.

REMARQUE. — Si à l'intérieur d'une sphère S il n'y a pas de masses attirantes, la fonction V est finie continue ainsi que toutes ses dérivées à l'intérieur de cette sphère.

Soit en effet dm un élément de masse attirante, et r sa distance au point attiré, on aura :

$$V = \int \frac{dm}{r}.$$

Si DV désigne une dérivée d'ordre quelconque de V , par exemple la dérivée $\frac{d^{m+n+p}V}{dx^m dy^n dz^p}$ on a

$$DV = \int dm D\left(\frac{1}{r}\right).$$

Il est aisé de vérifier que $D\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{P}{rK}$,

P étant un polynôme entier par rapport aux coordonnées du point attiré et aux coordonnées de l'élément attirant dm .

Il résulte de là que $D\left(\frac{1}{r}\right)$ ne peut devenir infini que si r s'annule, ce qui est impossible si le point attiré est intérieur à la sphère S et toutes les masses attirantes extérieures.

Donc $D\left(\frac{1}{r}\right)$ et par conséquent la dérivée DV est finie. Toutes les dérivées de V sont finies, elles sont donc aussi continues puisqu'une fonction dont les dérivées sont finies est continue.

2° Si la densité de la matière attirante n'est pas nulle à l'intérieur de S , mais constante et égale à ρ , le résultat précédent subsiste encore.

Posons en effet $V = V' + V''$, V' se rapportant à l'attraction des masses extérieures à S et V'' à l'attraction des masses intérieures, V' est fini et continu ainsi que toutes ses dérivées d'après ce qui précède ; il en est de même de V'' puisque c'est le potentiel d'une sphère homogène par rapport à un point intérieur ; il en est donc encore de même pour leur somme V .

CHAPITRE III.

ATTRACTION EXERCÉE PAR UN ELLIPSOÏDE

Etablissons d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME. — Par tout point (x, y, z) passent trois surfaces du second degré homofocales à savoir un ellipsoïde, un hyperboloïde à une nappe et un hyperboloïde à deux nappes.

Considérons l'équation

$$(1) \quad \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$$

dans laquelle b et c sont des constantes. Lorsque le paramètre λ varie, on obtient une infinité de surfaces du second ordre dites homofocales entre elles.

Soit $b^2 < c^2$.

Si λ^2 est inférieur à b^2 , $\lambda^2 - b^2$ et $\lambda^2 - c^2$ sont deux quantités négatives, et par suite l'équation (1) représente un hyperboloïde à deux nappes, l'axe des x étant l'axe réel. Pour λ^2 compris entre b^2 et c^2 l'équation (1) donne des hyperboloïdes à une nappe car le coefficient de z^2 seul est négatif; enfin on obtient des ellipsoïdes pour les valeurs de λ^2 qui surpassent c^2 : dans ce cas les coefficients de x^2 , y^2 et z^2 sont en effet positifs.

Equation des trois quadriques. — Reprenons l'équation

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1.$$

Chassant les dénominateurs il vient :

$$\begin{aligned} \lambda^2 (\lambda^2 - b^2) (\lambda^2 - c^2) - x^2 (\lambda^2 - b^2) (\lambda^2 - c^2) - y^2 \lambda^2 (\lambda^2 - c^2) \\ - z^2 \lambda^2 (\lambda^2 - b^2) = 0. \end{aligned}$$

Cette équation est du troisième degré en λ^2 et a ses trois racines réelles et positives. Substituons en effet à λ^2 les quantités

$$0, \quad b^2, \quad c^2, \quad +\infty$$

on trouve pour les signes des substitutions $-$, $+$, $-$, $+$ si l'on tient compte de l'hypothèse $b^2 < c^2$.

Soient ν^2 , μ^2 et ρ^2 les racines correspondant respectivement aux intervalles

$$0, b^2; \quad b^2, c^2; \quad c^2, +\infty;$$

d'après ce qui précède :

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1$$

est un ellipsoïde.

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} = 1$$

est un hyperboloïde à une nappe et

$$\frac{x^2}{\nu^2} + \frac{y^2}{\nu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\nu^2 - c^2} = 1$$

est un hyperboloïde à deux nappes.

Coordonnées elliptiques d'un point. — Les valeurs ρ , μ , ν qui correspondent au point (x, y, z) se nomment, les *coordonnées elliptiques* du point.

Il est aisé de voir que deux quelconques des trois surfaces (ρ, μ, ν) se coupent orthogonalement. Considérons les surfaces

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1 \quad (E)$$

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} = 1 \quad (H_1)$$

et envisageons un point de leur intersection.

Pour (E) le plan tangent en ce point a ses cosinus directeurs proportionnels à :

$$\frac{x}{\rho^2}; \quad \frac{y}{\rho^2 - b^2}; \quad \frac{z}{\mu^2 - c^2}.$$

Le plan tangent au même point à la surface H_1 a ses cosinus directeurs proportionnels à :

$$\frac{x}{\mu^2}; \quad \frac{y}{\mu^2 - b^2}; \quad \frac{z}{\mu^2 - c^2}.$$

Il faut pour que les deux surfaces soient orthogonales, que l'on ait en chaque point de leur intersection

$$(1) \quad \frac{x^2}{\rho^2 \mu^2} + \frac{y^2}{(\rho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)} + \frac{z^2}{(\rho^2 - c^2)(\mu^2 - c^2)} = 0.$$

Or, si l'on retranche membre à membre les deux équations (E) et (H_1) il vient, après suppression du facteur commun $\mu^2 - \rho^2$,

$$\frac{x^2}{\rho^2 \mu^2} + \frac{y^2}{(\rho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)} + \frac{z^2}{(\rho^2 - c^2)(\mu^2 - c^2)} = 0$$

c'est-à-dire la condition (1) d'orthogonalité.

Transformation des coordonnées cartésiennes en coordonnées elliptiques. — Exprimons maintenant x , y et z , coordonnées cartésiennes d'un point, au moyen de ses coordonnées elliptiques ρ , μ et ν . Pour cela partons de l'identité

$$\begin{aligned} \lambda^2 (\lambda^2 - b^2) (\lambda^2 - c^2) - x^2 (\lambda^2 - b^2) (\lambda^2 - c^2) - y^2 \lambda^2 (\lambda^2 - c^2) \\ - z^2 \lambda^2 (\lambda^2 - b^2) = (\lambda^2 - \rho^2) (\lambda^2 - \mu^2) (\lambda^2 - \nu^2). \end{aligned}$$

Faisant successivement dans cette identité

$$\lambda^2 = 0, \quad \lambda^2 = b^2, \quad \lambda^2 = c^2,$$

il vient :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\rho \mu \nu}{bc}; \quad y = \sqrt{\frac{(\rho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}{b^2(c^2 - b^2)}}, \\ z &= \sqrt{\frac{(\rho^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)}{\rho^2(c^2 - b^2)}} \end{aligned}$$

Définition des points correspondants. — Prenons un point M de coordonnées elliptiques ρ , μ et ν sur un ellipsoïde E ayant pour équation

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1.$$

Les axes de cet ellipsoïde sont :

$$\rho; \sqrt{\rho^2 - b^2}; \sqrt{\rho^2 - c^2}.$$

Soit M' un point de coordonnées elliptiques ρ' , μ' et ν' pris sur un ellipsoïde E' homofocal au précédent (fig. 205). Les points M et M' sont dits *correspondants* sur les ellipsoïdes E et E' si les deux autres coordonnées elliptiques (μ, ν) (μ', ν') sont telles que $\mu = \mu'$, $\nu = \nu'$.

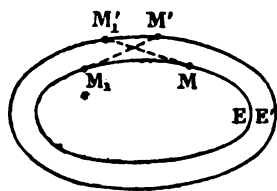


Fig. 205.

Si (x, y, z) sont les coordonnées du point M et (x', y', z') celles du point correspondant M' on a

$$x = \frac{\rho\mu\nu}{bc}, \quad x' = \frac{\rho'\mu\nu}{bc}$$

$$\text{d'où } x' = x \frac{\rho'}{\rho}.$$

De même

$$y' = y \sqrt{\frac{\rho'^2 - b^2}{\rho^2 - b^2}}$$

et

$$z' = z \sqrt{\frac{\rho'^2 - c^2}{\rho^2 - c^2}}.$$

En conséquence, le rapport des axes de même nom des deux ellipsoïdes est égal au rapport des coordonnées suivant ces axes de deux points correspondants.

THÉORÈME. — Étant donnés deux couples de points correspondants (M, M') (M_1, M'_1) les distances MM'_1 et $M'M_1$ sont égales.

En posant

$$\alpha = \frac{\rho'}{\rho}; \quad \beta = \sqrt{\frac{\rho'^2 - b^2}{\rho^2 - b^2}}; \quad \gamma = \sqrt{\frac{\rho'^2 - c^2}{\rho^2 - c^2}}$$

et prenant deux nouveaux points correspondants

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \quad \text{et} \quad M'_1(x'_1, y'_1, z'_1)$$

on a

$$x'_1 = \alpha x_1; \quad y'_1 = \beta y_1; \quad z'_1 = \gamma z_1.$$

Evaluons les distances MM'_1 et $M'M_1$:

$$\begin{aligned} \overline{MM'_1}^2 &= (x - \alpha x_1)^2 + (y - \beta y_1)^2 + (z - \gamma z_1)^2 \\ \overline{M'M_1}^2 &= (\alpha x - x_1)^2 + (\beta y - y_1)^2 + (\gamma z - z_1)^2. \end{aligned}$$

Il est aisé de voir que ces deux distances sont égales, c'est-à-dire que l'on a

$$\Sigma(\alpha x_1 - x)^2 = \Sigma(\alpha x - x_1)^2.$$

En développant cette condition, il vient :

$$\Sigma \alpha^2 x_1^2 - 2 \Sigma \alpha x x_1 + \Sigma x^2 = \Sigma \alpha^2 x^2 - 2 \Sigma \alpha x x_1 + \Sigma x_1^2$$

d'où

$$\Sigma(\alpha^2 - 1)x^2 = \Sigma(x^2 - 1)x_1^2$$

Reste à vérifier cette égalité. Le premier membre $\Sigma(x^2 - 1)x^2$ a pour valeur :

$$\left(\frac{\rho'^2}{\rho^2} - 1\right)x^2 + \left(\frac{\rho'^2 - b^2}{\rho^2 - b^2} - 1\right)y^2 + \left(\frac{\rho'^2 - c^2}{\rho^2 - c^2} - 1\right)z^2,$$

résultat obtenu en substituant à α, β, γ leurs valeurs en ρ . Mais

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho'^2}{\rho^2} - 1\right)x^2 + \left(\frac{\rho'^2 - b^2}{\rho^2 - b^2} - 1\right)y^2 + \left(\frac{\rho'^2 - c^2}{\rho^2 - c^2} - 1\right)z^2 = \\ (\rho'^2 - \rho^2) \left[\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} \right] = \rho'^2 - \rho^2 \end{aligned}$$

puisque d'après l'équation de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1.$$

Donc $\Sigma(\alpha^2 - 1)x^2 = \rho'^2 - \rho^2$.

En calculant de la même manière l'expression $\Sigma(x^2 - 1)x_1^2$, on trouve qu'elle est aussi égale à la différence $\rho'^2 - \rho^2$.

On voit par là que pour deux couples de points correspondants (M, M') (M_1, M'_1) les distances MM'_1 et $M'M_1$ sont égales.

Attraction d'une couche ellipsoïdale infiniment mince sur un point. — La couche considérée est limitée par deux ellipsoïdes concentriques infiniment rapprochés ayant même direction d'axes et des longueurs d'axes proportionnelles.

Soient A, B, C les axes de l'ellipsoïde extérieur et $A(1-\varepsilon), B(1-\varepsilon), C(1-\varepsilon)$ ceux de l'ellipsoïde intérieur, ε est un infiniment petit. Le volume de la couche est

$$\frac{4}{3} \pi ABC [1 - (1 - \varepsilon)^3] = \frac{4}{3} \pi ABC [-3\varepsilon^2 + \varepsilon^3 + 3\varepsilon]$$

ou

$$4\pi ABC\varepsilon,$$

en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier. Si d est la densité de la couche sa masse est $M = 4\pi ABC\varepsilon d$.

THÉOREME. — L'attraction d'une couche ellipsoïdale infiniment mince sur un point intérieur est nulle.

Considérons un cône infiniment délié ayant son sommet en M ,

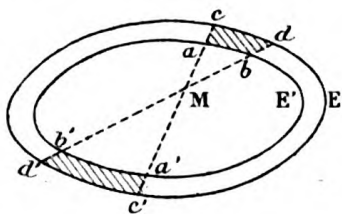


Fig. 206.

les deux nappes de ce cône découpent dans la couche deux éléments de volume $abcd$, $a'b'c'd'$ (fig. 206). Le volume $abcd$ est, à des infiniment petits près, un tronc de cône; ses bases ab et cd sont sensiblement homothétiques et dans le rapport $\frac{Ma^2}{Mc^2}$.

Comme Ma et Mc diffèrent infiniment peu, on considérera comme égales les bases ab et cd et alors le tronc de cône sera assimilé à un cylindre. Le volume de ce petit cylindre oblique est égal au produit de ac par sa section droite $d\omega$; $d\omega$ est la portion de la surface sphérique de centre M et de rayon Ma interceptée par le cône Mab . Donc, vol. $abcd = ac \cdot d\omega$, et l'attraction exercée par l'élément sur le point M est $\frac{ac \cdot d\omega \cdot d}{Ma^2}$.

On aurait de même pour l'attraction de l'élément $a'b'c'd'$ l'expression $\frac{a'c'.d\omega'.d}{Ma'^2}$.

Ces deux attractions sont directement opposées à des infiniment petits près. Leur effet sur le point M sera donc nul si

$$\frac{ac.d\omega.d}{Ma^2} = \frac{a'c'.d\omega'.d}{Ma'^2},$$

c'est-à-dire si

$$\frac{ac.d\omega}{Ma^2} = \frac{a'c'.d\omega'}{Ma'^2}.$$

Or $ac = a'c'$ car les deux ellipsoïdes admettent les mêmes plans diamétraux; de plus $\frac{d\omega}{Ma^2} = \frac{d\omega'}{Ma'^2}$ puisque $d\omega$ et $d\omega'$ sont des éléments de surface se correspondant dans deux systèmes homothétiques.

En envisageant une infinité de cônes déliés ayant leurs sommets au point M on décomposera la couche en couples d'éléments dont l'effet sur le point M est nul, donc l'attraction d'une couche ellipsoïdale infiniment mince sur un point intérieur est nulle.

REMARQUE. — Si V est le potentiel produit par la couche au point M

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \text{et par suite} \quad V = C^e.$$

Distribution de l'électricité à la surface d'un conducteur ellipsoïdal. — L'ellipsoïde est isolé et non influencé. On peut se placer, soit au point de vue de la distribution superficielle, soit au point de vue de la distribution en couche infiniment mince. Dans le premier cas il faut déterminer la densité électrique, dans le second l'épaisseur superficielle. Pour qu'il y ait équilibre, l'électricité doit se répartir de manière que l'attraction sur un point intérieur soit nulle. Il est clair d'après ce qui précède que l'électricité se disposera en une couche ellipsoïdale limitée par deux ellipsoïdes E, E' homothétiques et concentriques.

Calcul de la densité superficielle δ . — Considérons sur l'ellipsoïde E un élément de surface $d\omega$, menons en tous les points du contour de $d\omega$ des normales à la surface et limitons-les à l'ellipsoïde E' (fig. 207). On obtient ainsi un solide assimilable à un petit

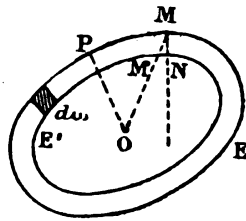


Fig. 207.

cylindre dont le volume est $ed\omega$, e désignant l'épaisseur électrique évaluée suivant la normale. La masse de cet élément est $ed\omega$. Soit δ la densité superficielle ; on doit avoir $ed\omega = d\omega \cdot \delta$, d'où $\delta = e$.

Menons au point M le plan tangent MP et la normale MN à l'ellipsoïde E' . Joignons le centre O de l'ellipsoïde au point M et abaissons du point O une perpendiculaire OP sur le plan tangent ; le rayon vecteur OM rencontre l'ellipsoïde E' au point M' et les deux triangles semblables $MM'N$, OMP donnent

$$(1) \quad \frac{MN}{OP} = \frac{MM'}{OM}.$$

Le rapport d'homothétie des deux ellipsoïdes E et E' étant $1 + \varepsilon$ on a

$$OM' = OM(1 + \varepsilon) \quad \text{d'où} \quad \overline{OM} - \overline{OM'} = \overline{MM'} = \varepsilon \overline{OM}$$

Comme $\overline{MN} = e$ et $\frac{MN'}{OM} = \varepsilon$, le rapport (1) donne $\frac{e}{OP} = \varepsilon$, d'où $\delta = \varepsilon d$.

Or la masse de la couche est $Q = 4\pi \varepsilon d ABC$, donc

$$\varepsilon d = \frac{Q}{4\pi ABC},$$

par suite

$$\delta = \frac{Q \cdot OP}{4\pi ABC}.$$

par conséquent :

Si une masse M d'électricité est en équilibre sur un ellipsoïde, la densité superficielle en un point est proportionnelle à la charge électrique Q , à la distance du centre de l'ellipsoïde au plan tangent en ce point et inversement proportionnelle au triple du volume de l'ellipsoïde (fig. 209.)

δ est maximum aux extrémités du grand axe où

$$\delta = \frac{Q}{4\pi BC}$$

et minimum aux extrémités du petit axe où

$$\delta = \frac{Q}{4\pi AB}$$

Attraction d'une couche ellipsoïdale infiniment mince sur un point extérieur. — Comme le potentiel est constant à l'intérieur de l'ellipsoïde, la surface de celui-ci est une surface de niveau.

THÉOREME. — Les autres surfaces de niveau sont des ellipsoïdes homofocaux au précédent.

Considérons d'une part la couche infiniment mince comprise entre deux ellipsoïdes E, E' d'axes $A, B, C; A(1-\varepsilon), B(1-\varepsilon), C(1-\varepsilon)$ et d'autre part l'ellipsoïde E_1 homofocal de E , ayant pour axes $\alpha A, \beta B, \gamma C$ (fig. 208).

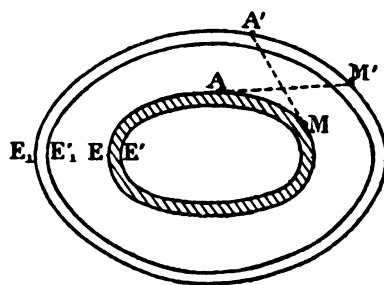


Fig. 208.

Prenons un point $M(xyz)$ sur E et un point $M'(x'y'z')$ sur E_1 , ils seront correspondants si l'on a :

$$x' = \alpha x, \quad y' = \beta y, \quad z' = \gamma z.$$

En multipliant les coordonnées de E et E' respectivement par α, β et γ , on obtient les ellipsoïdes E_1 et E'_1 , limitant une nouvelle couche infiniment mince ; l'ellipsoïde E'_1 a pour axes $\alpha A(1-\varepsilon), \beta B(1-\varepsilon), \gamma C(1-\varepsilon)$.

Le volume de la couche (E, E') est $4\pi ABC\varepsilon$ (en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier) ; le volume de la seconde couche est $4\pi ABC\alpha\beta\gamma$.

En général la transformation homographique précédente a pour effet de multiplier les volumes par le produit $\alpha\beta\gamma$.

Prenons les points correspondants $(A, A'), (M, M')$ et évaluons le potentiel V' dû à la couche (E_1, E'_1) au point M , et le potentiel

V dû à la couche (E, E') au point M'. Soient $d\omega$ et $d\omega'$ les volumes des deux éléments correspondants A et A', on a :

$$d\omega' = d\omega \cdot \alpha\beta\gamma; \quad V = \int \frac{d\omega \cdot d}{A'M}; \quad V' = \int \frac{d\omega \cdot d}{A'M} \\ = \alpha\beta\gamma \int \frac{d\omega \cdot d}{A'M}.$$

Comme $AM' = A'M$, on a :

$$V' = V \cdot \alpha\beta\gamma.$$

Or, V' , potentiel en un point intérieur à la couche ellipsoïdale E, E' , est constant, par suite V est constant, donc l'ellipsoïde E est une surface de niveau.

Il a été démontré que si l'on substituait à un conducteur donné une surface de niveau sur laquelle on distribuerait la même quantité d'électricité, l'attraction sur un point extérieur aux deux surfaces restait la même.

Ainsi dans le cas présent on peut remplacer le conducteur primitif par un ellipsoïde homofocal également chargé.

EXERCICES. — Cherchons l'attraction du conducteur E (fig. 208) de forme ellipsoïde sur le point P (fig. 209).

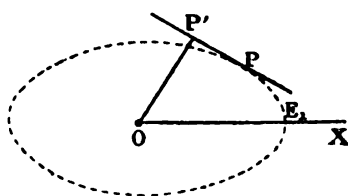


Fig. 209.

Soit un ellipsoïde E_1 , d'axes A', B', C' , homofocal à E et infiniment voisin du point P, celui-ci restant à l'extérieur. Soit M la quantité d'électricité répartie sur E puis sur E_1 ,

l'attraction de E_1 sur le point P est égale à $4\pi\delta$, δ étant la densité électrique.

Or

$$\delta = \frac{M \cdot \overline{OP'}}{4\pi A'B'C'};$$

L'attraction est donc égale à $\frac{M \cdot \overline{OP'}}{A'B'C'}$.

Si le point M. est sur ox , l'attraction F est $\frac{M}{B'C'}$ car dans ce cas $OP' = A'$

Remplaçons M, A, B, C, B', C' par leurs valeurs :

$$\begin{aligned} M &= 4 \pi \varepsilon d ABC, & A^2 &= \rho^2; & B^2 &= \rho^2 - b^2 \\ C^2 &= \rho^2 - c^2, & B'^2 &= \rho'^2 - b^2, & C' &= \rho'^2 - c^2 \end{aligned}$$

il vient

$$F_{0x} = \frac{4 \pi \varepsilon d \rho \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}{\sqrt{(\rho'^2 - b^2)(\rho'^2 - c^2)}}.$$

En résumé, l'attraction exercée par une couche ellipsoïdale infiniment mince sur un point extérieur est proportionnelle : 1° à la masse de la couche ; 2° à la distance du centre de la couche au plan tangent mené au point attiré à l'ellipsoïde homofocal qui passe en ce point, et 3° inversement proportionnelle au produit des axes de cet ellipsoïde.

Attraction d'un ellipsoïde plein et homogène sur un point. — THÉORÈME. — Les composantes de l'attraction parallèles aux axes de l'ellipsoïde sont respectivement proportionnelles aux coordonnées du point attiré évaluées suivant ces axes.

La fonction V est finie, continue, ainsi que ses dérivées, pour tout point dans le voisinage duquel la densité est constante.

La fonction V ainsi que ses dérivées est encore finie et continue pour les points extérieurs ; il y a discontinuité sur la surface ; on a en effet pour les points intérieurs $\Delta V = 4 \pi \rho$ et pour les autres $\Delta V = 0$. La même formule analytique ne peut donc pas donner le potentiel pour tout l'espace.

Supposons l'ellipsoïde plein et homogène décomposé en couches ellipsoïdales infiniment minces du type étudié précédemment. Envisageons en particulier l'ellipsoïde E' qui passe par le point attiré M (fig. 210). Toutes les couches extérieures à E' sont sans effet sur le point M .

Occupons-nous des couches intérieures.

La ligne OM vient rencontrer E en M_1 ; les systèmes $(E'M)$, (EM_1) sont homothétiques et par suite l'attraction de E' sur M est parallèle à l'attraction de E sur M_1 .

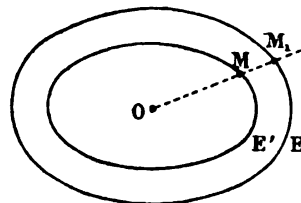


Fig. 210.

Quant à l'intensité de l'attraction, elle est proportionnelle par raison d'homothétie au rayon vecteur OM.

La masse de E' est à celle de E comme le cube de OM est à celui de OM₁. Mais pour avoir l'attraction, il faut diviser les charges par le carré des distances. Or, en passant du système (E'M) au système homothétique (EM₁), les longueurs sont multipliées par $\frac{OM_1}{OM}$.

L'attraction de E' sur M est donc à celle de E sur M₁ comme OM est à OM₁.

Les dérivées $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$, varient par suite proportionnellement à OM quand le point M se déplace sur le rayon vecteur OM₁. En d'autres termes, les dérivées sont des fonctions homogènes et du premier degré en x, y et z. Les dérivées secondes seront alors homogènes et de degré zéro, c'est-à-dire constantes tout le long d'un vecteur OM₁. Mais d'après ce que nous avons dit précédemment elles sont finies et continues. Elles auront par suite même valeur en un point quelconque d'un vecteur quelconque qu'au point O. Ce sont des constantes.

Il résulte de là que V est un polynôme du second degré en x, y et z.

Comme les plans de coordonnées sont des plans de symétrie, ce polynôme ne doit pas changer quand on change x en -x ou y en -y, ou z en -z.

Le polynôme cherché est donc de la forme

$$V = L - \frac{N}{2} x^2 - \frac{P}{2} y^2 - \frac{Q}{2} z^2,$$

Ainsi

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -Nx, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -Py, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -Qz.$$

et l'attraction totale F a pour intensité :

$$F = \sqrt{N^2 x^2 + P^2 y^2 + Q^2 z^2}$$

Calcul de N. — Comme $\frac{dV}{dx} = -Nx$ l'attraction à l'extré-

mité H de l'axe des x est égale à $-NA$: le nombre A est la mesure de OH (fig. 211).

Calculons autrement cette attraction.

Considérons une couche ellipsoïdale infiniment mince com-

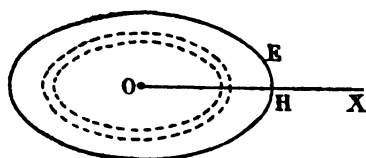


Fig. 211.

prise entre deux ellipsoïdes homothétiques et concentriques, ayant respectivement pour longueur d'axes

$$Au, Bu, Cu; A(u-du), B(u-du), C(u-du)$$

Lorsque u varie de 0 à 1, cette couche se déplace du centre O à la surface E. Or, l'attraction d'une pareille couche sur un point de l'axe des x est

$$F_{0x} = 4\pi\epsilon d \frac{\rho \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - c^2)}}{\sqrt{(\rho'^2 - b^2)(\rho'^2 - c^2)}}.$$

Elle devient dans le cas présent

$$F_{II} = 4\pi d \frac{du}{u} \frac{ABCu^3}{\sqrt{[A^2 - (A^2 - B^2)u^2][A^2 - (A^2 - C^2)u^2]}}.$$

Par suite l'attraction totale est

$$-NA = \int_0^1 4\pi ABC.d \frac{u^2 du}{\sqrt{[A^2 - (A^2 - B^2)u^2][A^2 - (A^2 - C^2)u^2]}}.$$

Or la masse M de l'ellipsoïde est égale à $\frac{4}{3}\pi ABC.d$, par suite $4\pi ABC.d = 3.M$ et l'attraction totale exercée sur le point H devient :

$$-NA = \int_0^1 \frac{3Mu^2 du}{\sqrt{[A^2 - (A^2 - B^2)u^2][A^2 - (A^2 - C^2)u^2]}}.$$

En permutant les lettres A, B, C, on obtiendrait les deux équations qui déterminent P et Q.

Ces trois intégrales sont des intégrales elliptiques. On peut toutefois les intégrer par les procédés élémentaires si l'ellipsoïde est de révolution, c'est-à-dire si l'on a soit $B^2 = C^2$, soit $A^2 = B^2$.

Dans le premier cas l'intégrale se réduit à :

$$\int_0^1 \frac{3Mu^2 du}{A^2 - (A^2 - B^2)u^2},$$

et dans le second cas à :

$$\int_0^1 \frac{3Mu^2 du}{A\sqrt{A^2 - (A^2 - C^2)u^2}}.$$

La résolution de ces intégrales ne présente aucune difficulté.

REMARQUE. — La somme des trois intégrales elliptiques N , P , Q , est constante.

On a en effet

$$\Delta V = -4\pi d$$

or

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -N_x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -P_y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -Q_z,$$

donc

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -(N + P + Q) = -4\pi d.$$

On peut obtenir les mêmes résultats par une autre voie. — 1° Cal-

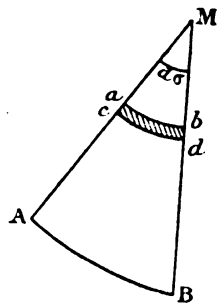


Fig. 212.

culons d'abord l'attraction exercée par un cône infiniment délié d'angle solide $d\sigma$, sur son sommet M (fig. 212). Supposons pour simplifier que la densité de la matière attirante soit prise pour unité. Décrivons de M comme centre une série de sphères. Soient $Ma = r$, $Mc = r + dr$ deux d'entre elles. On a :

$$\text{surf. } ab = r^2 d\sigma.$$

Assimilant le volume $abcd$ à un petit cylindre de base ab et de hauteur dr , il vient :

$$\text{vol. } abcd = r^2 d\sigma dr.$$

L'attraction exercée par ce volume sur le point M est par suite :

$$\frac{r^2 d\sigma dr}{r^2} = d\sigma dr,$$

et celle exercée par le cône est :

$$\int_0^{MA} d\sigma dr = \overline{MA} d\sigma.$$

I. *Attraction sur un point intérieur.* — Cela posé, considérons un ellipsoïde

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Soit M(x, y, z) un point intérieur.

Évaluons $\frac{\partial V}{\partial x}$.

A cet effet décomposons l'ellipsoïde en cônes infiniment déliés ayant leurs sommets en M (fig. 213) et désignons par α, β, γ les cosinus directeurs de la génératrice MA de l'un deux. Si MA fait avec ox l'angle θ et si la projection de MA sur yoz fait avec oy l'angle φ on a

$$\alpha = \cos \theta, \quad \beta = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma = \sin \theta \sin \varphi$$

puis

$$d\sigma = \sin \theta. d\theta. d\varphi.$$

L'attraction du cône AMA' au point M est $\overline{MA} d\sigma$ et celle du cône BMB' est $\overline{MB} d\sigma$.

La résultante de ces deux attractions est $(MA - MB) d\sigma$.

Soit C le milieu de AB. On a :

$$MA - MB = MC + CA - (CA - MC) = 2MC$$

donc

$$(MA - MB) d\sigma = 2 \overline{MC} d\sigma,$$

ξ désignant la projection de MC sur ox, la composante suivant ox de l'attraction des deux cônes MA et MB, est $2\xi d\sigma$ d'où pour la composante de l'attraction totale

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int \xi d\sigma.$$

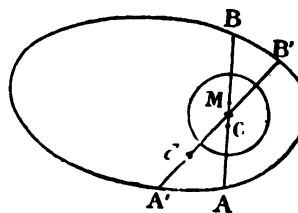


Fig. 213.

Cette intégrale doit être étendue à toute la surface de la sphère décrite de M comme centre avec un rayon égal à l'unité. Le facteur 2 a été supprimé parce qu'en étendant l'intégrale à toute la sphère on retrouve deux fois chacun des cônes MA et MB.

Soient X, Y, Z les coordonnées du point C, on a :

$$\xi = X - x, \quad \eta = Y - y, \quad \zeta = Z - z.$$

Le lieu des points C, milieux des cordes de l'ellipsoïde passant par M, est un ellipsoïde homothétique du précédent et ayant pour équation :

$$(1) \quad \Lambda X^2 + B Y^2 + C Z^2 - \Lambda X x - B Y y - C Z z = 0.$$

Introduisons ξ, η ,

On peut écrire l'équation (1)

$$\Sigma \Lambda X (X - x) = 0$$

ou

$$\Sigma \Lambda (x + \xi) \xi = 0,$$

or :

$$\xi = MC \cos \theta, \quad \eta = MC \sin \theta \cos \varphi, \quad \zeta = MC \sin \theta \sin \varphi,$$

d'où

$$\eta = \xi \cos \varphi \operatorname{tg} \theta, \quad \zeta = \xi \sin \varphi \operatorname{tg} \theta$$

par suite

$$\xi = - \frac{\Lambda x + B y \cos \varphi \operatorname{tg} \theta + C z \sin \varphi \operatorname{tg} \theta}{\Lambda + B \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \theta + C \sin^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \theta}.$$

ξ est une fonction linéaire d' x , d' y et de z , d'où l'expression

$$\xi = H_1 x + H_2 y + H_3 z$$

H_1, H_2, H_3 étant des fonctions de θ et de φ . On a donc :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int \xi d\sigma = x \int H_1 d\sigma + y \int H_2 d\sigma + z \int H_3 d\sigma.$$

θ doit varier de 0 à π , et φ de 0 à 2π .

Il résulte de là que

$$\frac{\partial V}{\partial x}; \quad \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

sont des fonctions linéaires des coordonnées du point M. La symétrie introduite par les axes choisis exige que :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -Nx, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -Py, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -Qz.$$

La question est donc résolue pour le cas du point intérieur.

II. *Le point est extérieur à l'ellipsoïde.* — Le cas de l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur se ramène au précédent au moyen du *théorème d'Ivory*.

PRÉLIMINAIRES. — Calculons d'abord l'attraction d'un cylindre de section infiniment petite sur un point extérieur.

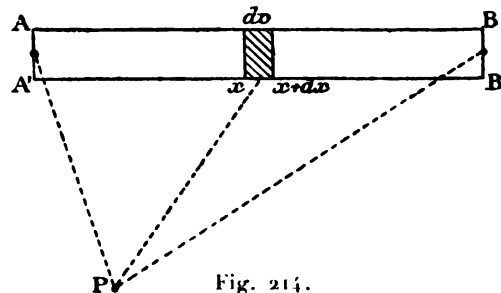


Fig. 214.

Soit $d\omega$ la section d'un cylindre attirant $AA'B'B'$ et P le point attiré (fig. 214).

Cherchons la composante de l'attraction parallèle aux génératrices du cylindre.

La masse de l'élément dv est $\rho dx d\omega$, ou $dx d\omega$ en prenant $\rho = 1$, elle produit au point M le potentiel :

$$\frac{dx d\omega}{r}$$

et par suite on a pour la composante cherchée :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \int dx \cdot d\omega \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \right) = d\omega \left(\frac{1}{PB} - \frac{1}{PA} \right).$$

Supposons que l'attraction soit une fonction de la distance, le potentiel sera représenté par une somme telle que :

$\Sigma m \varphi(r)$ où $\varphi(r)$ est une fonction quelconque de r .

La composante de l'attraction parallèle à AA' sera alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= \int dx d\omega \frac{d}{dx} \varphi(r) \\ &= d\omega \int dx \frac{d}{dx} \varphi(r) \\ &= d\omega [\varphi(PB) - \varphi(PA)].\end{aligned}$$

Théorème d'Ivory. — Considérons maintenant un ellipsoïde d'axes a, b, c , attirant un point extérieur $P. (x, y, z)$ (fig. 215).

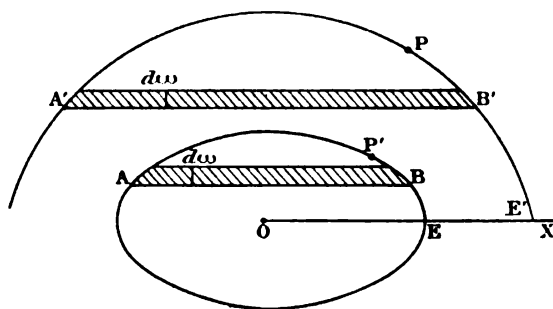


Fig. 215.

Décomposons l'ellipsoïde en cylindres infiniment petits parallèles à ox . L'attraction suivant ox sera d'après ce qui précède :

$$X = \int d\omega [\varphi(PB) - \varphi(PA)]$$

cette intégrale étant étendue à toute la surface E . Faisons passer par P un ellipsoïde E' d'axes a', b', c' homofocal à E , tel que

$$a' = az, \quad b' = b\beta, \quad c' = c\gamma$$

Transformons E en E' . En posant

$$x' = \alpha x, \quad y' = \beta y, \quad z' = \gamma z$$

chaque point de E se transforme en son correspondant sur E' . Le cylindre infiniment petit AB se transforme en un cylindre infiniment petit $A'B'$ de E' parallèle à ox ; AA', B et B' sont des points correspondants. Soient $d\omega'$ la section de ce nouveau

cylindre. On sait, comme le montre du reste l'intégrale transformée de $\int dx dy dz$, que

$$\gamma\alpha\beta \text{ vol. AB.} = \text{vol. A'B'}.$$

On a évidemment dans le cas présent

$$d\omega' = \beta\gamma d\omega.$$

Soit P' le point correspondant de P dans le système des ellipsoïdes homofocaux E, E'. La composante X' suivant ox, de l'attraction de l'ellipsoïde E' sur le point P' a pour expression

$$X' = \beta\gamma \int d\omega [\varphi(P'B') - \varphi(P'A')].$$

Or, il résulte de la correspondance des points P, P'; A, A'; B, B' que :

$$P'B' = PB; P'A' = PA$$

donc

$$(1) \quad \begin{cases} X' = \beta\gamma X \\ Y' = \alpha\gamma Y \\ Z' = \alpha\beta Z. \end{cases}$$

Tel est le théorème d'Ivory : — Connaissant l'attraction de l'ellipsoïde E' sur le point P' intérieur, on en déduit au moyen des formules (1) l'attraction exercée par l'ellipsoïde E sur le point P extérieur.

Ce théorème s'applique quelle que soit la loi de l'attraction, mais ce qui suit résulte de la loi de Newton.

On peut exprimer ce théorème autrement : soient X'', Y'', Z'' les composantes de l'attraction de E' sur P, on a :

$$\frac{X''}{X'} = \alpha; \quad \frac{Y''}{Y'} = \beta; \quad \frac{Z''}{Z'} = \gamma.$$

En effet, pour un point intérieur $\frac{\partial v}{\partial x}$ est proportionnelle à x. Le point P étant sur la surface même de E' peut être traité comme un point intérieur à cet ellipsoïde. On a donc

$$\frac{X''}{X'} = \frac{x \text{ de } M}{x \text{ de } M'} = \alpha.$$

M et M' points correspondants.

Or

$$X' = \beta\gamma X, \quad Y' = \alpha\gamma Y, \quad Z' = \alpha\beta Z,$$

donc

$$\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \frac{Z''}{Z} = \alpha\beta\gamma = \frac{a'b'c'}{abc},$$

On exprime ce résultat en disant que : les attractions des ellipsoïdes E et E' sur le point P sont dirigées suivant la même droite et sont entre elles comme les masses ou comme les volumes si les densités sont les mêmes.

REMARQUE. — Considérons les attractions de trois ellipsoïdes

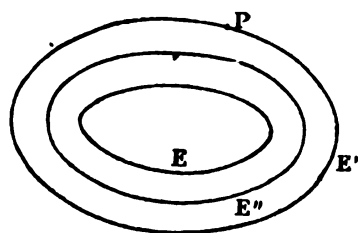


Fig. 216.

homofocaux E , E' , E'' sur un point P (fig. 216) de l'ellipsoïde extérieur. Les attractions de E et de E' sur P sont parallèles en direction et ont des intensités proportionnelles aux masses de E et E' ; il en est de même pour E et E'' , donc :

Les attractions des ellipsoïdes homofocaux E et E'' sur un point extérieur sont parallèles en direction et ont des intensités proportionnelles à leurs masses.

CHAPITRE IV

MÉCANIQUE DES FLUIDES

On appelle *fluide parfait* un corps dont toutes les molécules peuvent glisser les unes sur les autres librement et sans résistance.

La mécanique des fluides se divise en deux parties : l'hydrostatique qui traite de l'équilibre des fluides, et l'hydrodynamique qui s'occupe du mouvement des fluides.

REMARQUE.— Dans la nature, il n'existe pas de fluides parfaits ; il y a toujours plus ou moins de résistance au déplacement relatif des particules. Néanmoins cette résistance est suffisamment petite pour que, dans une première approximation, on puisse considérer les fluides naturels comme des fluides parfaits. Cette approximation est du genre de celle que l'on fait en mécanique rationnelle en considérant un corps solide comme ayant une forme et une étendue invariables.

Parmi les fluides, on peut distinguer : les fluides incompressibles ou *liquides*, et les fluides compressibles ou *gaz*.

REMARQUE. — Les liquides naturels ne sont pas absolument incompressibles ; mais on peut, dans une première approximation, les considérer comme tels et comme ayant par suite une densité constante. La densité de ces corps varie aussi avec la température.

Hydrostatique. — *Action moléculaire.* — Considérons deux masses fluides quelconques M et M' séparées par une surface S (fig. 217).

Cherchons la résultante des actions moléculaires de M sur M' .

Cette résultante ne dépend que de la surface de séparation S ,

c'est-à-dire que si, au lieu des deux portions de fluide M et M' , nous considérons deux autres portions de fluide N et N' séparées par la même surface S , l'action de la masse M sur la masse M' est la même que l'action de la masse N sur la masse N' .

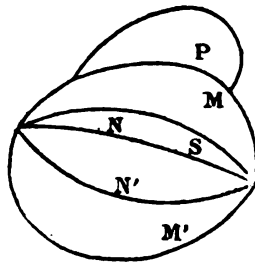


Fig. 217.

En effet, supposons qu'à la masse M on ajoute la masse P , l'action de P sur M' est nulle, car ces deux portions de fluide sont à des distances finies et les actions moléculaires ne s'exercent qu'à des distances infiniment petites. Donc l'action de la masse

$(M + P)$ sur la masse M' est la même que celle de la masse M sur la masse M' .

Supposons maintenant que nous divisions M en deux portions M_1 et M_2 , et M' également en deux portions M'_1 et M'_2 de telle sorte que la surface S soit aussi partagée en deux portions S_1 et S_2 , S_1 séparant M_1 de M'_1 et S_2 séparant M_2 de M'_2 (fig. 218). L'action de M_2 sur M'_1 et l'action de M_1 sur M'_2 sont nulles, car ces masses sont en contact par une ligne que l'on peut regarder comme une surface de séparation infiniment petite. L'action de $M_1 + M_2$ sur $M'_1 + M'_2$ se ramène donc à l'action de M_1 sur M'_1 et de M_2 sur M'_2 .

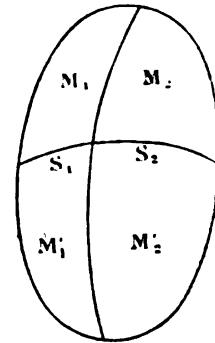


Fig. 218.

Pression hydrostatique.— D'après ce qui précède, la résultante de toutes les pressions qui s'exercent sur la surface de séparation S s'obtient en composant les pressions qui s'exercent sur les surfaces partielles de séparation S_1 et S_2 .

Pour évaluer la pression sur la surface S , on décomposera cette surface en surfaces partielles, on calculera les pressions sur chacune d'elles, et on cherchera leur résultante.

En choisissant les surfaces partielles infiniment petites, elles peuvent être regardées comme planes.

En résumé, la recherche de la pression sur une surface finie se ramène à la recherche des pressions élémentaires.

THÉORÈME. — Les actions exercées sur une surface plane, admettent une résultante unique normale à la surface.

Un système de forces quelconques peut se ramener à une composante N perpendiculaire au plan S et une composante T dans le plan S (fig. 219), ou bien encore on peut ramener un système de forces quelconques à une composante N perpendiculaire à S et à un couple dans le plan S .

Montrons que la composante T est nulle et qu'il n'y a pas non plus de couple dans le plan S . En supposant T différent de zéro, lorsqu'on voudrait faire glisser la portion du fluide M sur la portion M' en sens opposé à T , le travail de T serait négatif, il y aurait résistance au glissement, ce qui est contraire à l'hypothèse puisque nous raisonnons sur un fluide parfait.

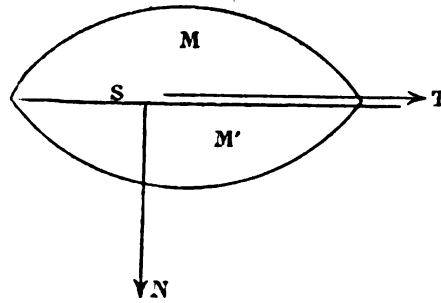


Fig. 219.

L'existence du couple est aussi inadmissible, car lorsqu'on voudrait faire glisser M sur M' par un mouvement de rotation de sens contraire à celui du couple, il y aurait encore un travail résistant.

En vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, la portion M' exerce sur la portion M une action égale et opposée à N , soit $-N$. Ces deux forces doivent être des pressions, car si elles tendaient à éloigner M' de M , l'équilibre serait impossible puisque la résistance à l'extension est nulle.

L'action de M sur M' se réduit donc à une pression normale au plan de séparation S .

COROLLAIRE. — Il résulte de là qu'un fluide parfait est un corps tel que les pressions moléculaires qu'il exerce sur des éléments plans sont toujours normales à ces éléments.

REMARQUE. — Dans le cas des fluides naturels en équilibre la direction de la pression sur les éléments plans diffère de la normale d'une quantité inappréciable. On peut donc, en hydrostatique, supposer les pressions normales, et par conséquent traiter les fluides naturels comme des fluides parfaits.

Pression moyenne. — On appelle *pression moyenne* sur une surface plane S la pression normale N divisée par l'aire S de la surface.

Considérons le cas d'une aire infiniment petite $d\omega$ (fig. 220); si p est la pression moyenne sur cet élément de surface de séparation ou pression au point M , la pression totale sur l'élément sera $p d\omega$.

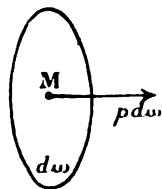


Fig. 220.

Soient x, y, z les coordonnées du centre de gravité de l'élément M et α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à l'élément : p paraît dépendre a priori de $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$, c'est-à-dire de la position et de la direction de l'élément. On est ainsi conduit à écrire :

$$p = f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma).$$

THÉORÈME. — L'intensité p de la pression en M est indépendante de la direction de l'élément, c'est-à-dire de α, β, γ . C'est l'énoncé du *principe de l'égalité de pression dans tous les sens*, ou principe de Pascal.

PRÉLIMINAIRES. — Détachons du liquide une portion comprise à l'intérieur d'un tétraèdre $ABCD$ (fig. 221).

Les arêtes infiniment petites AB, AC, AD sont parallèles aux axes de coordonnées et ont respectivement pour mesure

$$dx, \quad dy, \quad dz.$$

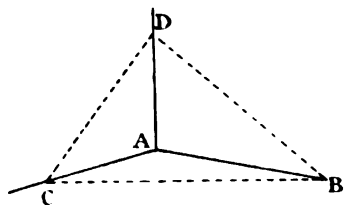


Fig. 221.

Les arêtes étant infiniment petites du premier ordre, les faces du tétraèdre sont des infiniment petits du

second ordre et son volume est du troisième ordre.

Ce tétraèdre est en équilibre sous l'action : 1° des forces extérieures, 2° des pressions qui s'exercent sur les quatre faces.

Remarquons d'abord que les forces extérieures peuvent être négligées parce qu'elles sont infiniment petites par rapport aux autres.

En effet, les pressions sur les faces sont du second ordre, car elles ont pour valeur $p d\omega$, p étant une quantité finie et $d\omega$ un infiniment petit du second ordre.

Les forces extérieures sont, par exemple, la pesanteur, dont l'action sera représentée par $g\rho v$ (g intensité de la pesanteur, ρ densité de l'élément, toutes deux quantités finies, et v volume du tétraèdre infiniment petit du troisième ordre). Il en sera de même pour les autres forces extérieures : la force centrifuge, par exemple, a pour expression $m\omega^2 r$; le produit $\omega^2 r$ est une quantité finie et la masse m du liquide contenu à l'intérieur du tétraèdre est un infiniment petit du troisième ordre.

Il suffit donc d'écrire que les pressions se font équilibre.

DÉMONSTRATION.— Soit p la pression moyenne sur la face BCD dont les cosinus directeurs sont α, β, γ . Le tétraèdre étant infiniment petit, il est légitime de remplacer les coordonnées x, y, z du centre de gravité de BCD par celles de A qui sont fixes et de supposer toutes les pressions appliquées en A.

Soit p_1 la pression moyenne sur ACD et 1, 0, 0 ses cosinus directeurs ; p_2 la pression moyenne sur BAD et 0, 1, 0 ses cosinus directeurs ; p_3 la pression moyenne sur BAC et 0, 0, 1 ses cosinus directeurs.

Projetons ces forces sur l'axe des x et écrivons, puisqu'il y a équilibre, que la somme des composantes est nulle.

La pression sur BCD est égale à $p \times \text{BCD}$, elle est normale à la face BCD ; sa projection sur ox est donc $p \times \text{BCD} \times \alpha$. La composante suivant ox de la pression sur la face ACD est la pression elle-même : $p_1 \times \text{ACD}$. Les deux autres pressions sont respectivement parallèles à oy et à oz , leurs projections sur ox sont nulles, l'équilibre exige par suite que l'on ait

$$p \alpha \times \text{BCD} = p_1 \times \text{ACD}.$$

L'aire ACD étant la projection de l'aire BCD sur le plan des yz , on a

$$\text{ACD} = \text{BCD} \times \alpha,$$

d'où

$$p = p_1,$$

de même

$$p = p_2 = p_3.$$

La pression p est donc indépendante de α, β, γ , ce qui démontre la proposition de Pascal.

Intensité de la pression en un point. — Pour évaluer la pression hydrostatique p au point considéré, isolons dans la masse du fluide en ce point un parallélépipède infiniment petit ayant ses arêtes parallèles aux axes de coordonnées (fig. 222). Soient

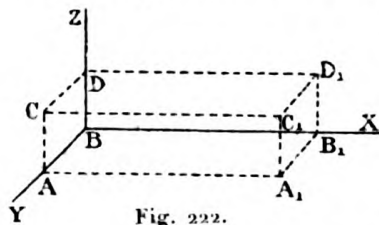


Fig. 222.

$AA_1 = dx$; $CD = dy$; $AC = dz$ les longueurs infiniment petites du premier ordre des arêtes du parallélépipède, ses faces sont alors du second ordre et son volume du troisième. Il faut tenir compte ici des infiniment petits du troisième

ordre et, par suite, des forces extérieures.

Soient mX , mY , mZ les composantes suivant les axes de la résultante de toutes les forces extérieures qui agissent sur la masse isolée m ; X , Y , Z sont des fonctions des coordonnées x , y , z du point considéré.

Dans le cas actuel la masse de liquide isolée est égale à $\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ (le facteur ρ mesure la densité moyenne du fluide à l'intérieur du parallélépipède).

Les composantes des forces extérieures sont alors :

$$\rho \, dx \, dy \, dz \, X; \quad \rho \, dx \, dy \, dz \, Y; \quad \rho \, dx \, dy \, dz \, Z.$$

Projetons toutes ces forces sur les axes et écrivons qu'elles se font équilibre.

Projetons d'abord sur ox . Il n'y a qu'à envisager les pressions qui s'exercent sur les faces $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$; elles sont parallèles à ox et s'y projettent en vraie grandeur, les autres pressions perpendiculaires à ox , ont sur cette direction une projection nulle.

Soient x , y , z , les coordonnées du centre de gravité de la face $ABCD$, les coordonnées du centre de gravité de la face $A_1B_1C_1D_1$ seront $x + dx$, y , z , soit p la pression hydrostatique au point x , y , z , elle est fonction de la position du point mais elle ne l'est pas de la direction de l'élément.

La pression sur $ABCD$ est égale à $p \cdot dy \cdot dz$. Considérons la pression sur la face opposée $A_1B_1C_1D_1$, la pression hydrostatique au centre de gravité de cette face est $p + \frac{dp}{dx} dx$, car x

seul a changé et est devenu $x + dx$. La surface de l'élément est encore $dy \cdot dz$. La pression totale sur l'élément $A_1B_1C_1D_1$ est donc $(p + \frac{dp}{dx} dx) dy \cdot dz$, elle se projette en vraie grandeur sur ox .

Ces deux pressions sur $ABCD$, et $A_1B_1C_1D_1$ sont opposées; leur résultante est égale à leur différence : $\frac{dp}{dx} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$. Cette résultante doit faire équilibre à la composante des forces extérieures parallèles à ox , c'est-à-dire à $\rho dx dy dz X$. On doit donc avoir :

$$\rho dx dy dz X = \frac{dp}{dx} dx dy dz.$$

ou

$$\rho X = \frac{dp}{dx}.$$

Par symétrie, nous écrirons :

$$(1) \quad \frac{dp}{dx} = \rho X; \quad \frac{dp}{dy} = \rho Y; \quad \frac{dp}{dz} = \rho Z,$$

Ces trois équations permettent de calculer la pression hydrostatique en un point quelconque connaissant les forces extérieures qui agissent sur ce point et la pression en un point donné.

APPLICATIONS. — *Surfaces de niveau.* — Supposons que X, Y, Z soient les trois dérivées partielles d'une même fonction V , on a :

$$X = \frac{dV}{dx}; \quad Y = \frac{dV}{dy}; \quad Z = \frac{dV}{dz}.$$

En multipliant la première des équations (1) par dx , la deuxième par dy , la troisième par dz et ajoutant, il vient :

$$(1) \quad \frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy + \frac{dp}{dz} dz = \rho \left[\frac{dV}{dx} dx + \frac{dV}{dy} dy + \frac{dV}{dz} dz \right].$$

Le premier membre de cette égalité est une différentielle exacte, c'est dp . La parenthèse est d'autre part égale à dV , par suite l'équation (1) donne :

$$dp = \rho dV.$$

Le second membre doit donc être une différentielle exacte, ce qui a lieu lorsque ρ est une fonction de V . Posons donc

$$\rho = f(V).$$

Représentons les *surfaces de niveau* définies par la condition $V = C^e$. Comme ρ est une fonction de V , et que celle-ci a une valeur constante en tous les points d'une surface de niveau, il en est de même de la pression p . Donc les surfaces de niveau (qui sont normales en chaque point à la force extérieure puisque $dT = 0$ pour un déplacement sur de telles surfaces) sont des surfaces *de même densité et de même pression*.

Cas d'un liquide pesant. — Un liquide est soumis à l'action de la pesanteur seule. Les composantes des forces extérieures suivant ox et oy sont nulles, $X = 0$, $Y = 0$ et $Z = g$ (l'axe des z est vertical). Les équations (1) se réduisent à :

$$\frac{dp}{dx} = 0; \quad \frac{dp}{dy} = 0; \quad \frac{dp}{dz} = \rho g.$$

La fonction des forces V a pour dérivée 0 par rapport à x et par rapport y , et g par rapport à z , donc

$$V = gz.$$

Les surfaces de niveau dans le cas d'un liquide exclusivement pesant sont des *plans horizontaux*.

REMARQUE. — Comme $dp = \rho dV = \rho g dz$, et que g est constant, ρ doit être seulement fonction de z . Il y a équilibre lorsque la densité est constante sur un même plan horizontal.

Surface libre. — Le niveau libre doit être une surface de niveau ; si par exemple le liquide est contenu dans un vase ouvert, la pression à la surface est la pression atmosphérique qu'on peut considérer comme constante.

Dans le cas des liquides soumis à l'action de la pesanteur seule, la *surface libre est horizontale* puisque les surfaces de niveau sont horizontales.

Cas d'un liquide pesant en rotation autour d'un axe. — Le vase entraîne le liquide qu'il contient en tournant autour de oz avec la vitesse angulaire uniforme ω (fig. 223). Cherchons la figure d'équilibre relatif du liquide par rapport au vase.

Le liquide peut être considéré comme étant au repos et soumis à l'action de deux forces, la pesanteur et la force centrifuge. Pour la pesanteur agissant seule, nous avons trouvé les composantes

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = 0, \quad Z_1 = g.$$

La force centrifuge est dirigée suivant la perpendiculaire abaissée sur oz du centre de gravité de la masse m infiniment petite de l'élément, elle est par suite horizontale, donc $Z_2 = 0$. L'intensité de cette force centrifuge est $m\omega^2 r$, r étant la distance du point m à l'axe oz ; elle est dirigée suivant la perpendiculaire à oz et a pour composantes suivant ox et oy

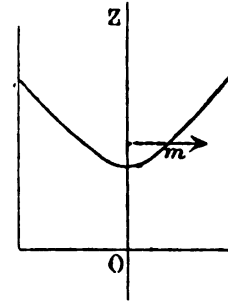


Fig. 223.

$$m^2 \omega r \cos \varphi; \quad m \omega^2 r \sin \varphi$$

φ étant l'angle de ox avec la perpendiculaire abaissée de m sur oz .

Soient φ, r, z les coordonnées semi-polaires de m , on a :

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi$$

Les composantes de la force centrifuge suivant ox et oy sont donc $m\omega^2 x$ et $m\omega^2 y$; elles ont d'ailleurs pour expression mX_2 et mY_2 , d'où

$$X_2 = \omega^2 x; \quad Y_2 = \omega^2 y.$$

On a donc :

$$X = \omega^2 x; \quad Y = \omega^2 y; \quad Z = g$$

par conséquent :

$$\frac{dp}{dx} = \omega^2 x; \quad \frac{dp}{dy} = \omega^2 y; \quad \frac{dp}{dz} = g.$$

Multiplions la première de ces équations par dx ; la deuxième par dy ; la troisième par dz et ajoutons, il vient :

$$dp = \rho[\omega^2 x dx + \omega^2 y dy + g dz]$$

Posons $dV = \omega^2 x dx + \omega^2 y dy + g dz$. L'intégration est possible et donne :

$$V = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) + gz.$$

Les surfaces de niveau étant définies par l'équation $V = C^e$, on voit que ces surfaces sont des *paraboloïdes de révolution autour de oz*.

En tous les points de l'un quelconque de ces paraboloïdes, la densité est la même ainsi que la pression.

La surface libre, qui est une surface de niveau, sera aussi un paraboloïde de révolution autour de l'axe de rotation.

La pression est donnée par une seule intégration. Si le liquide est homogène ρ est constant, on a alors

$$p = \rho V + p_0.$$

Conditions d'équilibre dans le cas général. — Si les facteurs X , Y , Z ne sont pas les dérivées partielles d'une fonction V , l'expression.

$$X dx + Y dy + Z dz$$

n'est plus une différentielle totale exacte. Or, dans l'égalité

$$dp = \rho X dx + \rho Y dy + \rho Z dz$$

le premier membre est une différentielle exacte; il doit donc en être de même du second, ce qui exige que les équations

$$\frac{d(\rho X)}{dy} = \frac{d(\rho Y)}{dx}; \quad \frac{d(\rho Y)}{dz} = \frac{d(\rho Z)}{dy}; \quad \frac{d(\rho Z)}{dx} = \frac{d(\rho X)}{dz}$$

soient satisfaites. S'il en est autrement, l'équilibre est impossible.

Dans le cas d'un liquide homogène $\rho = C^e$, par suite l'équilibre n'est possible que si $Xdx + Ydy + Zdz$ est une différentielle exacte, c'est-à-dire s'il y a une fonction des forces.

EXERCICES. — I. Etant donnée une masse fluide homogène de densité ρ , dont les différentes molécules s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton, calculer la pression en un point intérieur quelconque.

Par raison de symétrie, la masse fluide prend la forme d'une sphère, soit R son rayon. Isolons un élément m (fig. 224) entourant le point considéré M et, du point O comme centre, décrivons une seconde sphère passant par M . La portion du fluide comprise entre les deux sphères n'a pas d'action sur le point m qui lui est intérieur. L'action de la masse fluide, considérée sur l'élément m , se réduit donc à l'action de la sphère de rayon r , c'est-à-dire à celle d'un point de même masse placé en son centre.

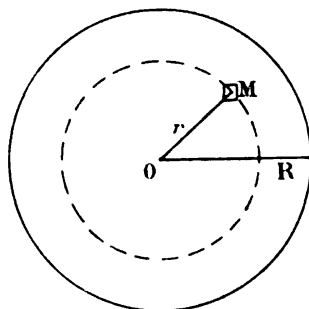


Fig. 224.

L'action cherchée est donc égale à $\frac{mMf}{r^2}$, f représentant l'action de deux unités de masse séparées par une distance mesurée par l'unité de longueur; et M la masse $\frac{4}{3}\pi r^3\rho$ de la sphère agissante.

L'expression explicitée de l'attraction F sur l'élément m est donc finalement $\frac{4}{3}m\rho f r$. Sa projection sur l'axe des x s'obtient en multipliant F par le cosinus de l'angle que forme le rayon OM avec ox . Or, si le point o est l'origine des coordonnées, le produit de r par ce cosinus est précisément l'abscisse du point m . Cette projection étant d'autre part égale à mX , on a

$$mX = -\frac{4}{3}m\rho f \cdot x \quad \text{ou} \quad -X = \frac{4}{3}\rho f \cdot x.$$

de même

$$Y = -\frac{4}{3}\rho f \cdot y; \quad Z = -\frac{4}{3}\rho f \cdot z,$$

x, y, z désignent les coordonnées du point considéré. Multiplions la première de ces équations par dx , la deuxième par dy , la troisième par dz , et ajoutons, il vient :

$$(1) \quad Xdx + Ydy + Zdz = -\frac{4}{3}\rho f (xdx + ydy + zdz)$$

L'équation $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ donne

$$x dx + y dy + z dz = r dr,$$

la parenthèse peut donc être remplacée par $r dr$. En introduisant la fonction des forces V , l'équation précédente (1) s'écrit :

$$dV = -\frac{4}{3} \pi \rho^2 f r dr.$$

Comme d'autre part

$$dp = \rho dV$$

on a

$$dp = -\frac{4}{3} \pi \rho^2 f r dr$$

d'où en intégrant :

$$p = \frac{4}{3} \pi \rho^2 f \left[c - \frac{r^2}{2} \right].$$

Pour déterminer la constante d'intégration c , supposons nulle la pression sur la surface extérieure de la sphère. En faisant $p = 0$ pour $r = R$ on obtient

$$c = \frac{R^2}{2}$$

et l'expression de p devient :

$$p = \frac{2}{3} \pi \rho^2 f (R^2 - r^2).$$

Cette équation montre que la pression en un point quelconque intérieur est proportionnelle à $R^2 - r^2$. La pression p_0 au centre correspond à la valeur $r = 0$, donc

$$p_0 = \frac{2}{3} \pi \rho^2 f R^2.$$

REMARQUE. — Supposons que la sphère ait même volume et même densité moyenne que la terre, et cherchons la pression au centre de la terre en admettant que celle-ci est sphérique et homogène, — ce qui n'a pas lieu en réalité, la terre étant

hétérogène et ayant la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati.

Soit g l'intensité, de la pesanteur, on sait que $g = \frac{f.M}{R^2}$; d'autre part, M désignant la masse totale de la terre, on a

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho R^3.$$

et par suite

$$g = \frac{4}{3} \pi \rho f R.$$

En remplaçant f par sa valeur dans l'expression de p , il vient

$$p = \frac{1}{2} g \rho R = \frac{1}{2} \frac{g \rho R^3}{R^2}.$$

$g \rho R^3$ est le poids d'un cube de densité ρ , densité moyenne de la terre, et de côté R . En chiffres ronds $R = 6\,000$ kilomètres ou 6×10^8 cm, et $g \rho = 5$, donc $p = 15 \times 10^8$ atmosphères.

II. — Une masse fluide homogène, limitée par un ellipsoïde, supposée soumise à l'attraction newtonnienne est de plus animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe des z . A quelle condition cette figure est-elle une figure d'équilibre ?

Soit $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$, l'équation de l'ellipsoïde. Isolons à l'intérieur une masse infiniment petite m dont le centre de gravité a pour coordonnées x, y, z . Les forces qui agissent sur cette masse m sont l'attraction et la force centrifuge. Les composantes de l'attraction suivant les axes ox, oy, oz sont :

$$- mXx; \quad - mPy; \quad - mQz.$$

Si la masse fluide tourne autour de oz avec une vitesse angulaire ω constante, les composantes de la force centrifuge parallèlement aux axes sont :

$$m\omega^2 x, \quad m\omega^2 y, \quad 0.$$

En appelant toujours mX, mY, mZ , les composantes parallèles aux axes de la résultante des forces, on a

$$X = - (N - \omega^2) x; \quad Y = - (P - \omega^2) y; \quad - Z = Qz.$$

En multipliant respectivement ces trois équations par dx , dy , dz et ajoutant, il vient :

$$dV = -(N - \omega^2) x dx - (P - \omega^2) y dy - Qz dz.$$

Par intégration, on a :

$$-V = \frac{N - \omega^2}{2} x^2 + \frac{P - \omega^2}{2} y^2 + \frac{Q}{2} z^2$$

si l'on suppose nulle la constante d'intégration.

Les surfaces de niveau ont pour équation :

$$(1) \quad (N - \omega^2) x^2 + (P - \omega^2) y^2 + Qz^2 = C^2.$$

Elle représente une série d'ellipsoïdes concentriques et homothétiques entre eux. Il faut pour que l'ellipsoïde donné soit une figure d'équilibre qu'il fasse partie de la famille (1), ce qui exige que l'on ait :

$$(2) \quad \frac{N - \omega^2}{\alpha} = \frac{P - \omega^2}{\beta} = \frac{Q}{\gamma}.$$

N , P , Q sont des coefficients que nous avons appris à calculer en fonction de α , β , γ (page 257); les équations (2) sont des équations transcendantes, car N , P , Q s'expriment par des intégrales elliptiques. Leur discussion est néanmoins assez facile, et elle montre qu'on peut satisfaire aux conditions (2), soit par des ellipsoïdes de révolution, soit par des ellipsoïdes à trois axes inégaux qu'on appelle *ellipsoïdes de Jacobi*. Dans tous les cas les surfaces de niveau sont homothétiques et concentriques à l'ellipsoïde limite.

ÉQUILIBRE DES FLUIDES SOUMIS SEULEMENT A L'ACTION DE LA PESANTEUR

L'équation qui donne la pression se simplifie beaucoup dans le cas des liquides pesants car en supposant l'axe des z dirigé de haut en bas on a

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = g.$$

Dans ces conditions $dp = \rho g dz$.

Pour ρ constant cette équation donne immédiatement

$$p = p_0 + \rho g z,$$

p_0 étant la pression dans le plan des xy .

Pratiquement on distingue deux cas : 1° cas d'un gaz enfermé dans un récipient assez restreint pour que sa densité puisse être considérée comme constante, et 2° cas d'un liquide.

Dans le cas d'un gaz, on peut souvent négliger ρ devant p et par suite regarder la pression comme constante dans le récipient.

$$p = p_0.$$

Dans le cas d'un liquide $p = p_0 + \rho g z$.

En prenant le niveau libre pour plan des xy , p_0 est ordinairement la pression atmosphérique.

Pression sur une surface finie. — Principe d'Archimède. — Si un corps solide est plongé dans un liquide, le système étant au repos, il éprouve de la part de ce liquide une *poussée* dirigée de bas en haut, égale et opposée au poids du liquide déplacé.

Démonstration intuitive. — Considérons d'abord une surface fermée S tracée dans une région quelconque du liquide immobile.

Isolons la portion de liquide comprise à l'intérieur de cette surface et écrivons qu'elle est en équilibre.

Cette masse de liquide est soumise à son poids et aux pressions qui s'exercent sur sa surface. Comme il y a équilibre les pressions élémentaires doivent admettre une résultante unique égale et directement opposée au poids du liquide contenu dans la surface S (fig. 225).

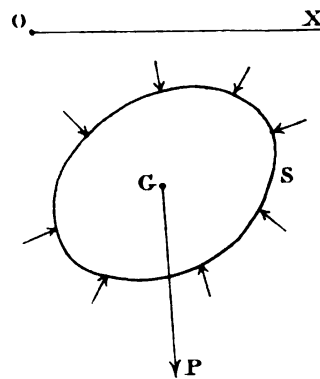


Fig. 225.

Supposons qu'un corps solide limité par une surface identique à S soit substitué au liquide considéré : les pressions qui s'exerçaient sur la surface s ne changent pas, elles doivent donc encore avoir une résultante égale et directement opposée au poids du liquide déplacé.

Cette propriété des fluides a été découverte par Archimède.

La poussée peut être appliquée au centre de gravité du volume déplacé puisqu'elle est directement opposée au poids du fluide appliqué en ce point.

Démonstration analytique. — Sur chacun des éléments de la surface s s'exerce une pression $p d\omega$ normale à la surface et dirigée vers l'intérieur : ses cosinus directeurs sont par conséquent $-\alpha, -\beta, -\gamma$; α, β, γ étant ceux de la portion extérieure de la normale.

En décomposant ces pressions élémentaires $p d\omega$ suivant les trois axes on a pour les composantes :

$$-p\alpha d\omega; \quad -p\beta d\omega; \quad -p\gamma d\omega.$$

Composons entre elles toutes ces pressions. La somme de leurs projections suivant ox est nulle, ainsi que la somme de leurs moments par rapport aux trois axes.

Démontrons d'abord que $\iint p \alpha d\omega = 0$. En effet, en faisant $F = p$, le lemme de Green donne

$$\iint p \alpha d\omega = \iiint \frac{\partial p}{\partial x} dv.$$

Cette dernière intégrale est nulle car les équations :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z$$

se réduisent ici à :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g$$

par suite $\iint p \alpha d\omega = 0$.

Les forces considérées étant parallèles à ox , leurs moments par rapport à ox sont nuls.

Leur moment par rapport à oy est en valeur absolue

$$\iint p z d\omega.$$

Or, d'après le lemme déjà rappelé en faisant $F = pz$, on a :

$$\int \int pzx d\omega = \int \int \int z \frac{\partial p}{\partial x} dv.$$

Ces intégrales sont nulles puisque $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$.

En vertu du même lemme le moment par rapport à oz est nul. Donc les composantes des pressions élémentaires parallèles à ox se détruisent. On verrait de même que les composantes parallèles à oy se détruisent également.

Évaluons maintenant la somme des projections des pressions élémentaires sur oz , c'est

$$-\int \int p \gamma d\omega$$

où d'après le lemme de Green

$$-\int \int p \gamma d\omega = -\int \int \int \frac{\partial p}{\partial z} dv = -\int \int \int \rho g dv.$$

Le signe — montre que la résultante cherchée est dirigée de bas en haut ; $\rho g dv$ est le poids de l'élément de volume et $\int \int \int \rho g dv$ représente le poids du volume de liquide déplacé.

Déterminons un point de la résultante. Pour démontrer qu'elle passe par le centre de gravité du fluide déplacé il suffit de faire voir que la somme des moments des pressions par rapport aux trois axes est nulle, le centre de gravité étant pris pour origine. Or les pressions en question sont parallèles à oz , donc leurs moments par rapport à oz sont nuls ; par rapport à ox le moment de la force $p \gamma d\omega$ est, en valeur absolue, $p y \gamma d\omega$; la somme des moments par rapport à ox est $\int \int p y \gamma d\omega$, ce qui s'écrit d'après le lemme et en faisant

$$F = py :$$

$$\int \int p y \gamma d\omega = \int \int \int y \frac{\partial p}{\partial x} dv = \int \int \int \rho g y dv = \rho g \int \int \int y dv.$$

D'après le choix de l'origine

$$\int \int \int y dv = 0, \quad \text{par suite} \quad \int \int p \gamma d\omega = 0.$$

Donc la somme des moments par rapport à ox est nulle.

On démontrerait de la même manière que la somme des moments par rapport à oy est nulle.

REMARQUE. — Cette démonstration analytique du principe d'Archimède nous apprend, comme la première, que tout corps plongé dans un liquide éprouve de la part de ce liquide une poussée verticale dirigée vers le haut, égale au poids du liquide déplacé, et appliquée au centre de gravité de son volume ; elle montre de plus que les composantes horizontales des pressions se détruisent, et que les composantes verticales ont une résultante unique qui est égale et directement opposée au poids du liquide déplacé. Le raisonnement s'applique sans modification au cas où le fluide est un gaz.

COMPOSITION DES PRESSIONS RELATIVES A UNE SURFACE NON FERMÉE

Distinguons deux cas selon que le fluide qui exerce les pressions est un gaz ou un liquide.

I. **Cas des gaz.** — Supposons le gaz placé dans un récipient assez petit pour que la pression puisse être considérée comme constante à l'intérieur, et supposons de plus ρ assez petit pour être négligeable devant p_0 la formule $p = p_0 + \rho gz$ donne $p = p_0$.

Les pressions qui s'exercent sur les éléments d'une surface fermée ont une résultante unique, égale et opposée au poids du fluide déplacé, et appliquée au centre de gravité du volume de ce fluide.

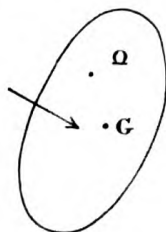


Fig. 226.

Dans le cas considéré cette résultante est nulle puisque ρ est négligeable.

Pression sur une paroi plane. — Soit un plan P (fig. 226) et dans ce plan une surface Ω . Décomposons Ω en éléments infiniment petits $d\omega$, à chaque élément $d\omega$ est appliquée une pression $p_0 d\omega$, normale à l'élément et par suite au plan P . Toutes ces pressions élémentaires étant parallèles ont une résultante unique

parallèle à leur direction et égale à leur somme, c'est-à-dire à

$$p_0 \iint d\omega \quad \text{ou} \quad p_0 \Omega.$$

Cherchons le point d'application de cette résultante. Chacune des composantes est proportionnelle à l'élément $d\omega$ qu'elle sollicite; en appliquant la règle de composition des forces parallèles on voit que leur point d'application est le centre de gravité G de la surface Ω .

Pression sur une paroi courbe. — Pour une portion C de la surface courbe les pressions élémentaires n'étant pas parallèles (fig. 227) n'auront pas en général de résultante unique.

Pour calculer les projections des pressions sur une droite D ,

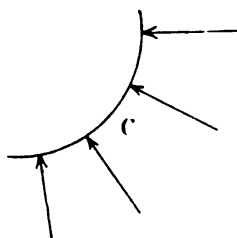


Fig. 227.

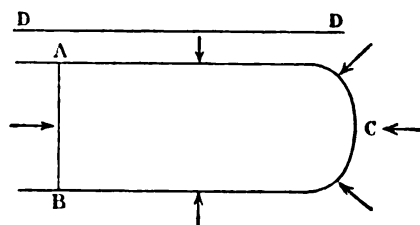


Fig. 228.

construisons un cylindre ayant ses génératrices parallèles à D et passant par le contour de la surface considérée (fig. 228); soit AB une section droite de ce cylindre.

La surface C , le cylindre et sa section droite AB limitent une surface fermée. Les pressions qui s'exercent sur cette surface sont les pressions sur C , les pressions sur la surface cylindrique qui n'interviennent pas puisqu'elles sont normales à D , enfin les pressions sur la surface plane AB .

Soit Ω l'aire de la section droite AB la somme des pressions élémentaires sur AB est $p_0 \Omega$.

Soit X la composante parallèle à D des pressions qui s'exercent sur la surface C (elles sont évidemment dirigées en sens contraire des premières); la somme des composantes cherchées est par suite

$$p_0 \Omega - X.$$

Il faut que cette pression soit nulle, car il vient d'être établi

que lorsqu'on néglige le poids du gaz, la somme des pressions élémentaires sur une surface fermée est nulle ; donc

$$p_0 \Omega - X = 0.$$

En conséquence la somme des composantes, parallèles à D, des pressions élémentaires qui s'exercent sur une surface C est égale à p_0 multiplié par la projection orthogonale de la surface finie C sur un plan perpendiculaire à D.

Calculons maintenant la somme des moments des pressions, pris par rapport à une droite quelconque D ; pour cela construisons la surface de révolution engendrée par la rotation de C autour de D (fig. 229) ; isolons une portion de cette surface, limitée par la surface C, une portion de la surface de révolution, et une section méridienne AB ; les pressions qui s'exercent sur cette surface fermée doivent nécessairement se faire équilibre, par conséquent la somme algébrique de leurs moments par rapport à l'axe D est nulle ; or ces mo-

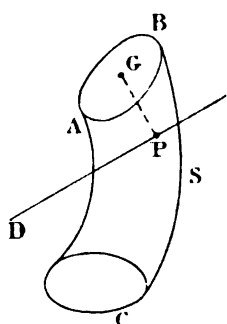


Fig. 229.

ments se composent :

- 1° Du moment M des pressions qui s'exercent sur la surface C ;
- 2° Des moments des pressions qui s'exercent sur la surface de révolution S.

Les moments du deuxième groupe sont tous nuls, car toutes ces pressions normales à la surface rencontrent son axe D ;

3° Du moment des pressions sur la surface plane AB d'aire Ω . Soit G son centre de gravité et GP la distance du centre de gravité à la droite D. Ce moment est égal à $- p \Omega GP$. Le signe $-$ provient de ce que les pressions sur AB tendent à faire tourner le corps en sens contraire des pressions sur C, on a donc

$$M - p \Omega GP = 0.$$

REMARQUE. — On peut présenter ce résultat sous une autre forme. D'après le théorème de Guldin, le volume de la surface de révolution S tout entière est donné par la formule

$$V = \Omega \cdot 2\pi \cdot GP$$

ce qui permet d'écrire :

$$M = \frac{P_0}{2\pi} V$$

d'où ce théorème :

La somme des moments des pressions qui s'exercent sur une surface C par rapport à une droite D est égale au produit de $\frac{P_0}{2\pi}$ par le volume de la surface de révolution engendrée par la rotation de C autour de D.

Cas particulier. — Si la surface C est une demi-sphère (fig. 230), il y a une résultante unique. En effet, limitons la demi-sphère par le plan diamétral AB. Les pressions qui s'exercent sur la surface fermée ainsi définie se font équilibre. Or, la pression sur AB est $p_0 \Omega$, Ω désignant l'aire du grand cercle AB. Les pressions élémentaires qui s'exercent sur la demi-sphère doivent donc avoir une résultante unique faisant équilibre à la résultante des pressions sur la surface plane AB. Il suffit de remarquer d'ailleurs que toutes les pressions élémentaires concourent au centre de la portion de sphère donnée.

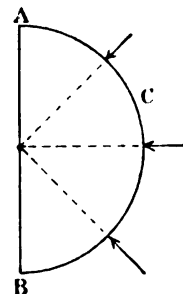


Fig. 230.

Ce résultat permet de calculer la pression à vaincre dans l'expérience des hémisphères de Magdebourg.

II. Cas des liquides. — Soit un liquide enfermé dans un vase et prenons le niveau libre fixe pour plan des xy ; il est soumis à la pression atmosphérique p_0 .

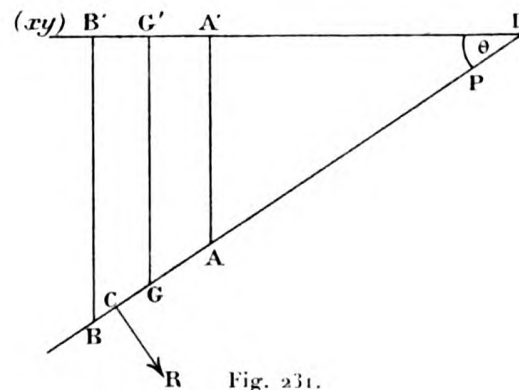
La pression en un point du liquide situé à la profondeur z est donnée par la formule

$$p = p_0 + \rho g z.$$

Changeons de plan des xy : posons $z = z' - \frac{p_0}{\rho g}$ et prenons le plan horizontal $z' = \frac{p_0}{\rho g}$ pour plan des xy . La pression en un point est alors donnée par la formule $p = \rho g z'$.

Le plan horizontal z' s'appelle le *plan de charge*. Tout se passe

La résultante de toutes les pressions exercées sur ce tronc de



Formons la somme de ces composantes verticales ; les pressions qui s'exercent sur $A'B'$ sont nulles, car $A'B'$ est dans le plan de charge où la pression est nulle ; pour les éléments de la

surface cylindrique les pressions sont horizontales, leurs composantes verticales sont donc nulles.

Il n'y a alors qu'à s'occuper des composantes verticales des pressions s'exerçant sur la portion de plan AB, faisant l'angle θ avec le plan des xy. Une pression élémentaire $p d\omega$ a pour composante verticale $p \cos \theta d\omega$. Les composantes verticales sont parallèles entre elles et proportionnelles aux pressions correspondantes.

Or, on sait que lorsqu'on fait tourner un système de forces parallèles autour de leurs points d'application tout en conservant leur parallélisme, et en laissant invariables les rapports de leurs intensités, le point d'application de la résultante ne change pas ; c'est le centre des forces parallèles.

Si donc on appelle R la pression totale sur la portion de plan AB, la résultante de toutes les composantes verticales sera $R \cos \theta$, et son point d'application sera C. Cette force doit faire équilibre au poids du liquide contenu à l'intérieur du tronc de cylindre. Le volume du tronc de cylindre est égal à sa section droite multipliée par la distance des centres de gravité des deux bases.

$$V = \overline{GG'} \cdot (\overline{A'B'}).$$

Le poids du tronc est égal à

$$\overline{GG'} \cdot (\overline{A'B'}) \cdot \rho g.$$

Or,

$$(\overline{A'B'}) = (\overline{AB}) \cos \theta,$$

donc

$$R \cos \theta = \overline{GG'} \cdot \rho g \Omega \cos \theta,$$

d'où

$$R = \overline{GG'} \cdot \rho g \Omega.$$

$\overline{GG'}$ est le z du centre de gravité G ; $\rho g \cdot \overline{GG'}$ est la pression au point G, donc

$$R = \Omega \times \text{pression en G.}$$

Paradoxe hydrostatique. — Pour qu'il y ait équilibre il faut que le centre de pression C et le centre de gravité T du tronc de

cylindre soient sur une même verticale. Dans le cas particulier où le plan P est horizontal (fig. 232), le tronc de cylindre devient un cylindre droit ; T est au milieu de GG'. Le centre de pression C est en G centre de gravité de la base. La pression totale est égale à la base du cylindre multipliée par $\rho g z$.

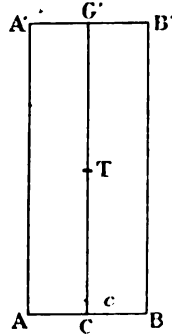


Fig. 232.

Dans le cas d'un vase dont le fond a une surface plus grande que le haut, la pression sur le fond est plus grande que le poids total du liquide, et cependant si on met le vase sur le plateau d'une balance on ne trouve que le poids du liquide; ce qui s'explique facilement puisqu'une partie de la pression sur AB est contre-balancée par la pression sur CD et sur EF (fig. 233).

C'est en cela que consiste le paradoxe hydrostatique.

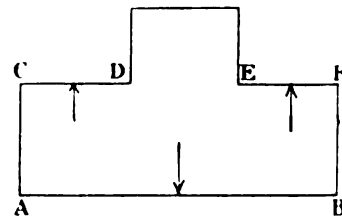


Fig. 233.

Moment de la pression. — Proposons-nous de calculer le moment de la pression résultante R (fig. 234) par rapport à la droite D, intersection du plan P et du plan des xy. La pression R appli-

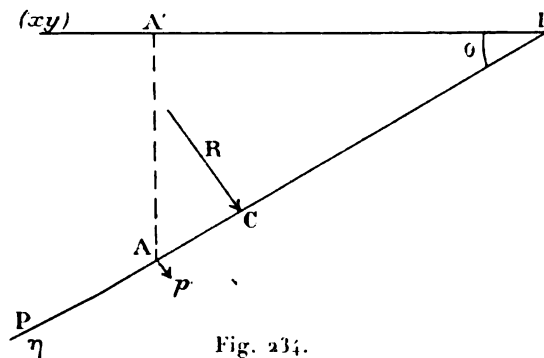


Fig. 234.

quée est normale au plan P, son bras de levier est CD, son moment est donc

$$R \cdot CD.$$

Le moment total des pressions élémentaires a d'ailleurs pour expression

$$(1) \quad \iint p d\omega \cdot AD.$$

Il faut évaluer AD. Soient ξ et η , les coordonnées du point A dans le plan P.

En prenant la droite D pour axe des ξ , on a $AD = \eta$. Comme $p = \rho g \times \overline{AA'} = \rho g \cdot \eta \cdot \sin \theta$; l'intégrale (1) peut s'écrire :

$$\rho g \sin \theta \iint \eta^2 d\omega.$$

Or $\eta^2 d\omega$ est le moment d'inertie de $d\omega$ par rapport à D, l'intégrale $\iint \eta^2 d\omega$ est le moment d'inertie de la surface AB par rapport à D.

Donc, le moment de la pression qui s'exerce sur une surface plane Ω , rapporté à D est égal au produit du moment d'inertie de Ω par $\rho g \sin \theta$.

2° *La surface pressée est courbe.* — Dans le cas d'une surface courbe les pressions élémentaires n'ont plus en général de résultante unique; on peut se proposer toutefois de rechercher la somme des projections de ces pressions sur une droite quelconque.

Calculons d'abord la somme des projections des pressions élémentaires sur la verticale. Pour cela prenons pour surface libre le plan de charge et soit C la surface courbe considérée (fig. 235). Construisons un cylindre ayant des génératrices verticales et passant par le contour de C. Pour la surface fermée ainsi obtenue, la somme des composantes verticales des pressions élémentaires doit faire équilibre au poids du liquide contenu à l'intérieur du volume qu'elle limite. Or, les pressions sur A'B' sont nulles; les pressions sur la surface cylindrique étant horizontales ont des composantes verticales nulles. Reste alors les composantes verticales des pressions sur la surface C dont la

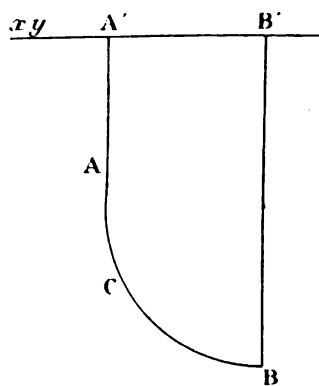


Fig. 235.

somme Z doit être égale au poids du liquide considéré, on a donc :

$$Z = \rho g V.$$

On est ainsi ramené à l'évaluation du volume V .

THÉORÈME. — La somme des projections des pressions qui s'exercent sur une surface courbe, sur un axe horizontal, est égale à la pression qui s'exerce sur la projection de la surface courbe effectuée sur un plan perpendiculaire à la direction de l'axe.

Construisons un cylindre passant par le contour de C ayant ses génératrices parallèles à ox et terminé par une section droite

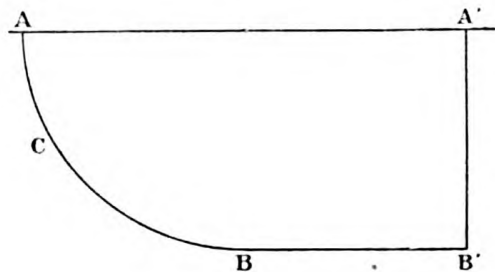


Fig. 236.

quelconque $A'B'$ (fig. 236). D'après le principe d'Archimède appliqué au volume $AA'BB'C$, la somme des composantes de toutes les pressions élémentaires parallèles à ox est nulle.

Soit Ω l'aire de la section droite $A'B'$, c'est-à-dire l'aire de la projection de ACB sur le plan des yz et p la pression au centre de gravité de cette projection.

La pression totale sur la surface plane $A'B'$ est $p\Omega$, comme elle est parallèle à ox , sa composante, sur ox , est aussi $p\Omega$ et elle est dirigée vers la gauche.

Si X est la somme des composantes suivant ox des pressions exercées sur C , on a

$$X - p\Omega = 0 \quad \text{ou} \quad X = p\Omega.$$

Moment des pressions. — Reste à évaluer la somme des moments des pressions par rapport à un axe quelconque. Consi-

dérons d'abord un axe vertical D et soit C, la portion de surface considérée (fig. 237).

Construisons une surface de révolution S ayant pour axe D et passant par le contour de l'aire C. Soit A'B' une surface plane méridienne; M la somme des moments des pressions élémentaires sur C; μ la somme des moments des pressions élémentaires en A'B'. Comme A'B' est une surface plane, on sait trouver son centre de pression et la pression elle-même, ce qui détermine μ .

D'après le principe d'Archimède la somme algébrique des moments des pressions élémentaires doit être égale au moment du poids du liquide contenu dans le volume envisagé. Or, le moment du poids du liquide est nul car le poids est parallèle à D. La somme des moments des pressions élémentaires est donc nulle, par suite

$$M - \mu = 0.$$

Les moments des pressions latérales sont nuls, car étant normales à la surface de révolution ces pressions rencontrent l'axe. D'où le théorème : la somme des moments des pressions relative à une surface courbe par rapport à un axe vertical est égale au moment des pressions qui s'exercent sur la surface méridienne de la surface de révolution.

Recherche analytique du centre de pression. — Considérons une portion Ω d'un plan P (fig. 234), qui fait l'angle θ avec un plan horizontal, soit $d\omega$ l'élément infiniment petit de cette surface plane qui entoure le point A. Menons la verticale du point A, soit A' le point où elle perce le plan de charge pris pour plan des xy.

Soient η et ξ , les coordonnées du point A dans le plan P, en prenant pour axe des ξ la droite d'intersection du plan P et du plan des xy, pour axe des η la droite d'intersection du plan P et du plan des xz et pour axe des z une perpendiculaire à cette droite.

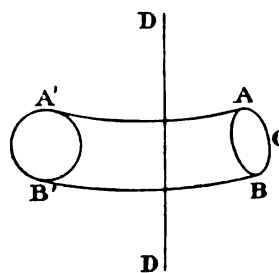


Fig. 237.

On a

$$AD = r_1 \quad \text{et} \quad z = AA' = r_1 \sin \theta.$$

La pression hydrostatique au point A est

$$p = \rho g z \quad \text{ou} \quad p = \rho g r_1 \sin \theta.$$

La pression totale sur Ω est donnée par la formule

$$(1) \quad R = \int \int p d\omega;$$

Cette intégrale étant étendue à toute la portion considérée sur le plan P. L'intégrale (1) peut encore s'écrire

$$R = \int \int \rho g r_1 \sin \theta d\omega \quad \text{ou} \quad \rho g r_{10} \Omega \sin \theta.$$

ξ_0, r_{10} , sont les coordonnées du centre de gravité de la surface Ω et $\rho g r_{10} \sin \theta$ mesure la pression hydrostatique au centre de gravité de la portion de plan Ω . Donc la pression totale exercée sur une surface plane est égale à l'aire de cette surface multipliée par la pression relative à son centre de gravité.

Soient ξ_1, r_{11} , les coordonnées dans le plan P du point d'application de la pression. On a

$$\xi_1 R = \int \int p \xi d\omega = \rho g \sin \theta \int \int \xi r_1 d\omega$$

$$r_{11} R = \int \int p r_1 d\omega = \rho g \sin \theta \int \int r_1^2 d\omega.$$

$\int r_1^2 d\omega$ est le moment d'inertie de la section par rapport à la droite D; $\rho g \sin \theta$ et R sont des quantités connues, cette dernière formule donne ainsi r_{11} . Elle s'applique encore dans le cas d'une paroi verticale $\theta = 90^\circ$: la construction géométrique est alors illusoire.

Somme des moments des pressions par rapport à un axe horizontal. — Soit D l'axe horizontal (fig. 229). D'après le principe d'Archimède, les pressions sur cette surface doivent faire équilibre au poids du liquide qu'elle contient.

Le moment du poids de ce liquide par rapport à D doit donc

être égal à la somme des moments des pressions élémentaires : soit M cette somme, en prenant D pour axe des x ; on a

$$M = \rho g V \cdot y_0$$

x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées du centre de gravité du volume limité par la portion de surface de révolution considérée. Les pressions sur la face plane AB sont nulles, car on suppose que le plan des xy coïncide avec le plan de charge; la somme des moments de ces pressions élémentaires est donc nulle; il en est de même de tous les moments des pressions élémentaires qui s'exercent sur la portion de surface $AA'BB'$, car toutes ces pressions rencontrent l'axe. Le terme M se réduit donc à la somme des moments des pressions qui s'exercent sur la portion donnée de surface courbe c .

On voit que la recherche de la somme des moments M est ramenée à l'évaluation du volume V et des coordonnées (x_0, y_0, z_0) du centre de gravité G de ce volume.

EXERCICE. — *Pression sur une demi-sphère.* — Considérons le plan diamétral AB qui limite la demi-sphère, et prenons pour plan du tableau le plan vertical qui lui est perpendiculaire, le

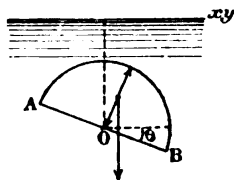


Fig. 238.

plan des xy est le plan de charge. On connaît le centre de la sphère, son rayon R , et l'angle θ que forme le plan diamétral limite avec le plan horizontal.

La pression sur le plan diamétral AB , augmentée de la pression sur la surface sphérique, fait équilibre au poids du liquide contenu dans la demi-sphère; donc, la pression sur la demi-sphère s'obtient en composant le poids du liquide changé de signe avec la pression sur la surface plane AB changée de sens.

Ces deux forces sont dans le plan du tableau, qui est un plan de symétrie; donc elles se rencontrent et admettent par suite une résultante.

Le poids du liquide contenu dans la demi-sphère a pour expression $\frac{2}{3} \pi R^3 \rho g$ et est vertical.

La pression sur AB a pour expression $\pi R^2 \rho g z$ et est perpendiculaire au plan AB.

La résultante de ces deux forces a donc pour intensité

$$R^2 \pi \rho g \sqrt{\left(\frac{2}{3} R\right)^2 + z^2 + 2 \frac{2}{3} \cos \theta. z. R.}$$

Son point d'application s'obtiendrait en prenant la somme des moments des pressions élémentaires par rapport à trois axes, l'un vertical et les deux autres horizontaux.

FORMULE BAROMÉTRIQUE

On appelle *formule barométrique* une relation entre les indications d'un baromètre consulté en deux stations M_0 et M et les altitudes r_0 et r des deux stations placées sur la même verticale ou sur des verticales très voisines.

La valeur g de l'intensité de la pesanteur en un lieu varie en raison inverse du carré de sa distance au centre de la terre de rayon a , et dépend d'autre part de la latitude du lieu.

Désignons par (g) , (p) , (ρ) l'intensité de la pesanteur, la pression atmosphérique et la densité de l'air au point M_0 ; puis par g , p , ρ les mêmes quantités au point M .

En exprimant que l'intensité de la pesanteur varie en raison inverse du carré de la distance du point considéré au centre de la terre, on a

$$(1) \quad \frac{g}{(g)} = \left(\frac{a}{a+r} \right)^2.$$

Une deuxième relation est fournie par l'équation fondamentale de l'hydrostatique; l'atmosphère étant supposée en équilibre on peut écrire :

$$dp = \rho dT.$$

Dans le cas actuel $V = -gr$ et $\frac{dV}{dz} = -g$, par suite

$$dp = -\rho g dr.$$

On a établi d'autre part en physique la relation

$$(3) \quad \rho = \frac{Kp}{1 + \alpha t},$$

dans laquelle K est une constante, p la pression, t la température au point considéré et α le coefficient de dilatation de l'air.

Il faudrait pour expliciter le calcul faire intervenir la loi de variation des températures avec l'altitude; cette loi est inconnue, mais les différentes altitudes à mesurer étant faibles, on commet une erreur peu grave, en supposant la température constante et égale à $\frac{t_0 + t}{2}$, moyenne arithmétique des températures aux stations M_0 et M . La formule (3) serait alors

$$\rho = \frac{Kp}{1 + \alpha \left(\frac{t_0 + t}{2} \right)}.$$

D'après (1) et (3) on a

$$dp = - \frac{Kp(g)}{1 + \alpha \left(\frac{t_0 + t}{2} \right)} \left(\frac{a}{a+r} \right)^2 dr,$$

ou

$$\frac{dp}{p} \left[1 + \frac{\alpha}{2} (t_0 + t_1) \right] = -K(g) a^2 \frac{dr}{(a+r)^2}.$$

Intégrant entre les limites qui correspondent aux deux stations M et M_0 , il vient :

$$L \frac{p}{(p)} \left[1 + \frac{\alpha}{2} (t_0 + t_1) \right] = K(g) a^2 \left[\frac{1}{a+r} - \frac{1}{a} \right]$$

ou bien encore

$$L \frac{p}{(p)} \left(1 + \alpha \frac{t_0 + t_1}{2} \right) = -K(g) a \frac{r}{a+r} = -K(g) \frac{r}{1 + \frac{r}{a}},$$

d'où

$$r = L \frac{(p)}{p} \left[1 + \alpha \frac{t_0 + t_1}{2} \right] \left(1 + \frac{r}{a} \right) \frac{1}{K(g)}.$$

Calculons la pression p qui correspond à la hauteur barométrique h (ramenée à 0°). En désignant par ρ_1 la densité du mercure à 0° , on a

$$p = h \rho_1 g; \quad (p) = (h) \rho_1 (g);$$

d'où

$$L \frac{(p)}{p} = L \frac{(h)(g)}{hg} = L \frac{(h)}{h} + L \frac{(g)}{g}.$$

La relation d'attraction donne :

$$\frac{(g)}{g} = \frac{(a+r)^2}{a^2} = \left(1 + \frac{r}{a} \right)^2,$$

d'où

$$L \frac{(g)}{g} = 2L \left(1 + \frac{r}{a} \right).$$

Comme $\frac{r}{a}$ est très petit, $1 + \frac{r}{a}$ est très voisin de l'unité et $L \left(1 + \frac{r}{a} \right)$ est très voisin de 0, on peut donc le remplacer par $\frac{r}{a}$. Dans ces conditions on a

$$r = \left[L \frac{(h)}{h} + 2 \frac{r}{a} \right] \left[1 + \alpha \frac{t_0 + t_1}{2} \right] \left(1 + \frac{r}{a} \right) \frac{1}{K(g)}.$$

Soient $[g]$ l'intensité de la pesanteur à la latitude 45° et ψ la latitude du lieu.

On sait que

$$(g) = [g] (1 - \beta \cos 2\psi),$$

par suite

$$\frac{1}{(g)} = \frac{1}{[g]} (1 + \beta \cos 2\psi),$$

ce qui permet d'écrire :

$$r = \left[L \frac{(h)}{h} + 2 \frac{r}{a} \right] \left(1 + \frac{r}{a} \right) \left[1 + \alpha \frac{t_0 + t_1}{2} \right] \frac{(1 + \beta \cos 2\psi)}{K[g]}.$$

En négligeant le terme en $\frac{r^2}{a^2}$ il reste :

$$r = \left[L \frac{(h)}{h} \left(1 + \frac{r}{a} \right) + 2 \frac{r}{a} \right] \left(1 + \alpha \frac{t_0 + t_1}{2} \right) \frac{1}{K[g]} (1 + \beta \cos 2\psi).$$

En passant des logarithmes népériens aux logarithmes vulgaires au moyen du module λ , il vient :

$$r = \lambda \left[\log \frac{(h)}{h} \left(1 + \frac{r}{a} \right) + \frac{2}{\lambda} \frac{r}{a} \right] \left[1 + \alpha \frac{t_0 + t_1}{2} \right] \frac{1}{K[g]} (1 + \beta \cos 2\psi).$$

En réduisant en un seul les facteurs connus et les remplaçant par leur valeur numérique, on a

$$r = 18336^m \left[1 + 0,002845 \cos 2\psi \right] \left(1 + 0,004 \frac{t_0 + t_1}{2} \right) \left[\log \frac{(h)}{h} \left(1 + \frac{r}{a} \right) + 0,868589 \frac{r}{a} \right]$$

Le coefficient de dilatation des gaz secs est 0,00367; on tient compte de la vapeur d'eau en remarquant que la densité de l'air atmosphérique décroît lorsque son état hygrométrique augmente. Comme l'air est en général d'autant plus humide qu'il est plus chaud, tout se passe à fort peu près, comme si le coefficient de dilatation était augmenté, aussi prend-on pour coefficient de dilatation 0,004; le binome de dilatation qui entre dans la formule devient alors

$$1 + \frac{2(t_0 + t_1)}{1000},$$

on peut donc enfin écrire

$$r = 18336^m [1 + 0,002845 \cos 2\psi] [1 + 0,002(t_0 + t_1)] \left[\log \frac{(h)}{h} \left(1 + \frac{r}{a} \right) + 0,868589 \frac{r}{a} \right].$$

On mesure d'abord $\frac{(h)}{h}$ et on calcule le logarithme de ce rapport; puis on mesure t_0 et t_1 , après quoi on calcule $\cos 2\psi$.

Calcul de r . — Tout est connu dans la formule excepté $\frac{r}{a}$; dans un premier calcul on suppose $\frac{r}{a} = 0$. Ayant ainsi une valeur approchée de r , on calcule $\frac{r}{a}$, ce qui permet de déterminer une seconde valeur plus exacte pour r ; on continue ce calcul d'*approximations successives*, jusqu'à ce qu'on ait trouvé une valeur r suffisamment approchée, on prend pour a le rayon moyen de la terre.

CONDITIONS D'ÉQUILIBRE DES CORPS FLOTTANTS

GÉNÉRALITÉS. — Considérons un corps flottant S (fig. 239) soit XY le niveau libre du liquide. Le corps est soumis à deux forces : 1° à son poids P qui est une force verticale dirigée de haut en bas et appliquée au centre de gravité G du solide flottant; 2° à la poussée π égale au poids du liquide déplacé, appliquée au centre de gravité C du volume de liquide déplacé et dirigée verticalement de bas en haut. Le point d'application C s'appelle encore centre de poussée et *centre de carène*.

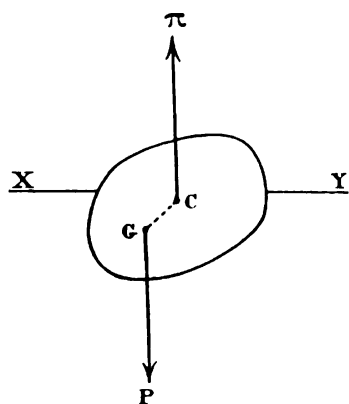


Fig. 239.

Pour l'équilibre, il faut que les deux forces P et π soient égales et directement opposées, ce qui exige que CG soit une verticale et que

$$P = V\rho g \quad \text{car} \quad \pi = V\rho g,$$

P est le poids du corps, V le volume de la partie immergée, ρ la densité du fluide et g l'accélération de la pesanteur.

Définition de la surface de carène. — Imaginons un plan AB (fig. 240) limitant dans le corps flottant un volume V dont le centre de gravité est au point C . Si le plan AB se déplace en

détachant constamment le volume V , le point C décrit une surface appelée *surface de carène*. Si l'on incline le corps flottant de manière à faire coïncider l'un des plans tels que AB avec la surface libre du liquide, le volume immergé est égal à ABP et le point C devient le centre de poussée ou de carène correspondant.

On peut donc dire que la surface de carène est une surface

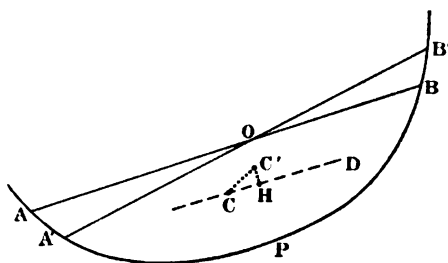


Fig. 240.

invariablement liée au corps solide et sur laquelle se trouve toujours le centre de poussée lorsque le volume plongé est égal à V .

THÉORÈME. — Le plan tangent en un point C de la surface de carène est parallèle au plan AB correspondant.

Soient CD (fig. 240) le plan mené par C parallèlement à AB et C' le centre de poussée relatif à un plan $A'B'$ infiniment voisin de AB et tel que

$$\text{vol. } APB = \text{vol. } A'PB'.$$

Désignons par O la droite d'intersection des deux plans AB , $A'B'$ et par θ leur angle. Le plan CD est tangent à la surface de carène au point C si la distance $C'H$ est un infiniment petit du second ordre, CC' étant du premier.

On voit qu'il en est bien ainsi en appliquant le théorème des moments par rapport au plan CD .

Envisageons d'abord un volume V de centre de gravité G partagé en volumes partiels $v, v', v'' \dots$ de centre de gravité $g, g', g'' \dots$; soient de plus $D, d, d', d'' \dots$ les distances respectives de ces points à un plan quelconque.

On a

$$(1) \quad V = \Sigma v$$

et

$$(2) \quad VD = \Sigma vd.$$

Cette dernière relation exprime que le moment du volume total par rapport à un plan est égal à la somme des moments des volumes partiels par rapport au même plan.

Dans le cas actuel

$$\text{vol. } A'PB' = \text{vol. } APB + \text{vol. } BOB' - \text{vol. } AOA',$$

le moment du volume $A'PB'$ par rapport au plan CD est égal à $\overline{C\Pi}.V$. Donc :

$$\overline{C\Pi}.V = M^t APB + M^t BOB' - M^t AOA'.$$

Comme $\text{vol. } APB = \text{vol. } A'PB'$, on a

$$\text{vol. } AOA' = \text{vol. } BOB' = v.$$

Soient g (fig. 241) le centre de gravité du volume BOB' , g' celui de AOA' et d la distance des deux plans AB et CD .

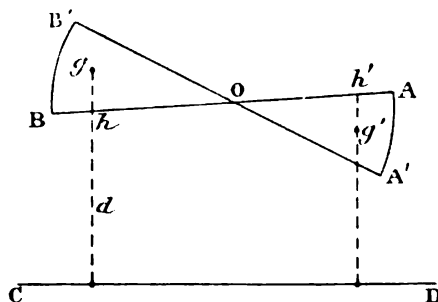


Fig. 241.

Par rapport au plan CD on a en désignant par h et h' les projections de g et g' sur AB :

$$M^t APB = 0, \quad M^t BOB' = v (d + \overline{gh}), \quad M^t AOA' = v (d - \overline{g'h'}).$$

Donc

$$\overline{C\Pi}.V = v (d + \overline{gh}) - v (d - \overline{g'h'}) = + v (\overline{gh} + \overline{g'h'}).$$

Or v , $\overline{gh}$ et $\overline{g'h'}$, ou v et $\overline{gh} + \overline{g'h'}$ sont des infiniment petits

du premier ordre, par suite le produit $v(gh + g'h')$ ou $\overline{C'II}$ est du second ordre, d'où il résulte que $C'H$ est du second ordre puisque V est une quantité finie.

THÉORÈME. — La surface de carène est une surface convexe.
En effet, la relation

$$\overline{C'II} \cdot V = v(\overline{gh} + \overline{g'h'}) \text{ donne } \overline{C'II} = v \frac{\overline{gh} + \overline{g'h'}}{V}.$$

Or, d'après leur définition, les quantités V , v , gh et $g'h'$ sont positives, donc $\overline{C'II}$ est une distance positive. Cela montre que le point C' est toujours avec AB d'un même côté par rapport au plan tangent CD à la surface de carène; donc la surface de carène est convexe.

Recherche des positions d'équilibre du corps. — Dans le cas où le plan AB coïncide avec le niveau libre du liquide le plan tangent à la surface de carène au centre de poussée est parallèle à ce niveau. Pour l'équilibre, V ayant été calculé de manière que $\text{vol. APB} = V = \frac{P}{\rho g}$, il faut que la droite GC soit verticale, c'est-à-dire normale en C à la surface de carène.

Donc, ayant construit la surface de carène, on mènera du point G les normales à cette surface et chacune d'elles, rendue verticale, fournira une position d'équilibre du corps.

Le nombre des positions d'équilibre est par suite égal au nombre des normales à la surface de carène qui passent par le centre de gravité du corps flottant.

Condition de stabilité de l'équilibre. — *Préliminaires.* — Rappelons d'abord une propriété générale des surfaces convexes.

Soient S (fig. 242) une surface convexe, G un point de l'espace, GM un rayon vecteur quelconque de S par rapport au point G et GP la perpendiculaire abaissée de G sur le plan tangent mené à la surface au point M . La distance GP est considérée comme positive ou comme négative suivant que la surface et le point G ne sont pas séparés ou le

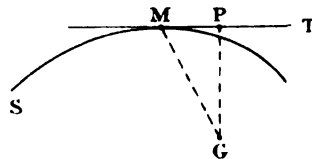


Fig. 242.

sont par le plan tangent MT. Dans le cas de la figure, on a $GP > 0$.

THÉORÈME. — Le minimum de GP correspond à la même position de la tangente que celui du rayon vecteur GM.

Le point G étant pris pour origine des coordonnées, l'équation du plan tangent au point M (x, y, z) de la surface est :

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y).$$

D'autre part

$$\overline{GM}^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

$$\overline{GP} = \frac{z - px - qy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = (z - px - qy) (1 + p^2 + q^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Cherchons le minimum des deux fonctions GM et GP.

Pour le maximum, ou le minimum de $\overline{GM}^2$, il faut que

$$\frac{\partial \overline{GM}^2}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \overline{GM}^2}{\partial y} = 0.$$

Prenons GM pour axe des z, les coordonnées de M sont alors $x = y = 0$. Donc les relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{GM}^2}{\partial x} &= 2x + 2zp; \\ \frac{\partial \overline{GM}^2}{\partial y} &= 2y + 2zq \text{ se réduisent à} \\ \frac{\partial \overline{GM}^2}{\partial x} &= 2zp; \quad \frac{\partial \overline{GM}^2}{\partial y} = 2zq. \end{aligned}$$

Les conditions de maximum ou de minimum deviennent : $p = 0, q = 0$. Or l'équation du plan tangent au point M est :

$$pX + qY - (Z - z) = 0,$$

ou $Z = z$

pour $p = 0, q = 0$.

Dans le cas d'un minimum ou d'un maximum de GM le plan tangent en M à la surface est parallèle au plan xoy et par suite GM est normale à la surface.

Passons à GP. Les conditions $\frac{\partial}{\partial x}(GP) = 0$, $\frac{\partial}{\partial y}(GP) = 0$ donnent

$$pr + qs = 0; \quad ps + qt = 0.$$

Si $rt - s^2 = 0$ le système est indéterminé, mais ce cas est à rejeter, la surface étant supposée convexe.

Pour $rt - s^2 > 0$, on a un seul système de solution à savoir $p = q = 0$. Il exprime que si GP est maximum ou minimum, GM est normale à la surface au point M. Par suite, dans le cas du minimum de GP et de GM, GP se confond avec GM sur la normale au point M.

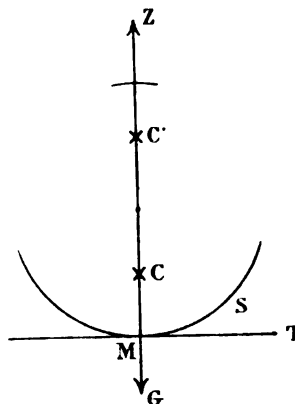


Fig. 243.

Intervention des centres de courbure principaux. — Soient S (fig. 243) la surface, G un point quelconque, GM une normale à S. Choisissons comme axe positif des z la portion Mz de la normale GM, vers laquelle la surface tourne sa concavité au point M. Alors les centres de courbure principaux C, C' seront au-dessus de M. En prenant M comme origine, et les deux plans des sections principales en ce point comme plans des xz et des yz, on a :

$$s = 0, \quad r = \frac{1}{MC}, \quad t = \frac{1}{MC'} \text{ et } r > 0, \quad t > 0.$$

$\overline{GM}$ sera minimum si, ayant développé cette quantité suivant les puissances croissantes de x et de y par la formule de Mac-Laurin, les termes du premier degré disparaissent, ceux du second degré étant positifs, on a en posant $GM = z_0$

$$Z = z_0 + (px + qy) + \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \dots$$

Or pour $x = y = 0$, $p = 0$, $q = 0$; de plus on a vu que $s = 0$, il vient donc :

$$z = z_0 + \frac{1}{2}(rx^2 + ty^2) + \dots$$

Mais

$$\overline{GM}^2 = x^2 + y^2 + z^2 = z_0^2 + x^2 (rz_0 + 1) + y^2 (tz_0 + 1) + \dots$$

Pour le minimum, il faut :

$$rz_0 + 1 > 0; \quad tz_0 + 1 > 0,$$

c'est-à-dire $GM + MC > 0$, $GM + MC' > 0$, ou encore $GC > 0$, $GC' > 0$, conditions qui expriment que le point G est au-dessous des deux centres de courbure principaux. Entre C et C', il n'y aurait ni maximum ni minimum, il y aurait maximum au-dessus de CC'.

Appliquons les mêmes considérations à GP :

$$\overline{GP} = (z - px - qy) (1 + p^2 + q^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

En bornant le développement aux termes du second degré en x et en y, il vient :

$$\begin{aligned} \overline{GP} &= - \left[z_0 - \frac{1}{2} (rx^2 + ty^2) \right] \left[1 - \frac{1}{2} (rx^2 + ty^2) \right] + \dots \\ &= -z_0 + \frac{r}{2} (1 + rz_0) x^2 + \frac{t}{2} (1 + tz_0) y^2 + \dots \end{aligned}$$

Comme on a $r > 0$, $t > 0$, il faut pour le minimum de $\overline{GP}$

$$1 + rz_0 > 0 \quad \text{et} \quad 1 + tz_0 > 0$$

on retrouve les mêmes conditions que précédemment.

Les minimums ont lieu si G est au-dessous de C et C' la surface étant au-dessus de son plan tangent.

Métacentres. — Les points C et C' se nomment les métacentres de la surface en M.

STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE. — En disposant des unités de volume et de poids de façon que $\rho g = 1$, il faut pour l'équilibre :
1° que le volume immergé soit V, V mesurant le poids du corps ;
2° que le centre de poussée et le centre de gravité du corps flottant soient sur une même verticale ; ou encore : on peut

construire la surface de carène et du centre de gravité G mener les différentes normales ; le corps est en équilibre lorsque l'une de ces normales est verticale et le volume immergé égal à V . Il faut distinguer de plus si l'équilibre est stable ou instable.

Les conditions de stabilité sont définies par le théorème suivant :

THÉORÈME. — Lorsqu'un système mécanique quelconque est soumis à l'action de la pesanteur, la condition nécessaire et suffisante de stabilité de l'équilibre est que le centre de gravité du système soit le plus bas possible, c'est-à-dire plus bas dans la position d'équilibre que dans les positions infiniment voisines.

Chercher les positions d'équilibre stable, c'est donc chercher le minimum du moment du poids du système par rapport à un plan horizontal, celui des xy par exemple.

THÉORÈME. — Le moment du liquide et du corps solide par rapport à un plan horizontal est minimum pour une translation verticale lorsque le fluide déplacé a même poids que le corps.

Prenons pour plan horizontal des xy la surface libre du liquide lorsque le volume immergé est V .

Calculons le moment total qui se compose du moment du

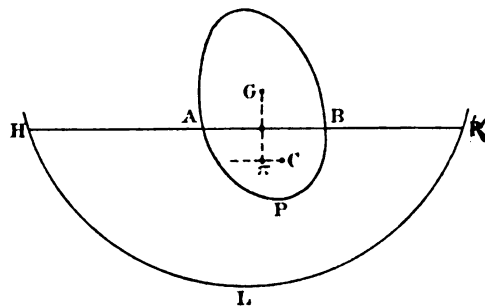


Fig. 244.

liquide et du moment du corps solide, par rapport au plan des xy ; le liquide occupe le volume $(HKL - ABP)$ ou $(HKL - V)$ (fig. 244).

La condition $\rho g = 1$ permet d'écrire :

Moment du liquide = moment de HKL — moment de ABP ;

or, on a en désignant par Z_c le Z du centre de carène C

moment de $V = V \times Z_c$. Le moment du poids du corps solide est égal à V multiplié par le z du point G .

En désignant par M le moment total cherché et par μ le moment constant de HKL , on a donc :

$$M = \mu + V \cdot \overline{G\pi}$$

$G\pi$ étant la distance du point G au plan horizontal qui passe par le centre de poussée, ou encore la différence des z des points G et C .

Enfonçons le corps dans le liquide d'un volume δV , mais en le laissant parallèle à lui-même, le niveau du liquide vient en $H'K'$ (fig. 246). Démontrons que dans cette nouvelle position le moment M par rapport au plan des xy , du système composé du liquide et du corps, est plus grand que dans la première position. On a

$M = \text{moment du liquide} + \text{moment du corps solide.}$

Le moment du liquide est égal au moment du volume HKL ,

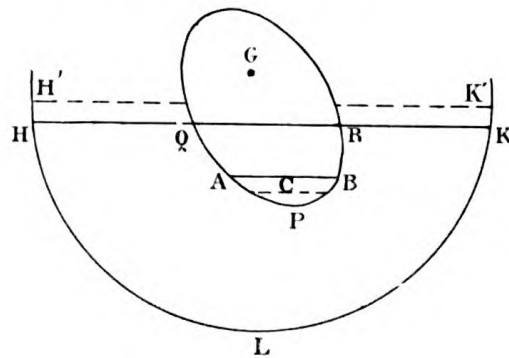


Fig. 245.

ou μ plus le moment de $HH'KK'$, moins le moment du volume de liquide égal à la partie du solide plongé ; en conséquence :

moment du liquide $= \mu + \text{moment } HH'KK' - \text{moment } QRP$;

or, moment $QRP = \text{moment } QRAB + \text{moment } ABP - \text{moment } QRAB + V \times (z \text{ du point } c)$.

De même, moment du corps solide $= V \times (z \text{ du point } G)$.

En appelant encore $G\pi$ la distance du centre de gravité G au plan horizontal passant par c , on a :

$$M = \mu + V \cdot \overline{G\pi} + \text{moment } IHH'KK' - \text{moment } QRAB.$$

Or, le volume $IHH'KK'$ est au-dessus du plan des xy , son moment est positif; au contraire, le moment du volume $QRAB$ est négatif, car $QRAB$ est au-dessous du plan des xy , par suite :

Moment $IHH'KK'$ — moment $QRAB$ est essentiellement positif. Donc lorsque le volume immergé est plus grand que V , le moment total du système est plus grand que $\mu + V \cdot G\pi$.

On arriverait au même résultat, et de la même manière, en supposant que le corps émerge au lieu de s'enfoncer.

COROLLAIRE. — En donnant diverses positions au corps solide le volume V restant constant, le moment total M varie. Comme μ est constant et que $M = \mu + V \times G\pi$, les minimums de M ont lieu en même temps que les minimums de $G\pi$. Donc au lieu de déterminer les différentes positions d'équilibre stable par les minimums de M , on pourra les déterminer par les minimums de $G\pi$.

Recherche des positions d'équilibre stable. — Lorsque le plan AB est horizontal, le plan tangent à la surface de carène au point C est horizontal; $G\pi$ est donc la distance du point G , centre de gravité du corps flottant, au plan tangent à la surface de carène.

La recherche des positions d'équilibre stable revient donc à construire les normales menées du point G à la surface de carène qui correspondent à un minimum de la distance du point G au plan tangent à la surface à leur pied.

THÉORÈME. — Il y a toujours une position d'équilibre stable.

En effet, la surface de carène est une surface fermée; par conséquent parmi les rayons vecteurs menés du point G à la surface il y en a toujours un plus petit que les autres. D'autre part au rayon vecteur minimum correspond une normale minimum, donc il y a toujours une position d'équilibre stable.

Construction des métacentres. — Soit S la surface de carène, G le centre de gravité du corps flottant et GC une normale à S

(fig. 246). Quelle est la condition pour que GC soit minimum ?

Désignons par μ et μ' les métacentres relatifs au point C de la surface S . Dans la position d'équilibre correspondant à la normale GC , cette normale GC est verticale et les métacentres μ et μ' sont tous deux au-dessus de C car la surface de carène tourne sa concavité vers le haut.

Pour que GC soit minimum il faut et il suffit que le point G soit au-dessous des métacentres (p. 303).

Pour construire les métacentres il faut connaître les rayons de

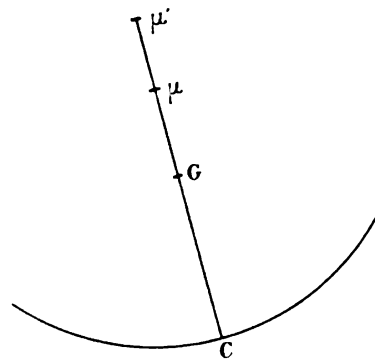


Fig. 246.

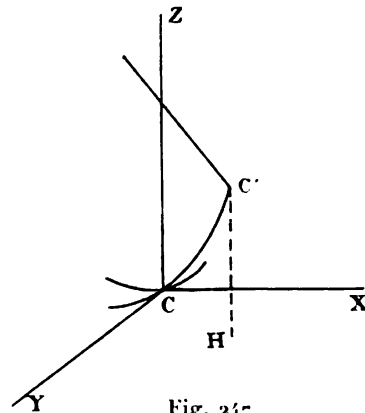


Fig. 247.

courbure principaux de la surface de carène en C . A cet effet, prenons pour plan des xy le plan tangent en C et pour autres plans des xz et des yz les deux plans des sections normales principales (fig. 247). L'équation de la surface est alors :

$$z = \frac{1}{2} (rx^2 + ty^2) + \dots$$

Au point C , les quantités x , y , z , p , q et s sont nulles ; $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{t}$ sont les rayons de courbure principaux à l'origine.

Considérons maintenant sur la surface un point C' infiniment voisin du point C . Si x et y sont des infiniment petits du premier ordre, z est du second ordre, on peut donc écrire, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur :

$$z = \frac{1}{2} (rx^2 + ty^2).$$

Menons la normale en C' , et soit θ l'angle qu'elle fait avec la normale en C qui est l'axe des z , on a :

$$p^2 + q^2 = tg^2 \theta,$$

p et q sont des infiniment petits du premier ordre.

$$p = rx + \dots; \quad q = ty + \dots$$

L'équation $p^2 + q^2 = tg^2 \theta$; devient, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au second :

$$r^2 x^2 + t^2 y^2 = tg^2 \theta = \theta^2,$$

puisque θ est infiniment petit et comme $C'H = z$ est la distance de C' au plan xoy tangent en C , on a :

$$\frac{2C'H}{\theta^2} = \frac{rx^2 + ty^2}{r^2 x^2 + t^2 y^2}.$$

Le second membre de l'équation reste compris entre les deux rayons de courbure $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{t}$, il en est par suite de même du premier.

Calcul du rapport $\frac{2C'H}{\theta^2}$. — Soit AB (fig. 248) un plan horizontal qui détache du corps flottant un volume V , soit C le centre de gravité de ce volume, le plan tangent en ce point à la surface de carène est horizontal.

Considérons un second plan $A'B'$ faisant un angle infiniment petit avec AB . Soit C' le centre de gravité du volume $A'B'P$, la normale à la surface de carène en C' étant normale au plan $A'B'$, fait avec la normale en C un angle égal à θ . Abaissons la perpendiculaire sur le plan tangent en C et calculons le rapport $\frac{2C'H}{\theta^2}$, dont le maximum et le minimum donnent les deux rayons de courbure principaux de la surface au point C .

Démontrons d'abord que la droite O d'intersection des deux plans AB , $A'B'$ passe par le centre de gravité G de la section AB d'aire Ω (fig. 249), et cela en écrivant que les volumes

A'B'P et ABP sont égaux ou encore que les volumes OB'B et OA'A sont égaux et de signes contraires. Décomposons AB en éléments infiniment petits $d\omega$, et menons les cylindres verticaux ayant ces éléments pour bases, soit E le centre de gravité de

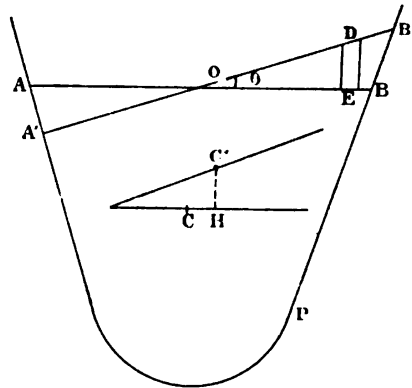


Fig. 248.

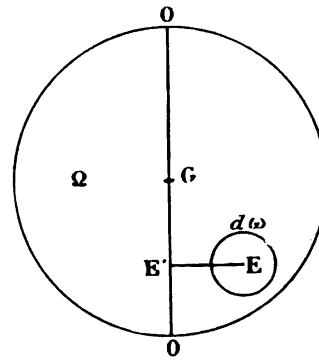


Fig. 249.

l'un des éléments et D le point d'intersection du plan A'B' et de la verticale du point E.

Les volumes $\Lambda A'O$, $BB'O$ sont ainsi décomposés en petits cylindres de volume $d\omega \times DE$.

Evaluons DE. Si EE' est la distance du point E à la ligne d'intersection O, on a : $DE = \theta.\overline{EE'}$.

En écrivant que la somme algébrique de tous ces prismes ou cylindres est nulle, on a :

$$\int_{\theta \times \overline{EE'}} d\omega = 0, \quad \text{ou} \quad \int \overline{EE'} d\omega = 0.$$

Cette équation exprime que le moment de la surface Ω par rapport à la droite d'intersection O est nul ou encore que cette droite passe par le centre de gravité G de Ω .

Calculons C_H en prenant les moments par rapport au plan horizontal CH .

Le moment du volume A'B'P par rapport à CH est V.C'H. Il est égal au moment du volume ABP augmenté du moment du volume OBB'; mais le moment du volume ABP est nul puisque le plan CH passe par son centre de gravité. Donc M'A'B'P = M'DBB'.

Reprenons les cylindres définis plus haut de volume $\theta \cdot \overline{EE'} \cdot d\omega$. Pour avoir le moment d'un de ces cylindres, il faut multiplier son volume par la distance de son centre de gravité au plan C'H. Le centre de gravité de ce cylindre est au milieu de DE, son z est égal au z du point E plus la moitié de la hauteur h du cylindre. Or, le z de E est constant et égal à $\bar{z}$, le plan AB étant horizontal. Le z du centre de gravité est donc $\bar{z} + \frac{\theta \overline{EE'}}{2}$, par suite

$$V \cdot \overline{CH} = \int \theta \cdot \overline{EE'} \left(\bar{z} + \frac{\theta \overline{EE'}}{2} \right) d\omega,$$

ou

$$V \cdot \overline{CH} = \bar{z} \int \theta \overline{EE'} d\omega + \int \frac{\theta^2 \overline{EE'}^2}{2} d\omega.$$

La première intégrale est nulle, car $\int \overline{EE'} d\omega = 0$.

Il reste alors $V \cdot \overline{CH} = \frac{1}{2} \theta^2 \int \overline{EE'}^2 d\omega$.

L'intégrale $\int \overline{EE'}^2 d\omega$ mesure par définition le moment d'inertie de la surface AB par rapport à la droite d'intersection OO; on a donc $2V \cdot \overline{CH} = \theta^2 I$, d'où :

$$\frac{2 \overline{CH}}{\theta^2} = \frac{I}{V}.$$

Les rayons de courbure principaux sont donc respectivement égaux au maximum et au minimum de $\frac{I}{V}$.

Pour les droites qui passent par le centre de gravité, les moments d'inertie présentent un maximum I_0 et un minimum I_1 pour deux droites rectangulaires qui sont les axes principaux d'inertie de la section par rapport aux droites passant par son centre de gravité. On a $I_0 < I < I_1$. Les rayons de courbure principaux seront (fig. 250) :

$$C_{\mu} = \frac{I_0}{V}; \quad C_{\mu'} = \frac{I_1}{V}.$$



Fig. 250.

La condition nécessaire et suffisante de la stabilité de l'équilibre est $GC < C\mu$, ou

$$V. \overline{GC} < I_0.$$

Démonstration directe de la formule V. $GC < I_0$. — Cherchons la condition pour que le centre de gravité soit le plus bas pos-

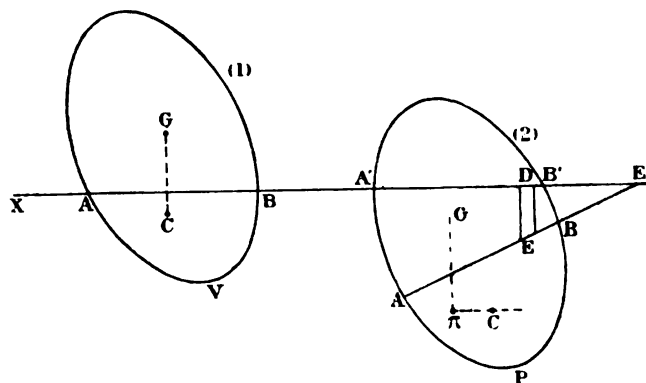


Fig. 251.

sible. Soit (1) (fig. 251) une position d'équilibre du corps flottant. Amenons-le dans la position (2) infiniment peu inclinée sur la première. Prenons pour plan des xy le niveau libre du liquide, et supposons le volume du vase assez grand pour pouvoir négliger la variation de niveau du liquide. Calculons le moment M de la masse totale dans les deux cas ; on a pour la première position $M = \mu + V.GC$, et pour la deuxième position :

$M = \mu$ — moment ABP — moment $ABA'B'$ + moment du corps solide.

Or, moment du corps — moment $ABP = \overline{G\pi}.V$.

GC est resté perpendiculaire à AB , si θ désigne l'angle des deux plans $AB, A'B'$, on a $\overline{G\pi} = \overline{GC} \cos \theta$, et par suite

$$M = \mu + V. \overline{GC} \cos \theta - \text{moment } ABA'B'.$$

Décomposons le volume $AB A'B'$ en cylindres infiniment petits ayant leurs génératrices verticales, et dont les bases $d\omega$ sont dans le plan AB . Soient E et D les centres de gravité des bases. Nous avons $DE = \eta.EE'$ (p. 310).

Le moment par rapport au plan des xy d'un de ces cylindres est :

$$-\overline{DE} \cdot d\omega \times \frac{\overline{DE}}{2} = -d\omega \cdot \frac{\theta^2}{2} \overline{EE'}^2.$$

On a donc :

$$\text{moment ABA'B'} = -\frac{\theta^2}{2} \int \overline{EE'}^2 d\omega.$$

Cette intégrale est le moment d'inertie de l'aire Ω de AB par rapport à la droite d'intersection E' des deux plans AB, A'B'.

$$I = \int \overline{EE'}^2 d\omega$$

$$\text{En conséquence } M = \mu + V \overline{GC} \cos \theta + \frac{\theta^2}{2} I$$

Dans la position d'équilibre, le moment doit être minimum ; on doit donc avoir :

$$\mu + V \overline{GC} < \mu + V \overline{GC} \cos \theta + \frac{\theta^2}{2} I$$

ou

$$V \overline{GC} (1 - \cos \theta) < \frac{\theta^2 I}{2},$$

or

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\theta^2}{2},$$

θ étant infiniment petit.

On doit donc avoir finalement $V \overline{GC} < I$, I étant le moment d'inertie de ω par rapport à une droite quelconque de son plan. Si I_0 est le minimum de I , il faut $V \overline{GC} < I_0$.

Ce minimum se présentera toujours lorsque la droite par rapport à laquelle on prend les moments d'inertie passe par le centre de gravité, car pour cette position de la droite le moment d'inertie est plus petit que pour toute autre position parallèle.

Pour avoir le minimum de I il faudra chercher le minimum des moments d'inertie par rapport aux différentes droites qui passent par le centre de gravité de la section.

Applications. — PROBLÈME I. — Trouver les positions d'équilibre d'un ellipsoïde flottant homogène.

Dans ce cas, le centre de gravité coïncide avec le centre de figure O. Cherchons la surface de carène.

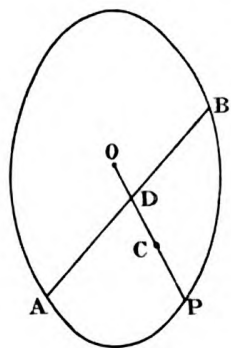


Fig. 252.

Le plan AB (fig. 252) qui détache un volume V détermine sur l'ellipsoïde une ellipse dont le centre est en D. Joignons D au centre O de l'ellipsoïde; OD est le diamètre conjugué des sections parallèles à AB. En coupant l'ellipsoïde par des plans parallèles à AB et infiniment voisins, le volume ABP est décomposé en tranches homogènes, elliptiques, ayant chacune leur centre de gravité au centre de figure sur la droite OD.

Le centre de gravité du volume ABP sera par suite aussi sur OD en un point C.

L'équation de l'ellipsoïde rapporté à ses axes est :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Soit $\alpha x + \beta y + \gamma z = \lambda$, l'équation du plan AB. Les équations de la droite OC sont :

$$\frac{Ax}{\alpha} = \frac{By}{\beta} = \frac{Cz}{\gamma}.$$

Exprimons que le plan tangent à la surface de carène est parallèle au plan AB. Pour cela désignons par x, y, z les coordonnées du point C et par $x + dx, y + dy, z + dz$ les coordonnées d'un point C' infiniment voisin mais tous deux situés sur la surface de carène. Le plan tangent en C, étant parallèle à AB, a pour équation

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = \lambda.$$

Comme il passe par C et par C' on a :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \lambda.$$

et

$$\alpha (x + dx) + \beta (y + dy) + \gamma (z + dz) = \lambda,$$

par suite $\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0$.

En remplaçant α , β , γ par les quantités proportionnelles Ax , By , Cz il vient :

$$Ax dx + By dy + Cz dz = 0$$

d'où en intégrant $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = C^6$.

Cette équation représente un ellipsoïde homothétique et concentrique à l'ellipsoïde proposé ; cet ellipsoïde est la surface de carène. Du centre de l'ellipsoïde on peut mener 6 normales dont les pieds sont les six sommets. Il y a donc 6 positions d'équilibre pour l'ellipsoïde. Les positions stables correspondent au rayon vecteur minimum ; il y a par suite deux positions stables qui correspondent au cas où le petit axe devient vertical.

Si l'ellipsoïde n'était pas homogène, le centre de gravité ne coïnciderait pas avec le centre de figure.

Du centre de gravité, on pourrait mener à la surface de carène, qui est encore un ellipsoïde, 2, 4 ou 6 normales réelles.

Dans le cas de 6 normales, il y a toujours 2 positions d'équilibre stable, dans le cas de 4 normales il y en a une ou deux, et dans le cas de 2 normales il y a une position seulement d'équilibre stable.

PROBLÈME II. — *Déterminer les positions d'équilibre d'un cylindre flottant.* — Considérons d'abord un cylindre flottant de telle sorte que l'une des bases soit tout entière immergée et l'autre tout entière en dehors du liquide.

La surface de carène est alors un parabololoïde quelle que soit la nature du cylindre.

En effet :

Soit Ω la base du cylindre, g son centre de gravité et gg' la parallèle aux génératrices menées par g . Le volume du tronc de cylindre est $V = \overline{gg'} \Omega$.

Le volume V étant constant, $\overline{gg'}$ doit être constant ; posons $\overline{gg'} = z_0$. Le plan AB passe par le point fixe g' . Prenons gg' pour

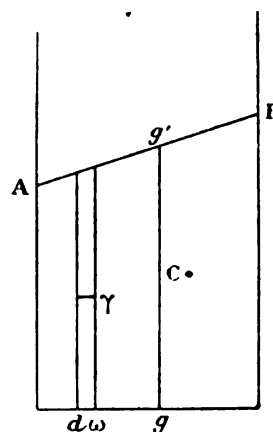


Fig. 253.

axe des z et pour axes des x et des y les deux axes d'inertie de la base passant par g . D'après ce choix on a :

$$\int x \, d\omega = 0; \quad \int y \, d\omega = 0; \quad \int xy \, d\omega = 0.$$

Posons $\int x^2 \, d\omega = A$ et $\int y^2 \, d\omega = B$, A et B étant les moments d'inertie principaux, et soit C un point de la surface de carène. Décomposons la base ω du cylindre en éléments infiniment petits $d\omega$ et considérons des cylindres infiniment minces ayant leurs génératrices parallèles aux génératrices du cylindre proposé et pour base $d\omega$. Leur centre de gravité γ sera au milieu de leur hauteur.

Soit $z = z_0 + \alpha x + \beta y$ l'équation du plan AB , α et β étant des paramètres variables. Les points γ se trouvent sur le plan $2z = z_0 + \alpha x + \beta y$. Le centre de gravité $C(x_1, y_1, z_1)$ du volume immergé total sera dans le même plan et par suite

$$2z_1 = z_0 + \alpha x_1 + \beta y_1.$$

Désignons par V le volume total, par $dv = z \, d\omega$ le volume d'un petit cylindre et prenons les moments par rapport au plan des yz , il vient :

$$x_1 V = \int x \, dv = \int xz \, d\omega,$$

ou

$$x_1 V = z_0 \int x \, d\omega + \alpha \int x^2 \, d\omega + \beta \int xy \, d\omega.$$

La première et la dernière intégrales sont nulles, il reste : $x_1 V = \alpha A$.

On aura de même $y_1 V = \beta B$. Or les coordonnées du point C satisfont à la relation

$$2z_1 = z_0 + \alpha x_1 + \beta y_1.$$

Remplaçons α et β par leur valeur, on a

$$z_1 = \frac{z_0}{2} + \frac{V}{2A} x_1^2 + \frac{V}{2B} y_1^2.$$

La surface de carène est donc un paraboloïde elliptique à axe vertical, dont le sommet est au point $z = \frac{z_0}{2}$; il a pour axe l'axe des z , c'est-à-dire la verticale du centre de gravité de la base du cylindre.

CAS PARTICULIERS. — Le cylindre est homogène de révolution et sa densité est moitié de celle du liquide. Dans ces conditions, le volume immergé est la moitié du volume total. Soit R le rayon

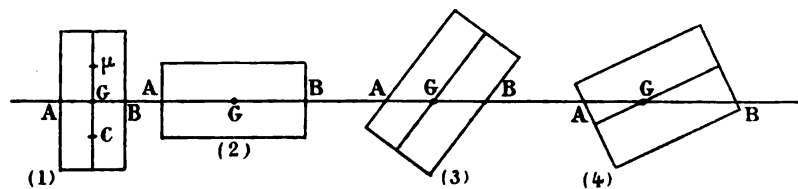


Fig. 254.

de base du cylindre et $2h$ sa hauteur. Les plans AB (fig. 254) passant par le centre de gravité G détachent un volume V moitié de celui du cylindre. Il y a deux positions d'équilibre évidentes par raison de symétrie : celle où l'axe est vertical (1) et celle où l'axe est horizontal (2). Il peut exister encore deux autres positions d'équilibre dans lesquelles l'axe du cylindre occupe une position oblique ; dans l'une (3) une des bases du cylindre est complètement immergée, et l'autre émerge complètement ; dans l'autre (4) les deux bases sont partiellement immergées. Pour les positions (1) et (3) la surface de carène est un paraboloïde de révolution par raison de symétrie. Le paramètre de la parabole méridienne est le rayon de courbure C_μ au sommet, on a :

$$C_\mu = \frac{I}{V},$$

V est le volume déplacé, I le moment d'inertie principal de la section faite par le plan de flottaison par rapport à un axe passant par son centre de gravité ; on a

$$I = \pi \frac{r^4}{4}; \quad V = \pi r^2 h; \quad C_\mu = \frac{r^2}{4h}.$$

Écrivons que l'équilibre est stable :

$$V\overline{GC} < I.$$

Comme $GC = \frac{h}{2}$, on doit avoir $\frac{h}{2} < \frac{r^2}{4h}$ ou $h < \frac{r}{\sqrt{2}}$.

Telle est la condition nécessaire et suffisante pour que la position (1) soit stable.

Considérons la position (2). La section faite par le plan de flottaison est un rectangle de côtés $2r$ et $2h$. Les deux moments d'inertie principaux I_0 et I_1 sont $\frac{4h^3r}{3}$ par rapport au côté r et $\frac{4r^3h}{3}$ par rapport au côté h . Les métacentres μ et μ' sont les centres de courbures principaux de la surface de carène, et on a

$$C\mu = \frac{I_1}{V}; \quad C\mu' = \frac{I_0}{V}.$$

La surface de carène étant une surface de révolution, le point μ se trouve en G sur l'axe. Ainsi $G\mu = \frac{I_1}{V}$;

Pour la stabilité, l'inégalité $GC < C\mu'$ doit être satisfaite, ce qui exige que l'on ait $I_1 < I_0$ ou $r < h$.

Pour $h > r$, la position (2) est stable ; pour $\frac{r}{\sqrt{2}} < h < r$ les positions (1) et (2) sont instables, il y a une position stable qui est (3) ou (4).

Si h est $< \frac{r}{\sqrt{2}}$ la position (1) est stable et (2) est instable.

THÉORÈME. — Si la position d'équilibre (3) existe, elle est certainement stable.

En effet, la surface de carène est un parabolôïde de révolution. L'équilibre stable correspond au rayon vecteur minimum issu du point G . Le point G étant sur l'axe, le problème revient à chercher le minimum des rayons vecteurs pour la parabole méridienne. Du point G partent trois normales à cette parabole, l'une est l'axe et les deux autres symétriques sont GN et GN' . Ces deux dernières correspondent à des minimums, car le point M partant de l'infini, le rayon vecteur GM est d'abord infini,

décroît jusqu'à un minimum GN, pour recroître ensuite jusqu'à un maximum GS.

Donc si les normales GN et GN' sont réelles, elles correspondent à des positions d'équilibre stable.

Si la position d'équilibre (3) existe, il ne doit pas y avoir de position (4).

Cherchons la condition pour qu'il existe une position oblique d'équilibre du système telle que (3).

Soit AB la ligne de flottaison (fig. 256), C le centre de gravité

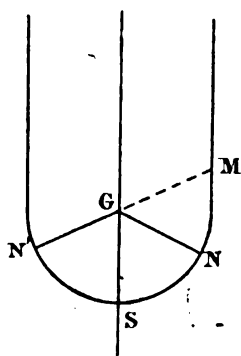


Fig. 255.

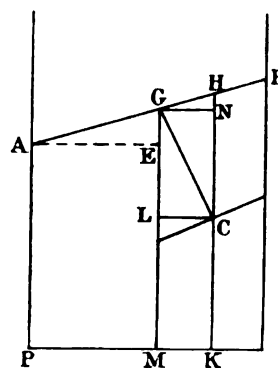


Fig. 256.

du volume $AB\gamma$, la droite GC est perpendiculaire à AB. Menons par C une parallèle aux génératrices du cylindre, les segments CH et CK sont égaux. Le lieu du point C est un paraboloïde de révolution ayant pour axe ML ; GL est la sous-normale de la parabole méridienne.

On sait que dans la parabole la sous-normale est constante et égale au paramètre de la parabole. Ici le paramètre est

$$\frac{I}{V} = \frac{\pi r^4}{4\pi r^2 h} = \frac{r^2}{4h}.$$

Donc

$$GL = \frac{r^2}{4h}.$$

D'autre part $CK = LM = MG = GL = h - \frac{r^2}{4h}$; puis $CH =$

$$CN + HN ; CN = GL = \frac{r^2}{4h},$$

$$HN = CH - CN = CK - CN = h - \frac{r^2}{2h}.$$

D'ailleurs le triangle rectangle HCG donne

$$\frac{HN}{GN} = \frac{GN}{CN} = K.$$

d'où

$$HN = KGN = K^2 \overline{CN} = K^2 \frac{r^2}{4h}$$

De plus $K = \frac{GM - AP}{PM} < \frac{GM}{PM}$ ou $\frac{h}{r}$ on a donc $HN < \frac{h^2}{r^2}$ ou $\frac{h^2}{4h}$ ou $\frac{h}{4}$. Comme $HN = h - \frac{r^2}{2h}$ on doit avoir :

$$h - \frac{r^2}{2h} < \frac{h}{4} \quad \text{ou} \quad h < r\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Si cette condition est remplie, la position d'équilibre (3) est stable ; dans le cas contraire la normale distincte de l'axe issue du point G n'existe pas, non plus que la position oblique d'équilibre (3).

RÉSUMÉ. — $h < \frac{r}{\sqrt{2}}$ (1) est une position stable, l'axe est vertical.

$\frac{r}{\sqrt{2}} < h < \frac{r}{\sqrt{3}}$ (2) est une position stable, l'axe est oblique et l'une des bases immergée complètement.

$r\sqrt{\frac{2}{3}} < h < r$ (3) est la position d'équilibre stable, l'axe est oblique et les deux bases plongent partiellement.

$h > r$ (4) est la position stable, l'axe est horizontal.

PROBLÈME III. — *Equilibre d'un prisme droit homogène à base carrée.* — Supposons très grande la hauteur du prisme, la stabilité de l'équilibre exige que les arêtes soient horizontales. Admettons, en outre, que la densité du prisme est la moitié de celle du liquide. La section droite est un carré. La courbe de carène est la section de la surface de carène par le plan médian ; le plan de flottaison est parallèle aux arêtes du prisme, il coupe d'ailleurs les deux côtés opposés du carré puisqu'il passe par son centre G qui est le centre de gravité. La surface de carène est encore un para-

boloïde elliptique, la courbe de carène est par suite une parabole. Dans le plan PQRS (fig. 257) la courbe de carène se composera de quatre arcs de parabole. Il y aura deux sortes de positions d'équilibre, selon que l'un des côtés du carré est vertical, ou que l'une des diagonales est verticale. Par suite, les normales menées du point G à la surface de carène seront les deux diagonales du carré et les parallèles au côté seront les axes mêmes de la parabole.

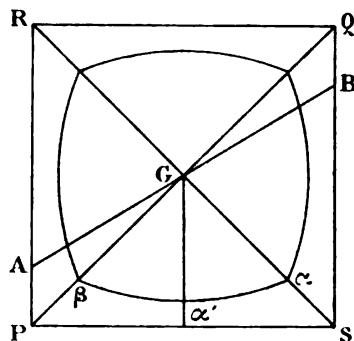


Fig. 257.

Cherchons les positions stables. Nous savons que si d'un point de l'axe on peut mener trois normales à une parabole, l'une est une normale maximum; les positions stables correspondent donc aux autres normales, elles sont réalisées lorsque les diagonales G α ou G β sont verticales. Les autres positions d'équilibre correspondant aux axes tels que G α , sont instables.

Comme $G\alpha = G\beta = \frac{GS}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{6}$ et $G\alpha' = \frac{a}{4}$ on a bien $G\alpha < G\alpha'$.

CHAPITRE V

HYDRODYNAMIQUE

L'hydrodynamique est l'étude des mouvements des fluides.

On passe aisément des équations de l'hydrostatique à celles de l'hydrodynamique en appliquant le principe formulé par d'Alembert :

« Pour écrire les équations du mouvement d'un système mécanique quelconque, il suffit d'écrire que ce système est en équilibre sous l'action des forces réelles qui agissent sur lui et sous l'action d'une force fictive, qu'on appelle *force d'inertie* ».

Soit m la masse d'un point matériel, d'une molécule liquide, par exemple,

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2},$$

les composantes de l'accélération de ce point ; les composantes de la force d'inertie seront :

$$-m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad -m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad -m \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Les équations établies en hydrostatique sont :

$$\frac{dp}{dx} = \rho X, \quad \frac{dp}{dy} = \rho Y, \quad \frac{dp}{dz} = \rho Z.$$

Tout se passant comme si le liquide était en équilibre sous l'action des forces qui agissent extérieurement et sous l'action

des forces d'inertie, les équations auxquelles doivent satisfaire les mouvements d'un fluide sont :

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \rho \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \\ \frac{dp}{dy} &= \rho \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \\ \frac{dp}{dz} &= \rho \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \end{aligned}$$

Calculons $\frac{d^2x}{dt^2}$. Pour cela, considérons un point quelconque ayant pour coordonnées x, y, z à l'instant t , et désignons par u, v, w les trois composantes de la vitesse de cette molécule fluide.

On a :

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}.$$

A l'époque $t + dt$ les coordonnées de la molécule sont devenues $x + dx, y + dy, z + dz$ ou $x + udt, y + vdt, z + wdt$.

D'autre part les composantes de la nouvelle vitesse sont : $u + du, v + dv, w + dw$.

D'ailleurs :

$$(1) \quad du = \frac{d^2x}{dt^2} dt, \quad dv = \frac{d^2y}{dt^2} dt, \quad dw = \frac{d^2z}{dt^2} dt.$$

La composante u est fonction de t, x, y, z : du est sa différentielle totale, donc :

$$du = \frac{du}{dt} dt + \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz.$$

En remplaçant dx, dy, dz par leur valeur il vient :

$$(2) \quad du = dt \left[\frac{du}{dt} + \frac{du}{dx} u + \frac{du}{dy} v + \frac{du}{dz} w \right]$$

En égalant les deux valeurs de du ainsi trouvées, on obtient :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz}.$$

Après avoir porté cette valeur de $\frac{d^2x}{dt^2}$ dans l'équation (1) on a :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} = X.$$

Un calcul semblable effectué sur v et w donnerait

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} + \frac{dv}{dt} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz} &= Y. \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz} &= Z. \end{aligned}$$

Ces trois équations ne suffisent pas pour déterminer les cinq fonctions u , v , w , p et ρ . On leur en adjoint deux autres, qui sont : l'équation dite de *continuité* et l'équation qui lie la densité d'un fluide à la pression qu'il supporte.

Equation de continuité. — Pour former l'équation de continuité considérons les molécules fluides qui traversent un élément quelconque de surface $d\omega$ pendant l'intervalle de temps dt . Aux infiniment petits d'ordre supérieur près ces molécules fluides

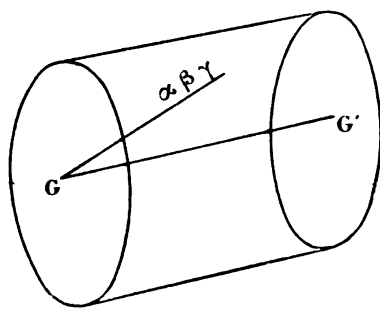


Fig. 258.

pendant le temps dt peuvent être regardées comme remplissant le cylindre ayant pour base $d\omega$ et dont les génératrices sont parallèles à la trajectoire GG' de la molécule qui a passé en G , centre de gravité de $d\omega$, au commencement de l'intervalle de temps dt .

L'élément GG' représente en

grandeur, direction et sens, la vitesse de la molécule G multipliée par dt .

Les projections de GG' sur les axes sont donc : $u dt$, $v dt$, $w dt$.

Calculons la masse du fluide contenu dans ce cylindre oblique infiniment petit. Soient α , β , γ les cosinus directeurs de la normale à la base $d\omega$; sa hauteur qui est la projection de GG' sur cette normale a pour mesure :

$$(\alpha u + \beta v + \gamma w) dt.$$

Le volume du cylindre est donc

$$d\omega \, dt (zu + \beta v + \gamma w)$$

et sa masse

$$\rho \, d\omega \, dt (zu + \beta v + \gamma w).$$

C'est la quantité de fluide qui a traversé $d\omega$ pendant le temps dt .

Généralisation. — Considérons une surface fermée quelconque limitant un volume V et contenant une masse M du fluide. On a :

$$M = \int_V \rho \, dV.$$

Au bout d'un temps infiniment petit dt la masse enfermée est $M + dM$ et l'on a

$$\frac{dM}{dt} = \int_V \frac{d\rho}{dt} \, dV.$$

La masse de fluide qui a traversé $d\omega$ pendant le temps dt est (1), $d\omega \, dt (zu + \beta v + \gamma w \rho)$; la quantité de fluide dM qui est entrée dans la surface considérée pendant le temps dt est donnée par l'expression (1) intégrée par rapport à tous les éléments de la surface. En désignant par α, β, γ les cosinus directeurs de la portion de normale extérieure à la surface, l'expression (1) changée de signe représente la quantité de fluide qui traverse $d\omega$ pendant le temps dt et en allant vers l'intérieur de la surface, on a donc :

$$dM = - \int_V \rho \, d\omega \, dt (\alpha u + \beta v + \gamma w)$$

ou

$$\frac{dM}{dt} = - \int_V \rho (\alpha u + \beta v + \gamma w) \, d\omega.$$

Transformons cette intégrale, on a :

$$\int_V \alpha F \, d\omega = \int_V \frac{dF}{dx} \, dV.$$

L'équation qui précède peut donc s'écrire :

$$\frac{dM}{dt} = - \int_V \left[\frac{d(\rho u)}{dx} + \frac{d(\rho v)}{dy} + \frac{d(\rho w)}{dz} \right] dV.$$

L'intégrale double étendue à tous les éléments de la surface est remplacée par une intégrale triple étendue à tout le volume.

D'ailleurs

$$\frac{dM}{dt} = \int \frac{d\rho}{dt} dV.$$

En égalant ces deux valeurs de $\frac{dM}{dt}$, il vient :

$$\int \left[\frac{d\rho}{dt} + \frac{d(\rho u)}{dx} + \frac{d(\rho v)}{dy} + \frac{d(\rho w)}{dz} \right] dV = 0$$

Pour que cette intégrale soit nulle quel que soit le volume considéré, il faut que l'on ait :

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d(\rho u)}{dx} + \frac{d(\rho v)}{dy} + \frac{d(\rho w)}{dz} = 0.$$

Cette équation dite *de continuité* exprime que la masse liquide contenue dans la surface S est invariable.

Equation de densité. — La cinquième équation est une relation $\varphi(p, \rho) = 0$ entre la densité ρ du fluide et sa force élastique p .

S'il s'agit d'un fluide incompressible, d'un liquide parfait par exemple, on a

$$\rho = c^{te}.$$

S'il s'agit d'un gaz en transformation isotherme on a, d'après la loi de Mariotte :

$$\rho = Kp.$$

Pour les gaz en transformation adiabatique

$$\rho = Kp^\gamma.$$

Si la température est distribuée d'une façon inégale sur la surface, on a

$$\rho = \varphi(p, \theta) \quad \text{avec} \quad \theta = f(x, y, z).$$

Conditions aux limites. — Les cinq équations fondamentales de l'hydrodynamique que nous venons d'établir ne sont pas encore

suffisantes, car une équation aux dérivées partielles ne définit pas complètement la fonction inconnue qui y satisfait. Il faut donner les conditions aux limites, c'est-à-dire l'état du fluide à l'origine du temps, caractérisé par les valeurs de u , v , w , p , ρ pour $t = t_0$. Il faut aussi exprimer : 1° qu'une molécule M quelconque (fig. 259) en contact avec la paroi du vase a une vitesse nécessairement tangente à la paroi, ce qui donne

$$zu + \beta v + \gamma w = 0$$

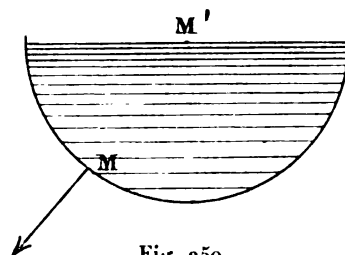


Fig. 259.

(α , β , γ désignant les cosinus directeurs de la normale à la paroi du vase); 2° qu'en un point quelconque M' de la surface libre, la pression est égale à la pression atmosphérique par exemple.

Cas particuliers. — Les équations de l'hydrodynamique, très compliquées en général, se simplifient dans un certain nombre de cas particuliers.

1° Si le liquide est incompressible, on a

$$\rho = c^te.$$

les trois premières équations ne se modifient pas, mais comme

$$\frac{d\rho}{dt} = 0; \quad \frac{d(\rho u)}{dx} = \rho \frac{du}{dx}; \quad \frac{d(\rho v)}{dy} = \rho \frac{dv}{dy}; \quad \frac{d(\rho w)}{dz} = \rho \frac{dw}{dz},$$

l'équation de continuité devient après suppression du facteur ρ qui est différent de zéro :

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Ce résultat montre que l'équation de continuité est beaucoup plus simple dans le cas des liquides que dans le cas des gaz.

2° *Mouvement permanent.* — Lorsque les composantes u , v , w de la vitesse des molécules fluides, qui passent successivement

en un point donné A de la masse, ne dépendent pas de t , les premières équations deviennent :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} = X.$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz} = Y.$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz} = Z.$$

L'équation de continuité se réduit d'ailleurs à

$$\frac{d(\rho u)}{dx} + \frac{d(\rho v)}{dy} + \frac{d(\rho w)}{dz} = 0.$$

3° S'il existe une fonction des vitesses, on a

$$u = \frac{d\varphi}{dx}; \quad v = \frac{d\varphi}{dy}; \quad w = \frac{d\varphi}{dz}$$

ou

$$u dx + v dy + w dz = d\varphi,$$

$d\varphi$ étant une différentielle exacte.

Si de plus $\rho = C^{\text{te}}$ l'équation de continuité

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

devient

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0.$$

On reconnaît l'équation de Laplace $\Delta\Phi = 0$ rencontrée dans la théorie du potentiel.

APPLICATION. — Considérons le cas d'un gaz, la densité ρ n'est plus constante; supposons qu'il y ait une fonction des vitesses φ et de plus une fonction des forces U , on a :

$$X dx + Y dy + Z dz = dU$$

et

$$u dx + v dy + w dz = d\varphi.$$

Posons $T = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$. La parenthèse est le carré de la vitesse.

En différenciant par rapport à x , il vient

$$\frac{dT}{dx} = u \frac{du}{dx} + v \frac{dv}{dx} + w \frac{dw}{dx}.$$

Comme, d'après les hypothèses

$$\frac{dv}{dx} = \frac{du}{dy}; \quad \frac{dw}{dx} = \frac{du}{dz}$$

on a, en substituant ces valeurs dans l'expression de $\frac{dT}{dx}$:

$$\frac{dT}{dx} = u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz},$$

équation qui n'a lieu que s'il y a une fonction des vitesses

Les trois premières équations de l'hydrodynamique se simplifient alors immédiatement et donnent :

$$\frac{1}{\varphi} \frac{dp}{dx} + \frac{d^2\varphi}{dx dt} + \frac{dT}{dx} = X \text{ ou } \frac{dU}{dx}$$

$$\frac{1}{\varphi} \frac{dp}{dy} + \frac{d^2\varphi}{dy dt} + \frac{dT}{dy} = \frac{dU}{dy}$$

$$\frac{1}{\varphi} \frac{dp}{dz} + \frac{d^2\varphi}{dz dt} + \frac{dT}{dz} = \frac{dU}{dz}.$$

On peut encore alléger l'écriture de ces équations en les ajoutant après avoir multiplié la première par dx , la seconde par dy , la troisième par dz ; il vient :

$$\frac{1}{\varphi} \delta p + \delta \frac{d\varphi}{dt} + \delta T = \delta U.$$

Le symbole δ représente la différentielle totale des fonctions qui en sont affectées, le temps t étant considéré comme constant.

Si le mouvement est permanent, p, φ, T ne dépendent plus du

temps t , on a $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ et dans l'équation précédente figurent maintenant les différentielles totales proprement dites

$$\frac{1}{\rho} dp + dT = dU.$$

4° Supposons enfin que les trois conditions soient réunies : le mouvement est permanent, il y a une fonction des vitesses et il s'agit d'un liquide pour lequel $\rho = C^e$. Cette équation peut alors s'intégrer, elle donne :

$$\frac{p}{\rho} + T = U + c^e.$$

L'équation de l'hydrodynamique se présente ici sous une forme particulièrement simple.

Théorème de Lagrange. — S'il y a une fonction des vitesses à un instant donné, à l'origine des temps par exemple, il y aura encore une fonction des vitesses à un instant quelconque.

Ce théorème est soumis à deux restrictions. Il suppose : 1° qu'il y a une fonction des forces ; 2° que la densité ρ est seulement fonction de la pression.

La première condition est satisfaite lorsque la force considérée est la pesanteur ou encore l'attraction newtonnienne. Il existe d'autres forces qu'on peut avoir à considérer et qui ne satisfont pas à cette condition : dans le cas de la viscosité des liquides, par exemple, l'expression $X dx + Y dy + Z dz$ n'est plus une différentielle exacte. En effet, pour que $X dx + Y dy + Z dz$ soit une différentielle exacte, il faut d'abord que X, Y, Z ne dépendent que de x, y, z puisque les seules différentielles qui entrent dans l'expression sont dx, dy, dz ; or, la viscosité dépend encore des composantes de la vitesse u, v, w .

Néanmoins, on a discuté la question de savoir si un liquide visqueux est encore soumis au théorème de Lagrange ; les opinions sont partagées. Nous n'appliquons le théorème qu'aux *fluides parfaits*.

Si l'on tient compte d'un mouvement de rotation (rotation de la terre), il faut introduire deux forces fictives : la force centrifuge ordinaire qui admet une fonction de force et la force

centrifuge composée qui n'en admet pas. Le théorème de Lagrange n'est donc plus applicable.

La deuxième condition est satisfaite par un liquide parfait puisqu'alors $\rho = C^e$. Elle est satisfaite aussi pour un gaz à température constante. Si la température varie, il suffit pour qu'elle soit satisfaite que les surfaces d'égale pression coïncident avec les surfaces d'égale température. Dans le cas contraire, le théorème n'est plus applicable.

Les conditions (1) et (2) étant supposées remplies, démontrons le théorème.

Il faut établir que si $u dx + v dy + w dz$ est une différentielle exacte au temps t , il en est encore de même à l'époque $t + dt$.

En effet, au temps $t + dt$ les composantes u, v, w deviennent $u + \frac{\partial u}{\partial t} dt$; $v + \frac{\partial v}{\partial t} dt$; $w + \frac{\partial w}{\partial t} dt$, donc $u dx + v dy + w dz$ prend la valeur :

$$u dx + v dy + w dz + dt \left[\frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dy + \frac{\partial w}{\partial t} dz \right].$$

La première partie étant une différentielle exacte, il reste à démontrer que la seconde $\frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dy + \frac{\partial w}{\partial t} dz$ est aussi une différentielle exacte.

En posant comme plus haut $T = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$ on a, à un instant quelconque et s'il existe une fonction des vitesses

$$\frac{dT}{dx} = u \frac{du}{dx} + v \frac{dv}{dx} + w \frac{dw}{dx}.$$

La première équation de l'hydrodynamique (1) se simplifie et devient :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{du}{dt} + \frac{dT}{dx} = X$$

ou bien

$$\frac{du}{dt} = X - \frac{dT}{dx} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$$

De même

$$\frac{dv}{dt} = Y - \frac{dT}{dy} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy}$$

et

$$\frac{dw}{dt} = Z - \frac{dT}{dz} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz}.$$

Multiplions la première de ces équations par dx , la seconde par dy , la troisième par dz et ajoutons, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz &= Xdx + Ydy + Zdz \\ - \left[\frac{dT}{dx} dx + \frac{dT}{dy} dy + \frac{dT}{dz} dz \right] &- \frac{1}{\rho} \left[\frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy + \frac{dp}{dz} dz \right] \end{aligned}$$

Comme il y a une fonction U des forces, on a

$$\frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz = dU - dT - \frac{1}{\rho} dp.$$

Le second membre est une différentielle exacte puisque $\rho = f(p)$ (t est considéré comme une constante) ; donc le premier membre est aussi une différentielle exacte, ce qui démontre le théorème de Lagrange.

REMARQUE. — Si en particulier le fluide part du repos, u, v, w sont nuls à l'origine ; il y a une fonction des vitesses à l'origine des temps et par suite une fonction des vitesses à une époque quelconque.

THÉORÈME. — Dans le cas où un liquide incompressible est enfermé dans un vase clos qu'il remplit complètement, il ne peut y avoir une fonction des vitesses qu'à la condition que le liquide soit au repos.

En effet, appelons $\frac{d\varphi}{d\eta}$ la composante normale de la vitesse et α, β, γ les cosinus directeurs de la normale, on a

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = \alpha \frac{d\varphi}{dx} + \beta \frac{d\varphi}{dy} + \gamma \frac{d\varphi}{dz} = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

Désignons par $d\omega$ l'élément de surface du vase et par dh l'élément du volume intérieur au vase.

Le théorème de Green donne

$$\int \varphi \frac{d\varphi}{dx} d\omega = \int \varphi \Delta \varphi \cdot dh + \int \left[\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right] dh.$$

Or, $\frac{d\varphi}{d\tau}$ est nul, car en un point de la surface d'un vase la vitesse du liquide doit être dans le plan tangent; de plus $\Delta \varphi = 0$ par hypothèse, il reste donc :

$$\int dh \left[\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right] = 0.$$

Comme l'élément différentiel n'est jamais négatif et que l'intégrale est nulle, il faut que $\frac{d\varphi}{dx} = 0$; $\frac{d\varphi}{dy} = 0$; $\frac{d\varphi}{dz} = 0$. C'est-à-dire que les trois composantes de la vitesse soient nulles en tous les points du liquide. Celui-ci est alors au repos.

REMARQUE. — Si le liquide est immobile à l'origine des temps, il y a une fonction des vitesses, donc le liquide restera au repos. Cela suppose toutefois que les forces qui agissent sont soumises à une fonction des forces, autrement on ne pourrait plus appliquer le théorème de Lagrange.

Théorème de Bernoulli. — Considérons maintenant un fluide quelconque; supposons qu'il existe une fonction des vitesses et une fonction des forces, et que le mouvement soit un mouvement permanent : u, v, w ne dépendent alors que de x, y, z . Les équations fondamentales deviennent :

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{dT}{dx} &= \frac{dU}{dx} \\ \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{dp}{dy} + \frac{dT}{dy} &= \frac{dU}{dy} \\ \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{dp}{dz} + \frac{dT}{dz} &= \frac{dU}{dz}. \end{aligned}$$

Multiplions la première par dx , la seconde par dy , la troisième par dz et ajoutons ; il vient :

$$\frac{dp}{\rho} + dT = dU.$$

APPLICATIONS. — I. *Cas des liquides.* — Pour les liquides incompressibles ρ est constant et l'intégration donne

$$\frac{p}{\rho} + T = U + C.$$

Dans le cas particulier où la seule force qui agit est la pesanteur ($X=0$, $Y=0$, $Z=g$), cette équation donne

$$\frac{p}{\rho} + T = gz + C.$$

C'est le théorème de Bernouilli, dans le cas des liquides, en supposant qu'il y a une fonction des vitesses.

Filet. — S'il n'y a pas de fonction des vitesses le théorème de Bernouilli s'applique à tous les points d'un même filet.

On appelle *filet*, dans un liquide en mouvement permanent, la trajectoire d'une même molécule. Considérons un filet liquide, soit m la position d'une molécule au temps t ; x , y , z ses coordonnées, m' la position de la même molécule au temps $t+dt$ soient $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ ses coordonnées, on a

$$dx = udt, \quad dy = vdt, \quad dz = wdt.$$

Les équations différentielles du filet, trajectoire du point m , seront :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}.$$

Ajoutons les équations (5) après les avoir multipliées : la première par dx , la seconde par dy , la troisième par dz , et remarquons que $\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{dw}{dt} = 0$ et que $dx = udt$, $dy = vdt$, $dz = wdt$.

Il vient alors :

$$\frac{dp}{\rho} + dt \left\{ \begin{array}{l} u^2 \frac{du}{dx} + uv \frac{du}{dy} + uw \frac{du}{dz} \\ + uv \frac{dv}{dx} + uv^2 \frac{dv}{dy} + vw \frac{dv}{dz} \\ + uw \frac{dw}{dx} + uw \frac{dw}{dy} + w^2 \frac{dw}{dz} \end{array} \right\} = dU.$$

Or, le second terme du premier membre est précisément dT où on a remplacé dx par $u dt$, dy par $v dt$, dz par $w dt$. On a donc

$$dp + dT = dU.$$

On retrouve ainsi l'équation différentielle qui a fourni le théorème de Bernouilli. Ce théorème s'applique donc à tous les points d'un même filet fluide.

La constante C d'intégration est la même pour tous les points d'un même filet et elle diffère pour deux filets différents.

Cas d'un gaz. — La même équation différentielle s'applique soit à tous les points de la masse du gaz s'il y a une fonction des vitesses, soit à tous les points d'un même filet s'il n'y a pas de fonction des vitesses.

On peut intégrer l'équation dans plusieurs cas :

1° Le gaz est soumis à la loi de Mariotte, $\rho = Kp$. L'équation devient

$$\frac{dp}{Kp} + dT = dU.$$

Ou en intégrant

$$\frac{1}{K} \ln p + T = U + C.$$

La forme du théorème de Bernouilli est ici un peu modifiée.

2° Il arrive plus souvent qu'on ait à appliquer la loi adiabatique. Dans ce cas, $\rho = Kp^\gamma$, γ étant le rapport des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant. On a alors

$$\frac{dp}{Kp^\gamma} + dT = dU,$$

d'où en intégrant

$$\frac{p^{1-\gamma}}{K(1-\gamma)} + T = U + C.$$

Théorème de Toricelli. — La vitesse avec laquelle une molécule liquide franchit le plan d'un orifice percé en mince paroi est égale à la vitesse qu'acquerrait cette molécule en tombant d'une hauteur égale à la distance de l'orifice au niveau libre.

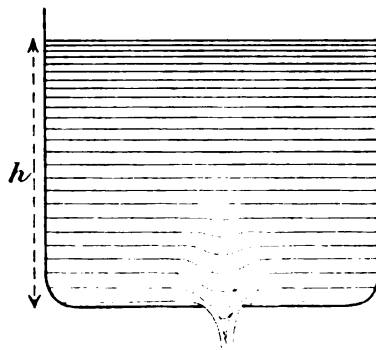


Fig. 260.

Supposons qu'en un point d'un vase ouvert dans l'air soit percé un orifice en *mince paroi* (c'est-à-dire qu'il n'y ait pas *d'ajutage*), il se produit une *veine* liquide sortant de l'orifice (fig. 260).

Le problème consiste à calculer la vitesse du liquide à ce point.

On peut toujours supposer qu'il y a une fonction des vitesses car le liquide part du repos et n'est soumis qu'à la pesanteur. En

général ce mouvement ne sera pas permanent, car le niveau du liquide s'abaisse. Si toutefois on suppose les dimensions de l'orifice très petites par rapport à celles du vase, la vitesse ne sera sensible que dans le voisinage de l'orifice, le niveau libre ne s'abaissera que très lentement, ce qui permet d'appliquer les formules du mouvement permanent et de regarder la vitesse comme nulle en tous les points du niveau libre.

Posons $T = \frac{H^2}{2}$, H est la vitesse à expliciter.

L'équation de Bernoulli donne

$$(1) \quad \frac{p}{\varrho} + \frac{H^2}{2} = gz + C.$$

Déterminons C en exprimant que la vitesse H est nulle en tous les points du niveau libre $z=0$ pendant le temps dt , et que la pression est la pression atmosphérique p_0 , on obtient ainsi

$$\frac{p_0}{\varrho} = C.$$

L'équation (1) donne alors $p + \rho \frac{H^2}{2} = \rho gz + p_0$.

Au point a la pression est p_0 , pression atmosphérique, z mesure la hauteur h du niveau libre au-dessus de l'orifice, par suite.

$$H^2 = 2gh \quad \text{ou} \quad H = \sqrt{2gh}.$$

Cas des gaz. — Appliquons le même théorème au cas d'un gaz enfermé dans un récipient et s'échappant par un orifice.

Il faut utiliser la formule adiabatique $\frac{p^{1-\gamma}}{K(1-\gamma)} + T = U + C$.

Supposons que la pression intérieure soit p et la pression extérieure p_0 . En négligeant l'action de la pesanteur, qui est très petite, et considérant la pression du gaz à l'intérieur comme constante, le gaz peut être regardé comme n'étant soumis à aucune force.

Pour un point intérieur très éloigné de l'orifice où la pression est p_1 on a, la vitesse v étant nulle,

$$\frac{p_1^{1-\gamma}}{K(1-\gamma)} = C.$$

Au point a, où la pression est p_0 et la vitesse H , on a

$$\frac{p_0^{1-\gamma}}{K(1-\gamma)} + \frac{H^2}{2} = \frac{p_1^{1-\gamma}}{K(1-\gamma)},$$

d'où

$$\frac{H^2}{2} = \frac{p_1^{1-\gamma} - p_0^{1-\gamma}}{K(1-\gamma)}.$$

REMARQUE. — Cette formule se simplifie si p a une valeur très voisine de p_0 , car on peut alors poser

$$p_1^{1-\gamma} - p_0^{1-\gamma} = (p_1 - p_0) \frac{d}{dp} (p^{1-\gamma}),$$

et écrire

$$\frac{H^2}{2} = \frac{p_1 - p_0}{K p_0^\gamma} = \frac{p_1 - p_0}{\rho} = (1 - \gamma) p_0^{-\gamma} (p_1 - p_0),$$

CALCUL DU DÉBIT. — Calculons le *débit*, c'est-à-dire la quantité

de liquide qui s'écoule par l'orifice pendant l'unité de temps.

La quantité de liquide qui traverse un élément de surface $d\omega$ pendant le temps dt est :

$$\rho d\omega (\alpha u + \beta v + \gamma w).$$

α, β, γ désignant les cosinus directeurs de la normale à l'élément $d\omega$, $\alpha u + \beta v + \gamma w$ représente la composante normale de la vitesse.

En supposant le mouvement permanent la quantité de fluide qui traverse l'élément $d\omega$ dans l'unité de temps est :

$$\rho d\omega dt (\alpha u + \beta v + \gamma w),$$

La quantité de liquide qui traverse l'élément $d\omega$ de l'orifice de sortie est

$$\rho d\omega H \cos \theta,$$

θ étant l'angle de la vitesse avec la normale à l'élément.

La quantité de liquide qui traverse tout l'orifice dans l'unité de temps est

$$Q = \int \rho H \cos \theta d\omega.$$

En un point du pourtour de l'orifice on a $H = \sqrt{2gh}$.

On peut admettre avec un degré d'approximation suffisant, qu'en un point quelconque de l'orifice la pression est égale à la pression atmosphérique ; la vitesse est alors $\sqrt{2gh}$, et par suite

$$Q = \rho \sqrt{2gh} \int \cos \theta d\omega.$$

En posant $\int \cos \theta d\omega = \mu \omega$ il vient :

$$Q = \rho \sqrt{2gh} \mu \omega.$$

Coefficient de contraction. — Le coefficient μ est plus petit que 1.

En effet le coefficient de $d\omega$ est $\cos \theta$ plus petit que 1, $\int \cos \theta d\omega$ est alors plus petit que $\int d\omega$ ou ω . Donc on a $\mu < 1$; μ est ce qu'on appelle le *coefficient de contraction de la veine*.

Au sortir de l'orifice la section de la veine diminue d'abord

pour rester constante ensuite à une très faible distance de l'orifice.

Signification de μ . — L'expérience montre que les filets liquides à partir du moment où la veine est cylindrique sont parallèles à la direction de la veine, c'est-à-dire qu'une molécule quelconque a sa vitesse perpendiculaire à la section normale de la veine.

La vitesse d'un point quelconque appartenant à la section contractée ω' est $\sqrt{2g(h + \delta h)}$ (δh est une quantité très petite et négligeable), la vitesse est normale à ω' . Donc l'expression du débit est

$$Q = \rho \omega' \sqrt{2gh}.$$

Nous avons trouvé d'autre part

$$Q = \rho \sqrt{2gh} \mu \omega,$$

on a donc $\mu = \frac{\omega'}{\omega}$.

On s'explique par là pourquoi on appelle μ le coefficient de contraction : c'est le rapport de la section de la veine contractée à la section de l'orifice.

L'expérience montre que $\mu = 0,63$ environ.

THÉORÈME. — Le coefficient μ est plus grand que $\frac{1}{2}$.

Il est impossible de déterminer théoriquement le coefficient de contraction, on peut seulement démontrer que μ est plus grand que $\frac{1}{2}$.

Pour cela on applique le théorème des projections des quantités du mouvement qui s'énonce ainsi :

Si on considère un système mécanique quelconque la dérivée par rapport au temps de la somme des projections des quantités de mouvement de tous les points du système sur un axe est égale à la somme des projections des forces qui sollicitent le système, sur le même axe.

Appliquons le théorème à la quantité de liquide $Pax\beta Q$ (fig 262). Projetons la quantité de mouvement du système sur une

direction parallèle à la veine. Au bout d'un temps infiniment petit dt le liquide se sera déplacé, $\alpha\beta$ sera venu en $\alpha'\beta'$, PQ en P'Q' et l'on aura : volume $\alpha\beta\alpha'\beta' = \text{volume PQ P'Q'}$.

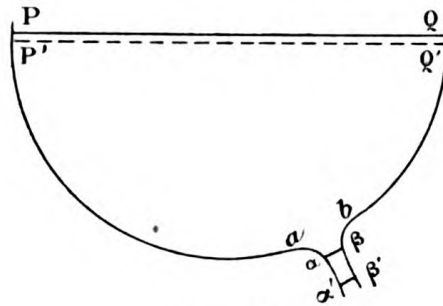


Fig. 262.

Cherchons la projection de la quantité de mouvement sur l'axe. Les deux volumes PQ $\alpha\beta$, P'Q' $\alpha'\beta'$ ont la portion P'Q' $\alpha\beta$ commune. La quantité de liquide qui remplit ce volume commun est la même au temps t et au temps

$t + dt$ car le mouvement est supposé permanent ; il n'y a donc pas à s'occuper de cette partie commune au point de vue de l'accroissement de la quantité de mouvement.

L'accroissement de la quantité de mouvement est la quantité de mouvement de la portion de liquide $\alpha\beta\alpha'\beta'$ diminuée de la quantité de mouvement de la portion PQ P'Q'. Or cette dernière est négligeable puisque la vitesse du niveau libre est supposée négligeable. L'accroissement de la quantité de mouvement se réduit donc à la quantité de mouvement de $\alpha\beta\alpha'\beta'$; pour en obtenir l'expression il faut multiplier la masse de $\alpha\beta\alpha'\beta'$ par la vitesse : la masse est égale au produit $Q dt$ (Q représentant le débit) ; la vitesse est $\sqrt{2gh}$ sa direction est précisément celle de la veine. La projection sur la direction de la veine de l'accroissement de la quantité de mouvement est donc

$$Qdt\sqrt{2gh}$$

et la dérivée par rapport au temps de la projection de la quantité de mouvement sera $Q\sqrt{2gh}$.

Calculons les projections des forces extérieures. Il y a d'abord le poids P du liquide dirigé suivant la verticale, qui a pour projection sur la direction de la veine liquide $P \cos \alpha$, en appelant α l'angle de la veine liquide avec la verticale dirigée vers le bas. Il faut en plus considérer les pressions sur toute la surface du liquide. Soit $d\sigma$ un élément quelconque de la surface, p la pression correspondante, φ l'angle de la normale à l'élément avec la

direction de la veine liquide. La projection sur la veine de la pression sur l'élément $d\sigma$ est $p \cos \varphi d\sigma$, et la somme des projections de toutes les pressions sur tous les éléments de la surface est $\int p \cos \varphi d\sigma$.

Cette intégrale doit être étendue à toute la surface de la portion de liquide considérée.

Le théorème des projections des quantités de mouvement donne donc :

$$Q\sqrt{2gh} = P \cos \alpha + \int p \cos \varphi d\sigma.$$

ou en remplaçant Q par sa valeur

$$(1) \quad 2gh\rho\omega = P \cos \alpha + \int p \cos \varphi d\sigma.$$

D'autre part $\frac{p}{\rho} + T = gz + \frac{p_0}{\rho}$ et $T = \frac{V^2}{2}$, donc

$$p = \rho gz + p_0 - \rho T;$$

p_0 est la pression sur le niveau libre pris pour plan des xy ; en tous les points de ce niveau libre on a $T = 0$, $Z = 0$, $p = p_0$.

En remplaçant p par sa valeur dans l'équation (1) il vient :

$$2gh\rho\omega = P \cos \alpha + \int (\rho gz + p_0) \cos \varphi d\sigma - \int \rho T \cos \varphi d\sigma.$$

$\rho gz + p_0$ est la pression hydrostatique en un point qui correspondrait à l'équilibre du liquide, c'est-à-dire au cas où l'on fermerait l'orifice. Dans ce cas la pression hydrostatique serait équilibre à la pesanteur et on devrait avoir :

$$P \cos \alpha + \int (\rho gz + p_0) \cos \varphi d\sigma = 0.$$

Il reste alors

$$2gh\rho\omega = - \int \rho T \cos \varphi d\sigma.$$

Par hypothèse la vitesse n'est sensible que très près de l'orifice, la valeur de T peut donc être considérée comme nulle pour tous les points du volume excepté pour une petite zone $a'b'$ voisine de l'orifice (fig. 263).

Il faut étendre l'intégrale du second membre d'une part à la portion $aa'bb'$, d'autre part à $\alpha\beta$, par suite

$$2gh\mu\omega = - \int_{(aa', bb')} \rho T \cos \varphi d\sigma - \int_{(\alpha\beta)} \rho T \cos \varphi d\sigma.$$

La première de ces intégrales est impossible à calculer, on voit seulement qu'elle est négative car $\cos \varphi$ est négatif, donc on a

$$2gh\mu\omega > - \int_{(\alpha\beta)} \rho T \cos \varphi d\sigma$$

ou

$$2gh\mu\omega > \int_{(\alpha\beta)} \rho T (-\cos \varphi) d\sigma.$$

Le second membre est positif, d'ailleurs $\rho = C^{\text{te}}$ puisqu'il s'agit d'un liquide et $T = \frac{1}{2}v^2 = gh$.

En supprimant le facteur commun $gh\rho$ on a

$$2\mu\omega > \int (-\cos \varphi) d\sigma.$$

Or $(-\cos \varphi d\sigma)$ est la projection de l'élément $d\sigma$ sur un plan perpendiculaire à la direction de la veine, car φ est l'angle de la

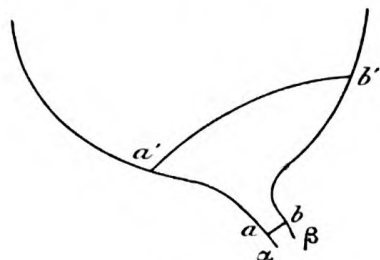


Fig. 263.



Fig. 264.

normale à $d\sigma$ avec la direction de la veine; le plan perpendiculaire à la direction de la veine est le plan de l'orifice; l'expression $\int_{(\alpha\beta)} (-\cos \varphi) d\sigma$, projection sur le plan de l'orifice de la surface $(\alpha\beta)$ est la section même de l'orifice ω , on a donc enfin

$$2\mu\omega > \omega \quad \text{ou} \quad \mu > \frac{1}{2}.$$

REMARQUE. — Il y a un cas où μ prend sa valeur limite $\frac{1}{2}$. C'est le cas de l'ajutage rentrant ; il suffit en effet pour que $\mu = \frac{1}{2}$ que l'on ait $\int_{(aa'bb')} \rho T \cos \varphi \, d\sigma = 0$. Or l'ajutage est parallèle à la veine (fig. 264), φ est l'angle de la normale au cylindre-ajutage avec la veine, cet angle est droit donc $\cos \varphi = 0$ et l'intégrale disparaît. L'expérience confirme d'ailleurs suffisamment les prévisions théoriques.

PETITS MOUVEMENTS DES FLUIDES

Dans le cas des petits mouvements, les équations générales de l'hydrodynamique se réduisent à

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{du}{dt} = X; \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} + \frac{dv}{dt} = Y; \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \frac{dw}{dt} = Z,$$

car les produits tels que $u \frac{du}{dx}$ sont négligeables.

Si la pesanteur agit seule on a :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g$$

Si de plus il existe une fonction des vitesses φ on a

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}, \quad w = \frac{d\varphi}{dz}$$

et les équations deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) &= 0; \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} + \frac{d}{dy} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) &= 0; \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \frac{d}{dz} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) &= g. \end{aligned}$$

En ajoutant ces égalités après les avoir multipliées respectivement par dx , dy et dz il vient.

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{dz}{dt}\right) = g dz.$$

Il faut observer que dans ces différentielles totales le temps est considéré comme une constante.

L'intégration donne

$$(1) \quad \frac{p}{\rho} + \frac{dz}{dt} = gz + C.$$

La quantité C ne dépend que de t , représentons la par $f'(t)$. On peut toujours supposer $C=0$; si, en effet, il n'en était pas ainsi on poserait $\varphi = z_1 + f$ et l'on pourrait encore prendre z_1 comme fonction des vitesses, car

$$u = \frac{dz}{dx} = \frac{dz_1}{dx}, \quad v = \frac{dz}{dy} = \frac{dz_1}{dy}, \quad w = \frac{dz}{dz} = \frac{dz_1}{dz}.$$

L'équation (1) devient dans ces conditions

$$\frac{p}{\rho} + \frac{dz_1}{dt} + f'(t) = gz + f'(t)$$

ou

$$\frac{p}{\rho} + \frac{dz_1}{dt} = gz.$$

A cette équation il faut adjoindre l'équation de continuité $\Delta\varphi = 0$.

Il faut de plus satisfaire aux conditions qui se rapportent à la surface libre, on a en tous les points de cette surface.

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{dz}{dt} = gz.$$

En prenant la dérivée par rapport à t , et remarquant que $\frac{dz}{dt} = \frac{dz_1}{dt}$, il vient

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g \frac{dz_1}{dt}.$$

Enfin, en tous les points de la paroi du vase, la vitesse est contenue dans le plan tangent à la paroi.

CAS PARTICULIER. — Supposons qu'il s'agisse d'un liquide pesant compris entre deux plans horizontaux, le plan des xy coïncidant avec le fond du liquide. L'axe des z étant dirigé vers le bas, l'équation du niveau libre est $z = -h$.

Pour $z = -h$ on doit avoir

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = g \frac{d\varphi}{dz}.$$

Pour la surface inférieure $z = 0$, la composante normale de la vitesse étant nulle, on a

$$\frac{d\varphi}{dz} = 0.$$

Une solution particulière du problème est :

$$\varphi = (e^{mx} e^{-mx}) \sin (mx - \lambda t),$$

m et λ étant liés par une certaine relation.

Vérifions d'abord que cette fonction satisfait à l'équation $\Delta\varphi = 0$.

En calculant les dérivées secondes on obtient :

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -m^2\varphi; \quad \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0; \quad \frac{d^2\varphi}{dz^2} = m^2\varphi.$$

Leur somme est nulle.

D'autre part, $\frac{d\varphi}{dz} = m (e^{mx} e^{-mx}) \sin (mx - \lambda t)$; pour $z = 0$, on a bien $\frac{d\varphi}{dz} = 0$, car $e^{mx} e^{-mx} = 0$.

Détermination de λ . — Pour $z = -h$ on doit avoir

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = g \frac{d\varphi}{dz} \quad (a);$$

or

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = - (e^{mx} + e^{-mx}) \lambda^2 \sin (mx - \lambda t)$$

la condition (a) donne, après simplification et résolution :

$$\lambda = \sqrt{gm \frac{e^{mh} - e^{-mh}}{e^{mh} + e^{-mh}}}.$$

Si λ et m satisfont à cette condition, φ est une solution du problème. A chaque solution φ correspond une *onde élémentaire*.

On aura une infinité de solutions en faisant varier m ou en ajoutant une constante. On pourra de plus remplacer le sinus par le cosinus, et x par $x \cos \theta + y \sin \theta$, ce qui revient à faire tourner les axes des x et des y , cela est permis car rien ne distingue l'axe des x parmi toutes les directions du plan horizontal. On pourra combiner entre elles ces diverses solutions en les ajoutant après les avoir multipliées par des facteurs constants.

Formule de Lagrange. — Comme φ dépend de z et de $mx - \lambda t$, les ondes se propagent parallèlement à ox avec une vitesse constante égale à $\frac{\lambda}{m}$, c'est-à-dire qu'aux instants t_0 et t , l'onde est aux distances x_0 et x telles que $\frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\lambda}{m}$.

La vitesse de propagation est donc

$$V = \sqrt{\frac{g}{m} \frac{e^{mh} - e^{-mh}}{e^{mh} + e^{-mh}}}.$$

Si mh est très petit, on peut négliger $m^2 h^2$ et les termes de degré supérieur, la vitesse de propagation a alors pour expression

$$V = \sqrt{gh}.$$

Cette formule est connue sous le nom de *formule de Lagrange*; elle s'applique seulement dans le cas de m très petit (ondes très longues), par exemple dans le cas d'une perturbation violente.

Pour les ondes courtes la fonction sous le radical va en diminuant, la vitesse est plus petite que $\sqrt{gh}$ et pour m très grand la vitesse tend vers zéro.

Si la profondeur est considérable on peut faire tendre h vers l'infini et la formule donne à la limite

$$V = \sqrt{\frac{g}{m}}.$$

TOURBILLONS

Définition du tourbillon. — Posons, en conservant les notations précédemment employées :

$$A = \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}; \quad B = \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}; \quad C = \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}.$$

S'il y a une fonction des vitesses, on a :

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

Car, $u dx + v dy + w dz$ est dans ce cas une différentielle exacte et par suite

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}; \quad \frac{du}{dz} = \frac{dw}{dx}; \quad \frac{dv}{dz} = \frac{dw}{dy}.$$

Si, au contraire, il n'y a pas de fonction des vitesses, les quantités A, B, C ne sont pas nulles à la fois. Ces quantités A, B, C sont ce qu'on appelle les trois composantes d'un *tourbillon*, parallèlement aux axes ox, oy et oz .

Représentation du tourbillon. — On représente un tourbillon par un segment de droite dont les projections sur les trois axes sont A, B, C . Si on appelle (H) la grandeur du tourbillon, on a

$$H = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

On justifie cette définition en remarquant que l'axe du tourbillon est le même en grandeur et en direction, quels que soient les axes choisis.

De plus, supposons que la masse fluide soit animée d'un mouvement de rotation autour de oz ; les composantes de la vitesse sont :

$$u = -\omega y, \quad v = \omega x, \quad w = 0,$$

par suite

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = -2\omega.$$

Ainsi, dans le cas où toute la masse est animée d'un mouvement de rotation autour de oz , à chaque point de la masse correspond un tourbillon proportionnel à la vitesse angulaire de rotation et ayant son axe parallèle à l'axe de rotation.

Au tourbillon A, B, C correspond une rotation infiniment petite autour de la droite ayant pour projections A, B, C .

Les trois grandeurs A, B, C sont liées par la relation

$$(1) \quad \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} = 0.$$

En effet

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dx} &= \frac{d^2v}{dy \cdot dz} - \frac{d^2w}{dx \cdot dy}; & \frac{dB}{dy} &= \frac{d^2w}{dx \cdot dy} - \frac{d^2u}{dy \cdot dz}; \\ \frac{dC}{dz} &= \frac{d^2u}{dy \cdot dz} - \frac{d^2v}{dx \cdot dz}. \end{aligned}$$

En ajoutant ces équations membre à membre, on trouve la relation (1).

Ligne de tourbillon. — On nomme *ligne de tourbillon* une ligne située dans l'intérieur du fluide et qui a pour tangente, en chacun de ses points, l'axe du tourbillon correspondant à ce point.

Les différentielles dx, dy, dz des coordonnées d'un point quelconque d'une de ces lignes sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la tangente et, par suite, aux projections de l'axe du tourbillon. On a donc

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{C}.$$

Telles sont les équations différentielles des lignes de tourbillon.

Théorème de Helmholtz. — Si un certain nombre de molécules se trouvent à l'origine des temps sur une même ligne de tourbillon, elles se trouveront toujours sur une même ligne de tourbillon.

Ce théorème est soumis aux mêmes restrictions que le théorème de Lagrange :

1° Il faut qu'il existe une fonction des forces U , c'est-à-dire que l'on ait

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU.$$

2° Il faut que la densité du fluide soit seulement fonction de la pression.

$$\varrho = \varrho(p).$$

LEMME. — Considérons une fonction $f(x, y, z, t)$. Soit $m(x, y, z)$ les coordonnées d'une molécule à l'époque t , f la valeur correspondante de la fonction considérée ; au temps $t + dt$ le point m est en m_1 dont les coordonnées sont $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$; d'autre part f est devenu $f + \delta f$. On a

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z.$$

En remplaçant δx , δy , δz par leur valeur $u dt$, $v dt$, $w dt$, il vient :

$$\frac{\delta f}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z}.$$

APPLICATION. — *Transformation de l'équation de continuité et des équations de l'hydrodynamique.* — En appliquant cette formule aux fonctions Λ et ϱ , on a

$$\frac{\delta \Lambda}{dt} = \frac{d\Lambda}{dt} + u \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + v \frac{\partial \Lambda}{\partial y} + w \frac{\partial \Lambda}{\partial z}$$

et

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\delta \varrho}{dt} &= \frac{d\varrho}{dt} + u \frac{d\varrho}{dx} + v \frac{d\varrho}{dy} + w \frac{d\varrho}{dz} \\ &= \frac{d\varrho}{dt} + \sum u \frac{d\varrho}{dx}. \end{aligned}$$

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{d\varrho}{dt} + \sum \frac{d(\varrho u)}{dx} = 0,$$

ou

$$\frac{dp}{dt} + \Sigma u \frac{dp}{dx} - \rho \Sigma \frac{du}{dx} = 0$$

c'est-à-dire d'après (2)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \Sigma \frac{du}{dx} = 0.$$

On a donc $\Sigma \frac{du}{dx} = -\frac{\partial \rho}{\rho \partial t}$ ou

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = -\frac{\partial \rho}{\rho \partial t}.$$

C'est là une nouvelle forme de l'équation de continuité.

Mettons de la même manière sous une forme nouvelle les trois autres équations de l'hydrodynamique,

Partons de

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} = X.$$

D'après la notation $T = \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2)$ on a

$$\frac{dT}{dx} = u \frac{du}{dx} + v \frac{dv}{dx} + w \frac{dw}{dx}$$

et par suite

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{du}{dt} + \frac{dT}{dx} + v \left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} \right) + w \left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} \right) &= \\ &= X = \frac{dU}{dx}, \end{aligned}$$

ou encore

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{du}{dt} + \frac{dT}{dx} + vC - wB = \frac{dU}{dx}.$$

Cette équation peut encore être simplifiée en posant :

$$F = U - T - \int \frac{dp}{\rho}.$$

L'intégrale $\int \frac{dp}{\rho}$ est parfaitement déterminée car $\frac{dp}{\rho}$ est une différentielle exacte puisque par l'hypothèse ρ ne dépend que de p .
L'équation (1) se réduit alors à

$$\frac{du}{dt} + vC - wB = \frac{dF}{dx}.$$

C'est la nouvelle forme de la première équation de l'hydrodynamique ; les autres s'en déduisent par permutation circulaire.

$$\frac{dv}{dt} + wA - uC = \frac{dF}{dy} ; \quad \frac{dw}{dt} + uB - vA = \frac{dF}{dz}.$$

CAS PARTICULIER. — 1° Supposons le mouvement permanent. Dans ce cas on a

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{dw}{dt} = 0.$$

S'il y a une fonction des vitesses les termes A, B, C, sont nuls, les premiers membres des équations disparaissent et il reste l'équation de Bernoulli

$$F = C^*$$

2° Supposons qu'il n'y ait pas de fonction des vitesses ; les facteurs A, B, C ne sont pas nuls. Montrons que la valeur de la fonction F est la même tout le long d'un même filet.

Pour obtenir l'accroissement de F entre deux points voisins d'un filet, multiplions respectivement les trois équations de l'hydrodynamique par u, v, w et ajoutons. Il vient :

$$u \frac{dF}{dx} + v \frac{dF}{dy} + w \frac{dF}{dz} = 0.$$

Comme les deux points (xyz) ; (x + dx, y + dy, z + dz) appartiennent à un même filet on a

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}.$$

En conséquence $dF = 0$ pour tous les points d'un même filet, par suite la valeur de la fonction F est constante le long d'un filet.

3° Montrons encore que la valeur de F est aussi constante tout le long d'une ligne de tourbillons.

Pour cela ajoutons les trois équations de l'hydrodynamique après avoir multiplié la première par A , la seconde par B , la troisième par C , il vient

$$A \frac{\partial F}{\partial x} + B \frac{\partial F}{\partial y} + C \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Mais les équations d'une ligne de tourbillon sont :

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{C}.$$

On a donc

$$dx \frac{\partial F}{\partial x} + dy \frac{\partial F}{\partial y} + dz \frac{\partial F}{\partial z} = 0 = dF$$

Cette équation exprime que tout le long d'une ligne de tourbillon F a la même valeur.

4° Supposons maintenant le mouvement non permanent et calculons $\frac{\partial A}{\partial t}$.

Ecrivons d'abord l'équation identique : $u A - u A = 0$, puis les 3^e et 2^e équations de l'hydrodynamique

$$-\frac{dw}{dt} + vA - uB = -\frac{dF}{dz}$$

et

$$\frac{dv}{dt} + wA - uC = \frac{dF}{dy}.$$

Différentions la première de ces équations par rapport à x , la seconde par rapport à y , la troisième par rapport à z et ajoutons, F disparaît et il vient :

$$\frac{d^2v}{dz \cdot dt} - \frac{d^2w}{dy \cdot dt} + \left| \begin{array}{c} u \frac{dA}{dx} + A \\ + v \frac{dA}{dy} \\ + w \frac{dA}{dz} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \frac{du}{dx} - \\ + \frac{dv}{dy} \\ + C \frac{du}{dz} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} A \frac{du}{dx} - u \\ + B \frac{du}{dy} \\ + C \frac{du}{dz} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \frac{dA}{dx} \\ + \frac{dB}{dy} \\ + \frac{dC}{dz} \end{array} \right| = 0$$

D'après les équations :

$$\frac{d^2v}{dz \cdot dt} - \frac{d^2w}{dy \cdot dt} = \frac{dA}{dt} \text{ (définition de } A)$$

$$\frac{dA}{dt} + u \frac{dA}{dx} + v \frac{dA}{dy} + w \frac{dA}{dz} = \frac{\partial A}{\partial t} \text{ (Lemme).}$$

$$A \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \text{ (équation de continuité) '}$$

$$\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} = 0 \text{ (définition de } A, B, C),$$

L'équation obtenue se réduit à

$$\frac{\partial A}{\partial t} - A \frac{\partial \rho}{\partial t} = A \frac{du}{dx} + B \frac{du}{dy} + C \frac{du}{dz}.$$

En divisant les deux membres par ρ il vient

$$\frac{1}{dt} \left(\frac{\rho \partial A - A \partial \rho}{\rho^2} \right) = \frac{A}{\rho} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{B}{\rho} \cdot \frac{du}{dy} + \frac{C}{\rho} \cdot \frac{du}{dz},$$

ou

$$\frac{\partial \left(\frac{A}{\rho} \right)}{\partial t} = \frac{A}{\rho} \frac{du}{dx} + \frac{B}{\rho} \frac{du}{dy} + \frac{C}{\rho} \frac{du}{dz}.$$

Démonstration du théorème d'Helmholtz.
— Considérons deux molécules infiniment voisines m (xyz) et m' ($x + \xi, y + \eta, z + \zeta$) situées sur une même ligne de tourbillon à l'instant t (fig. 265).

Puisque m et m' sont deux points infiniment voisins d'une même ligne de tourbillon on a :

$$\frac{\xi}{A} = \frac{\eta}{B} = \frac{\zeta}{C}.$$

En désignant par $\frac{\varepsilon}{\rho}$ la valeur commune de ces rapports on peut écrire :

$$\xi = A \frac{\varepsilon}{\rho}, \quad \eta = B \frac{\varepsilon}{\rho}, \quad \zeta = C \frac{\varepsilon}{\rho}.$$

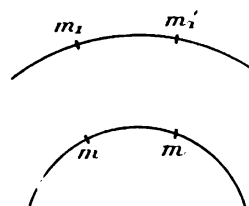


Fig. 265.

La distance mm' ou $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ s'exprime alors par $H \frac{\varepsilon}{\rho}$, H représentant la grandeur de l'axe du tourbillon.

Au bout du temps infiniment petit dt , m est en m_1 et m' en m'_1 . Les coordonnées de ces deux points sont respectivement

$$\begin{aligned} & x + \partial x, y + \partial y, z + \partial z \text{ (} m_1 \text{)}; \\ & x + \xi + \partial x + \partial \xi; \quad y + \eta + \partial y + \partial \eta; \quad z + \zeta + \partial z + \partial \zeta \text{ (} m'_1 \text{)}. \end{aligned}$$

Calculons $\partial \xi$, $\partial \eta$, $\partial \zeta$. On a $\partial x = dt \cdot u$.

Comme les points m et m' sont considérés au même instant on a pour les composantes de la vitesse suivant ox ,

$$u \text{ et } u + \frac{du}{dx} \xi + \frac{du}{dy} \eta + \frac{du}{dz} \zeta$$

d'où

$$\partial x + \partial \xi = dt \left(u + \frac{du}{dx} \xi + \frac{du}{dy} \eta + \frac{du}{dz} \zeta \right).$$

On a donc

$$\frac{\partial \xi}{dt} = \frac{du}{dx} \xi + \frac{du}{dy} \eta + \frac{du}{dz} \zeta$$

ou encore

$$\frac{\partial \xi}{dt} = \varepsilon \left(\frac{A}{\rho} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{B}{\rho} \cdot \frac{du}{dy} + \frac{C}{\rho} \cdot \frac{du}{dz} \right) = \frac{\varepsilon \partial}{dt} \left(\frac{A}{\rho} \right).$$

En conséquence $\partial \xi = \varepsilon \partial \left(\frac{A}{\rho} \right)$.

A l'instant t , $\xi = A \frac{\varepsilon}{\rho}$ et à l'instant $t + dt$:

$$\xi + \partial \xi = \varepsilon \left[\frac{A}{\rho} + \partial \left(\frac{A}{\rho} \right) \right].$$

Le rapport de ξ à $\frac{A}{\rho}$ est donc constant et égal à ε . Il en est de même pour η et ζ . Donc ξ , η , ζ restent proportionnels aux projections de l'axe de tourbillon sur les trois axes : les deux molécules sont constamment sur une même ligne de tourbillon.

REMARQUE. — On a trouvé précédemment $\overline{mm'} = H \cdot \frac{\varepsilon}{\rho}$. Ce résultat montre que la distance des molécules reste proportionnelle au tourbillon et inversement proportionnelle à la densité du fluide.

Cette proposition renferme le théorème de Lagrange. Supposons, en effet, qu'il y ait une fonction des vitesses à l'origine des temps, dans ces conditions

$$\Lambda = B = C = 0$$

et les équations $\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{C}$ sont indéterminées.

Une ligne quelconque est une ligne de tourbillon.

Toutes les molécules qui sont à l'origine sur une ligne quelconque qui est une ligne de tourbillon seront à un instant quelconque sur une même ligne de tourbillon; une ligne quelconque est donc toujours une ligne de tourbillon.

Les équations se trouvent ainsi toujours indéterminées, par suite à un instant quelconque $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, il y a donc bien une fonction des vitesses à un instant quelconque s'il y en a une à l'origine des temps. C'est là le théorème de Lagrange.

Autre forme de l'équation $\frac{d\Lambda}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} = 0$. — Considérons une surface fermée quelconque et un élément $d\omega$ de cette surface (fig. 266). Si le tourbillon (H) correspondant à $d\omega$ fait avec la normale à l'élément un angle φ l'intégrale $\int (H) \cos \varphi d\omega$, étendue à tous les éléments de la surface fermée, est nulle.

Comme $(H) \cos \varphi$ est la projection du tourbillon correspondant à l'élément $d\omega$ sur la normale à cet élément, on a

$$(H) \cos \varphi = \Lambda \alpha + B \beta + C \gamma,$$

α, β, γ désignant les cosinus directeurs de la normale; par suite

$$\int (H) \cos \varphi d\omega = \int (\Lambda \alpha + B \beta + C \gamma) d\omega,$$

or $\int \Lambda \alpha d\omega = \int \frac{d\Lambda}{dx} d\tau$, $d\tau$ désignant un élément quelconque du volume intérieur à la surface, donc

$$\int (\Lambda \alpha + B \beta + C \gamma) d\omega = \int \left(\frac{d\Lambda}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} \right) d\tau.$$

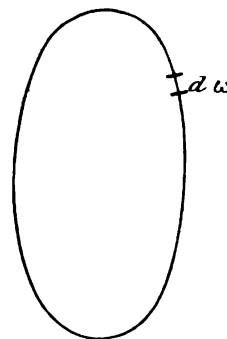


Fig. 266.

L'équation $\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} = 0$ est donc équivalente à la suivante $\int (H) \cos \varphi \, d\omega = 0$.

Faisceau de lignes de tourbillon. — Par chacun des points d'un élément de surface $d\omega$ on peut faire passer une ligne de tourbillon, cet ensemble constitue un faisceau. D'après ce qui précède, toutes les molécules qui, à un instant donné, font partie d'un même faisceau, feront toujours partie d'un même faisceau.

Moment d'un faisceau. — Soient $d\omega$ la section normale infiniment petite d'un faisceau en ab (fig. 267) et (H) le tourbillon au centre de gravité de ab ; le produit $(H) d\omega$ est par définition le moment du faisceau. Ce moment est une constante à deux points de vue :

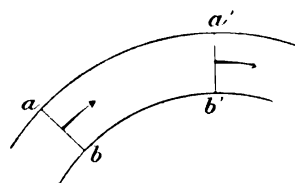


Fig. 267.

1° Il est le même en tous les points d'un même faisceau.

En effet, considérons une seconde section normale $a' b'$ d'étendue $d\omega'$ et dont (H') est le tourbillon en son centre de gravité. Appliquons l'équation $(H) \cos \varphi \, d\omega = 0$ à la surface fermée $aa' bb'$ limitée par le faisceau et les deux sections droites. Pour les éléments de la surface latérale, l'intégrale est nulle : en effet, le plan tangent en ce point contenant la tangente à la ligne du tourbillon passant par ce point, la projection du tourbillon sur la normale est nulle et, par suite $(H) \cos \varphi = 0$. Pour les faces ab et $a' b'$, le tourbillon est normal à l'élément, pour l'un $\cos \varphi = 1$ et pour l'autre $\cos \varphi = -1$. En conséquence

$$\int [(H) d\omega - (H') d\omega'] = 0$$

quels que soient les éléments considérés. Il faut donc que l'on ait $(H) d\omega - (H') d\omega' = 0$ ou $(H) d\omega = (H') d\omega'$, c'est-à-dire que le moment du faisceau soit le même en chaque point.

2° Le moment conserve encore la même valeur, quelle que soit l'époque à laquelle on le considère. Pour le démontrer, prenons sur le faisceau F et sur une même ligne de tourbillon deux molécules infiniment voisines m et m' (fig. 268). Par m et

m' menons deux plans parallèles qui déterminent deux sections infiniment petites a, b, a', b' ; le volume $ab, a' b'$ peut être assimilé à un cylindre oblique, car les axes infiniment petits tels que mm' peuvent être considérés comme rectilignes.

Au bout d'un temps quelconque, F est en F_1 , les points m et m' sont en m_1 et m'_1 et les molécules qui occupaient le volume a, b, a', b' occupent le volume a_1, b_1, a'_1, b'_1 . Les surfaces a_1, b_1, a'_1, b'_1 ne sont pas restées rigoureusement planes; mais comme elles sont infiniment petites on peut les considérer comme planes et même parallèles, car elles forment un angle infiniment petit. Le volume a_1, b_1, a'_1, b'_1 de section droite $d\omega$ peut être alors assimilé à un cylindre oblique de volume $\overline{mm'} d\omega$ et de masse $\rho \overline{mm'} d\omega$. On a donc

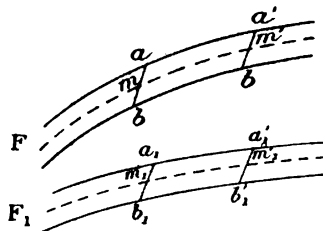


Fig. 268.

$$\rho \overline{mm'} d\omega = C^{te}.$$

Or,

$$\overline{mm'} = \varepsilon \frac{(II)}{\rho}$$

et

$$\varepsilon = C^{te}.$$

donc

$$(II) d\omega = C^{te}.$$

On a rendu visibles ces faisceaux avec des fumées. Les couronnes d'hydrogène phosphoré ne sont autre chose que des faisceaux de lignes de tourbillon. Elles se disposent en sortes de tores dont les points tournent autour du lieu des centres des sections méridiennes.

THÉORÈME. — Dans le cas d'un liquide qui remplit complètement un récipient, les valeurs de u, v, w sont déterminées si l'on se donne à un instant quelconque les valeurs des trois fonctions A, B, C .

Supposons qu'il existe deux systèmes de valeurs (u, v, w) ; $(u_1$

v_1, w_1) correspondant à un même système A, B, C. Dans ces conditions, on aurait

$$\Lambda = \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} \quad \text{et} \quad \Lambda = \frac{dv_1}{dz} - \frac{dw_1}{dy}.$$

En retranchant membre à membre ces deux égalités, il vient

$$\frac{d(v - v_1)}{dz} = \frac{d(w - w_1)}{dy}.$$

Les expressions de B et de C donnent deux autres relations analogues :

$$\frac{d(w - w_1)}{dx} = \frac{d(u - u_1)}{dz}; \quad \frac{d(u - u_1)}{dy} = \frac{d(v - v_1)}{dx}.$$

Ces équations établissent que

$$(u - u_1) dx + (v - v_1) dy + (w - w_1) dz$$

est une différentielle exacte $d\varphi$, par suite

$$u = u_1 + \frac{d\varphi}{dx}; \quad v = v_1 + \frac{d\varphi}{dy}; \quad w = w_1 + \frac{d\varphi}{dz}.$$

Le fluide étant incompressible, l'équation de continuité donne

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

et

$$\frac{du_1}{dx} + \frac{dv_1}{dy} + \frac{dw_1}{dz} = 0,$$

d'où en retranchant membre à membre ces deux équations :

$$\frac{d(u - u_1)}{dx} + \frac{d(v - v_1)}{dy} + \frac{d(w - w_1)}{dz} = 0,$$

par suite

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\Delta\varphi = 0.$$

D'ailleurs, la vitesse en un point quelconque de la paroi du vase est dans le plan tangent ce qui s'exprime par l'équation $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$, α, β, γ étant les cosinus directeurs de la normale à la surface.

De même, $\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 = 0$, d'où en retranchant membre à membre ces deux équations :

$$\alpha \frac{d\varphi}{dx} + \beta \frac{d\varphi}{dy} + \gamma \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

par suite $\frac{d\varphi}{dn} = 0$ en tous les points de la paroi.

Or, d'après le théorème de Green, toute fonction qui satisfait aux conditions $\Delta\varphi = 0$ et $\frac{d\varphi}{dn} = 0$ est identiquement nulle. La fonction φ étant identiquement nulle on a $u = u_1, v = v_1, w = w_1$.

REMARQUE. — Si à l'origine des temps on connaît u, v, w , les composantes A, B, C du tourbillon sont déterminées.

Considérons deux molécules infiniment voisines sur la même ligne de tourbillon ; connaissant u, v, w , on peut déterminer la position m_1 de m au bout du temps dt ; il en est de même de la position m_1' prise par m_1 , on obtient ainsi la nouvelle direction du tourbillon au point m_1 ; sa grandeur est donnée par la relation $m_1 m_1' = \varepsilon \frac{(H)}{\rho}$.

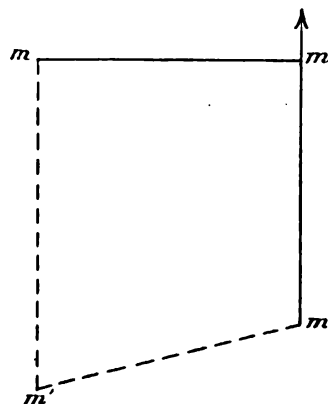


Fig. 269.

Donc, si on connaît u, v, w au temps t , on connaît également A, B, C au temps $t + dt$, et par suite, d'après ce qui a été démontré, les valeurs de u, v, w à l'instant $t + dt$.

Les composantes u, v, w de la vitesse sont donc déterminées à un instant quelconque si on connaît leur valeur à l'origine des temps.

En conséquence, si on considère un liquide parfait enfermé dans un vase qu'il remplit complètement, le mouvement ne dépend que de la vitesse initiale et non des forces extérieures. Il

en est encore de même si un liquide parfait remplit un espace indéfini et de telle façon que la vitesse soit nulle à l'infini. Ce théorème est soumis aux mêmes restrictions que le théorème de Helmholtz.

THÉORÈME. — Dans le cas du mouvement permanent, considérons le filet F et la ligne de tourbillon T qui se coupent au

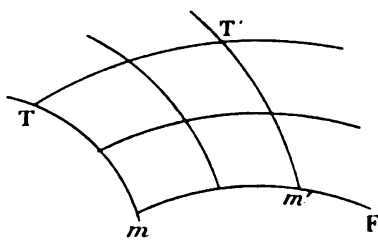


Fig. 270.

point m . Par les différents points de F menons des lignes de tourbillon et par ceux de T des filets, les deux surfaces ainsi obtenues coïncident.

En effet, au bout d'un temps t , les molécules qui étaient sur la ligne de tourbillon T sont sur la

ligne de tourbillon T' qui passe par m' , nouvelle position de m , ce qui prouve que tout filet qui rencontre T rencontre aussi T' . Donc, les lignes de tourbillon qui rencontrent le filet F rencontrent tous les filets qui s'appuient sur la ligne de tourbillon T .

D'après le théorème de Bernouilli, qui s'applique tout le long d'un même filet et d'une même ligne de tourbillon, on a

$$F = C^{\text{te}} ;$$

d'ailleurs

$$F = \int \frac{dp}{\rho} - T - V,$$

$F = C^{\text{te}}$ est alors l'équation d'une certaine surface engendrée par un système de lignes de tourbillon; c'est aussi l'équation d'une certaine surface engendrée par un système de filets. Or, la fonction F a la même valeur tout le long du filet F , elle a aussi la même valeur tout le long de la ligne de tourbillon T ; cette valeur est la même pour le filet F et la ligne de tourbillon T puisque ces deux lignes ont un point commun m . Donc, les deux surfaces $F = C^{\text{te}}$ coïncident.

Cas particulier. — Considérons un liquide pesant enfermé dans un vase dont la forme est une figure de révolution. Le liquide est supposé animé d'un mouvement permanent dans

lequel les filets sont des circonférences horizontales ayant leur centre sur l'axe oz du vase. La conséquence de ces hypothèses est que, en un point quelconque, chaque molécule décrit d'un mouvement uniforme une circonférence ayant son centre sur oz . La vitesse ω , étant la même tout le long d'un même filet, ne dépend que du z du point considéré et de r

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Démontrons que le mouvement permanent n'est possible que si ω est indépendant de z . Pour cela, reprenons les équations de l'hydrodynamique. Les molécules étant animées d'un mouvement circulaire uniforme l'accélération est centripète et la force d'inertie est la force centrifuge; ses composantes sont :

$$\omega^2 x, \omega^2 y, 0;$$

les forces extérieures ont pour composantes $0, 0, g$. Les équations de l'hydrodynamique donnent alors :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \omega^2 x; \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = \omega^2 y; \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = g.$$

Multiplions la première par dx , la deuxième par dy et la troisième par dz et ajoutons :

Comme ρ est constant, il vient :

$$\frac{dp}{\rho} = \omega^2 x dx + \omega^2 y dy + g dz.$$

Le premier membre de cette équation étant une différentielle exacte, il en est de même du second membre et on a

$$\frac{d(\omega^2 x)}{dz} = \frac{dg}{dx}$$

d'où

$$\frac{d\omega}{dz} = 0;$$

par suite ω est indépendant de z . Le mouvement permanent n'est donc possible que si la vitesse de rotation est la même tout le long d'une même verticale.

Les lignes de tourbillon sont des verticales. — On a

$$x dx + y dy = r dr.$$

L'équation précédente donne d'ailleurs

$$\frac{p}{\rho} = \int \omega^2 r dr + gz + C^te.$$

En un point quelconque de la surface libre, la pression est constante et égale à la pression atmosphérique. Pour tous les points de la surface libre on a donc $\int \omega^2 r dr + gz = C^te$.

Quand on connaît $\int \omega^2 r dr = \Phi(r)$, cette équation donne la forme de la surface libre.

Cherchons les lignes de tourbillon, c'est-à-dire A, B, C. Puisque

$$u = \omega y, \quad v = -\omega x, \quad w = 0$$

on a

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 2\omega + x \frac{d\omega}{dx} + y \frac{d\omega}{dy}$$

ou

$$C = 2\omega + r \frac{d\omega}{dr}.$$

On voit que le tourbillon est parallèle à oz, par conséquent les lignes de tourbillon sont des verticales.

REMARQUE. — La vitesse de rotation étant la même tout le long d'une verticale, les molécules sont entraînées comme si elles appartenaient à un corps solide.

Cas particulier. — Considérons un cylindre de révolution vertical ayant pour axe oz et pour rayon a. Le tourbillon ne dépend que de r. Supposons qu'en tous les points intérieurs $C = C_0$ et en tous les points extérieurs $r > a$, $C = 0$. Déterminons ω , on a :

$$C_0 = 2\omega + r \frac{d\omega}{dr}; \quad C_0 \text{ est constant : on satisfera à cette condition en prenant } \omega = \frac{C_0}{2}.$$

A l'extérieur, on devra avoir $0 = 2\omega + r \frac{d\omega}{dr}$

ou
$$\frac{d\omega}{\omega} = -2 \frac{dr}{r}.$$

D'où $\text{Log } \omega = -2 \text{Log } r + \text{Log } K$ donc $\omega = \frac{K}{r^2}.$

Les deux formules devant concorder pour $r=a$, il faut que $K = \frac{C_0 a^2}{2}.$

Problèmes. — La connaissance de A, B, C, u, v, w , à l'origine des temps, permet de déterminer ces mêmes quantités à un instant quelconque. D'autre part, la connaissance de A, B, C à l'origine permet de déterminer u, v, w à l'origine.

Résolvons le problème dans quelques cas particuliers.

Supposons d'abord que le liquide remplisse un espace indéfini dans les trois sens, et que sa vitesse soit nulle à l'infini. Supposons de plus u et v indépendants de z et $w=0$.

D'après ces hypothèses, la vitesse d'un point quelconque du liquide est parallèle au plan des xy ; les vitesses de tous les points d'une verticale sont égales et parallèles. La trajectoire d'un point quelconque est donc dans un plan horizontal. Deux points situés sur une même verticale à l'origine des temps seront toujours sur une même verticale. Dans le cas actuel

$$A = B = 0.$$

En effet $A = \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dz}$; $B = \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}$; or $\frac{dv}{dz} = 0$, $\frac{du}{dz} = 0$, car u et v sont indépendants de z ,

De même $\frac{dw}{dx} = 0$, $\frac{dw}{dy} = 0$, puisque $w = 0$;

il reste $C = \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}$

et l'équation de continuité s'écrit

$$(1) \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0.$$

Ces deux équations suffisent pour déterminer u et v connaissant C . Les composantes A et B du tourbillon étant nulles, le tourbillon se réduit à sa composante verticale et l'on a $C = (H)$.

Les lignes de tourbillon sont des parallèles à oz et les faisceaux de lignes de tourbillon sont des cylindres ayant leurs génératrices verticales.

Le moment d'un faisceau $(H) d\omega$ est constant, donc $Cd\omega = C^0$.

Dans le cas actuel les deux facteurs sont constants. En effet, en

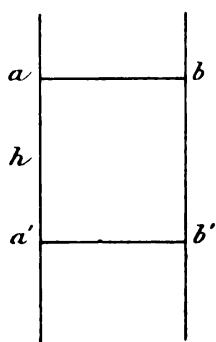


Fig. 271.

coupant le faisceau par deux plans horizontaux on obtient un cylindre limité à deux sections droites ab , $a'b'$ (fig. 271); soit h sa hauteur, le volume du cylindre est $h d\omega$; h est constant : en effet, un point quelconque reste toujours dans un plan horizontal, la distance verticale des deux bases reste donc constante; de plus, le liquide étant incompressible, le volume est constant, donc $h d\omega$ est constant et par suite $d\omega$ est aussi constant, $d\omega$ étant constant ainsi que $C d\omega$, il en résulte que C est constant.

Il s'agit maintenant de déterminer u et v à l'aide des équations (1).

Ce problème a été précédemment résolu dans un cas particulier (fig. 272). Rappelons les résultats obtenus : on a considéré un

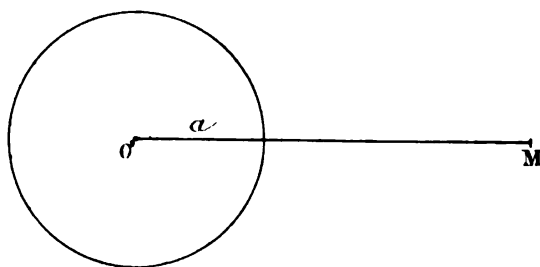


Fig. 272.

cylindre de révolution de rayon a et un point M . Soit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distance du point à l'axe oz du cylindre. Pour les points intérieurs au cylindre $r < a$, on a supposé $C = C_0$, et pour les points extérieurs $r > a$ on a supposé $C = 0$. Ce cylindre peut être regardé comme un faisceau de section fixe, et son moment est $\pi a^2 C_0$. La vitesse d'un point quelconque du plan et par suite

de l'espace (puisque la vitesse est la même en tous les points d'une parallèle à l'axe des z) est la même que si le corps était animé d'un mouvement de rotation avec une vitesse angulaire

$$\omega, \quad u = \omega y, \quad v = -\omega x.$$

On a trouvé à l'intérieur du cylindre $\omega = \frac{C_0}{2}$ et à l'extérieur $\omega = \frac{K}{r^2}$.

La vitesse angulaire d'un point placé à l'extérieur du cylindre est en raison inverse du carré de sa distance à l'axe.

Pour $r = a$, c'est-à-dire pour les points du cylindre, les deux valeurs de ω doivent être les mêmes ; donc on a $K = \frac{C_0 a^2}{2}$.

Conséquences. — A l'extérieur du cylindre il n'y a pas de tourbillon, donc les composantes A , B , C sont nulles, et par suite il y a une fonction φ des vitesses. On a

$$d\varphi = udx + vdy = \omega (ydx - xdy)$$

ou

$$d\varphi = k \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2},$$

donc

$$\varphi = k \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

Cette fonction n'est pas uniforme, car l'arc tg est susceptible d'une infinité de valeurs. En prenant l'intégrale $\int (udx + vdy)$ le long d'un contour fermé, il pourrait se faire que l'intégrale fût nulle, c'est ce qui arriverait si le contour d'intégration n'entourait pas le cylindre.

Si le contour d'intégration entoure le cylindre, l'intégrale $\int (udx + vdy)$ est égale à $2K\pi$.

Autre règle pour trouver la vitesse du point M situé à l'extérieur du cylindre. — Pour un mouvement de rotation autour de l'axe du cylindre, la vitesse de M est perpendiculaire à OM et

égale en grandeur à ωr ou $\frac{K}{r}$ ou encore $\frac{C_0 a^2}{2r}$, elle est en raison inverse de la distance.

Imaginons maintenant le cylindre rempli de matière attirante de densité δ ; on sait calculer l'attraction T , qu'exerce ce cylindre de révolution sur le point M ; cette attraction est dirigée suivant MO , et a pour expression $\frac{2\pi a^2 \delta}{2r}$.

Pour $\delta = \frac{C_0}{4\pi}$ la valeur de l'attraction est identique à celle de la vitesse du point M trouvée plus haut.

On est ainsi conduit pour construire la vitesse du point M à la règle suivante :

Règle. — On supposera le cylindre rempli de matière attirante de densité $\frac{C_0}{4\pi}$, on construira l'attraction de cette masse sur M ,

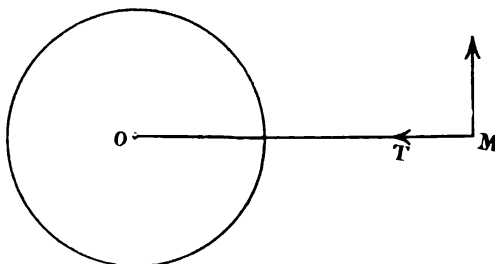


Fig. 273.

on la fera tourner de 90° dans un sens convenable et on aura la vitesse de M en grandeur et en direction.

Ce résultat est vrai quel que soit le cylindre; par conséquent il est encore vrai si celui-ci devient infiniment petit; le faisceau infiniment petit considéré se réduit à une droite, sa section a alors une forme quelconque.

La règle s'applique encore au cas général. En effet on peut décomposer un faisceau quelconque en une infinité de faisceaux infiniment petits. Ces faisceaux sont cylindriques, la valeur de C sera la même tout le long de chaque faisceau élémentaire, mais elle pourra varier d'un faisceau à l'autre. Imaginons que ces cylindres soient remplis de matière attirante de densité $\frac{C}{4\pi}$.

Construisons l'attraction de cette matière attirante sur le point m , nous aurons la vitesse de ce même point m en faisant tourner de 90° l'attraction ainsi obtenue. Soient d'abord deux faisceaux infiniment petits et circulaires d'aires ω_1, ω_2 ; A_1 et A_2 les centres

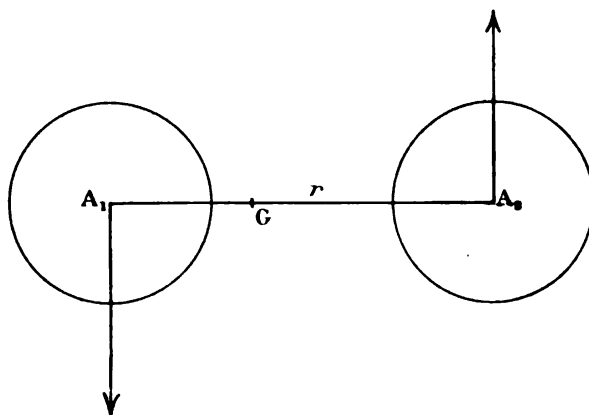


Fig. 274.

de ces sections, C_1 et C_2 les valeurs des tourbillons, m_1 et m_2 leurs moments. On a

$$m_1 = C_1 \omega_1; \quad m_2 = C_2 \omega_2.$$

Si le premier faisceau n'existait pas, la vitesse du point A_2 serait nulle, sa vitesse se réduit donc à celle qui est due à l'existence du premier faisceau. Soit $r = A_1 A_2$.

Appliquons la règle. L'attraction du premier faisceau sur A_2 est $\frac{m_1}{2\pi r}$. La vitesse du point A_2 est donc égale à $\frac{m_1}{2\pi r}$ et dirigée suivant la perpendiculaire à la droite $A_1 A_2$. Pour la même raison la vitesse de A_1 sera perpendiculaire à $A_1 A_2$ et égale à $\frac{m_2}{2\pi r}$. A chaque instant les vitesses des deux faisceaux sont perpendiculaires à la droite qui joint leurs centres.

Considérons le point G qui partage $A_1 A_2$ en raison inverse des moments m_1 et m_2 ; en supposant chacun des deux faisceaux A_1 et A_2 affecté d'une masse proportionnelle à son moment, le point G sera le centre de gravité de ces deux faisceaux. Il est aisé de constater que sa vitesse est nulle. En effet, pour avoir la vitesse du point G , il faut composer les vitesses de A_1 et A_2

après avoir multiplié la première par m_1 , la deuxième par m_2 ; ces vitesses étant parallèles et directement opposées, on trouve ainsi 0. Donc le point G est fixe. Les vitesses des points A_1 et A_2 sont constamment perpendiculaires à A_1G , A_2G ; les droites A_1G , A_2G sont donc les normales aux trajectoires des points A_1 et A_2 , et comme elles passent par un point fixe, les trajectoires sont des cercles ayant leur centre en G .

Ceci permet, connaissant la position de deux faisceaux à l'origine des temps, de connaître leurs positions à un instant quelconque.

Cas particulier. — Un cas particulier intéressant est celui où les moments m_1 et m_2 sont égaux et de signes contraires; les deux vitesses sont dans le même sens et égales entre elles; le système A_1A_2 se déplace alors d'un mouvement de translation perpendiculaire à A_1A_2 . Dans ce cas, la direction de la vitesse d'un point M quelconque est tangente à la circonférence, lieu des points tels que le rapport $\frac{MA_1}{MA_2}$ est constant.

Considérons en effet la circonférence déterminée par les trois points A_1 , M , A_2 , elle est orthogonale à la première. La vitesse

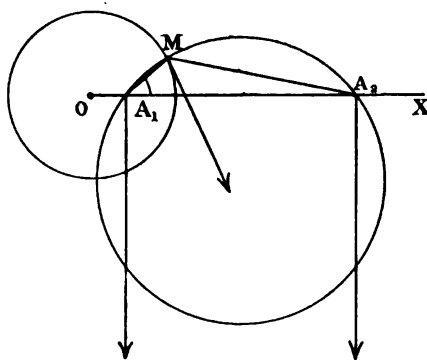


Fig.. 275.

du point M lui est normale. Pour le faire voir, il suffit de montrer que la fonction des vitesses est constante tout le long de cette circonférence; or, la fonction des vitesses est la somme des fonctions des vitesses dues aux faisceaux A_1 et A_2 .

La fonction φ est $K \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

Pour la vitesse due au faisceau A_1 , la fonction sera $\widehat{KMA_1A_2}$.

Pour la vitesse due au faisceau A_2 , la fonction sera $-\widehat{KMA_2A_1}$.

La somme est $-K$ (angle M). Or, tout le long de l'arc de cercle A_1MA_2 , l'angle M est constant, donc la fonction des vitesses est constante tout le long de cet arc de cercle. Puisque la vitesse est constamment normale à la courbe $\varphi = C^{\text{te}}$, elle est normale à la circonférence A_1MA_2 , et par suite tangente à la circonférence O.

Liquide contenu dans un vase ayant la forme d'un cylindre de révolution. — Supposons que le liquide, au lieu de remplir un

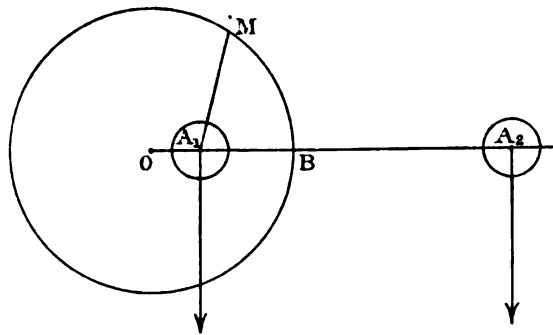


Fig. 276.

espace indéfini, remplit un vase circulaire de dimensions finies, ayant pour axe l'axe des z . Admettons que dans ce vase existe un faisceau de tourbillon A infiniment délié ayant pour section ω et égal à C . Le moment du faisceau infiniment mince est $C\omega$. Déterminons la vitesse d'un point quelconque du liquide contenu à l'intérieur du vase. Il faut que C soit nul pour les points extérieurs au faisceau, constant à l'intérieur du faisceau A et qu'en un point de la paroi du vase la vitesse soit tangente à la paroi.

Soit $OB = a$ le rayon du vase. Joignons OA_1 et désignons par A_2 un point situé sur OA_1 , et tel que $OA_1 \times OA_2 = a^2$; tous les points de la circonférence de rayon OB sont tels que le rapport de leurs distances aux points A_1 et A_2 est constant, $\frac{MA_1}{MA_2} = C^{\text{te}}$.

Imaginons que le liquide s'étende encore au dehors du vase et qu'on ait un second faisceau de moment égal et contraire à celui de A_1 , que ce faisceau soit A_2 et, de plus, qu'en dehors de ces points il y ait une fonction des vitesses. Le théorème qui précède

nous montre que la vitesse du point M est tangente à la circonférence OB. Donc si on a un seul tourbillon à l'intérieur d'un vase ayant la forme d'un cylindre de révolution, tout se passe comme si le liquide s'étendait à l'infini et comme si on avait deux faisceaux de tourbillon, ces deux faisceaux ayant des moments égaux et des signes contraires.

Les vitesses des deux faisceaux sont alors perpendiculaires à A_1A_2 et toutes les deux égales à $\frac{m}{2\pi r}$; m étant la valeur commune des moments et r la distance A_1A_2 . Si on désigne par d la distance OA_1 , nous avons

$$r = \frac{a^2}{d} - d.$$

Le faisceau A_1 est donc animé d'une vitesse perpendiculaire à OA_1 , OA_1 est la normale à la trajectoire, et comme cette droite passe sans cesse par un point fixe O, la trajectoire est une circonférence décrite de O comme centre d'un mouvement uniforme.

Donc si dans un vase ayant la forme d'un cylindre de révolution il existe un tourbillon unique de section infiniment petite, ce tourbillon tourne d'une manière uniforme autour de l'axe du vase.

Revenons au cas du liquide indéfini ; on peut résoudre le problème dans le cas de trois tourbillons et à l'aide de quadratures trouver comment se comportent ces tourbillons à un instant quelconque.

Un autre cas particulier est celui où l'on a un faisceau de section finie et elliptique à l'intérieur duquel C est constant. On démontre que ce faisceau tourne autour de son axe d'un mouvement uniforme.

Pour avoir la vitesse d'un point quelconque du faisceau il n'y a qu'à appliquer les formules de l'attraction des ellipsoïdes et à faire tourner les attractions de 90°.

Cas général. — Dans tout ce qui précède on a supposé que les faisceaux de lignes de tourbillon sont des cylindres verticaux $A = 0$, $B = 0$, $C \neq 0$, $w = 0$ et que u et v sont indépendants de z.

Il s'agit de déterminer la vitesse d'un point quelconque de

l'espace, connaissant les lignes de tourbillon, les faisceaux de lignes de tourbillon et leurs moments. On envisage d'abord le cas où il s'agit d'un faisceau unique de section infiniment petite, le moment est donné et en dehors il y a une fonction des vitesses, car $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$.

Déterminons d'abord la fonction des vitesses. Cette fonction φ satisfait à l'équation $\Delta\varphi = 0$; elle doit être finie et déterminée en tous les points de l'espace, excepté sur le tourbillon où ses dérivées deviennent infinies. En partant de là il est aisé de démontrer que, en un point quelconque M de l'espace de coordonnées xyz , on obtient comme il suit. On considère un cône de sommet M et ayant pour directrice le faisceau de lignes de tourbillon. On peut calculer l'angle solide au sommet de ce cône; c'est la portion de sphère de rayon 1 interceptée. La fonction est alors $\varphi = K. M. S$; K est une constante, M le moment du faisceau, S l'angle solide au sommet du cône. C'est le cas d'un faisceau unique.

S'il y en a un nombre quelconque ou une infinité, on aura la vitesse d'un point quelconque en faisant la somme géométrique de toutes les vitesses partielles dues à tous les faisceaux élémentaires.

Cette règle est susceptible d'une interprétation physique remarquable. Considérons un courant fermé d'intensité i parcourant un fil ayant la même forme que le faisceau et l'intensité i ayant pour valeur $i = CM$, C est une constante numérique et M le moment du faisceau. Imaginons un pôle magnétique d'intensité 1, le courant exerce sur ce pôle une certaine attraction, il en résulte un potentiel V et les composantes de l'attraction sont :

$$\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz};$$

V est proportionnel à i , c'est-à-dire à M et à l'angle solide sous lequel on voit le courant du point A .

Le potentiel V relatif à l'attraction de ce courant sur le pôle magnétique est précisément égal à la fonction des vitesses φ .

Cas du tore. — Un cas particulier intéressant est celui d'un

faisceau unique ayant la forme d'un tore, infiniment délié, d'axe oz .

On démontre que ce tore est animé d'un mouvement de translation parallèle à oz .

Mouvement d'un corps solide plongé dans un liquide. — Considérons un liquide de densité 1 prolongé indéfiniment dans tous les sens. Admettons qu'à l'origine des temps il existe une fonction φ des vitesses, on a

$$u dx + v dy + w dz = d\varphi$$

et la fonction existe à un instant quelconque. Supposons qu'une sphère solide soit immergée dans le liquide et animée d'un mouvement de translation parallèle à ox .

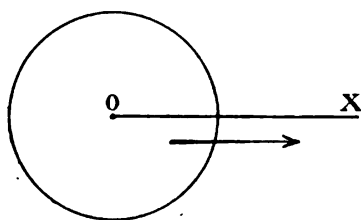


Fig. 277.

Calculons la vitesse d'un point quelconque du liquide. La fonction des vitesses φ est déterminée par les trois conditions suivantes :

- 1° Elle satisfait à l'équation de continuité $\Delta\varphi = 0$.
- 2° Le liquide étant en repos à l'infini on doit avoir $\varphi = 0$ à l'infini.

3° La composante normale de la vitesse relative du fluide par rapport au corps solide doit être nulle. Or, la vitesse relative est la différence géométrique de la vitesse absolue et de la vitesse d'entraînement. Dire que la composante normale de la vitesse relative est nulle, c'est dire que la vitesse absolue et la vitesse d'entraînement ont même composante parallèle à cette direction.

Il faut donc exprimer qu'en tout point de la surface du corps solide les composantes normales à cette surface de la vitesse absolue et de la vitesse d'entraînement sont égales.

Soit N la composante normale de la vitesse d'entraînement, on doit avoir $N = \frac{d\varphi}{dn}$ à la surface du corps solide.

La fonction φ est donc soumise aux trois conditions suivantes : $\Delta\varphi = 0$; $\varphi = 0$ à l'infini; $N = \frac{d\varphi}{dn}$ à la surface du corps solide. Ces trois conditions suffisent pour déterminer φ .

Considérons, en effet, deux fonctions φ et φ_1 satisfaisant à ces trois conditions et soit $\varphi - \varphi_1 = \psi$, on a $\Delta\varphi = 0$ et $\Delta\varphi_1 = 0$, donc $\Delta\psi = 0$; à l'infini, $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, donc $\psi = 0$. À la surface de la sphère $\frac{d\varphi}{dn} = N$ et $\frac{d\varphi_1}{dn} = N$, donc $\frac{d\varphi}{dn} - \frac{d\varphi_1}{dn}$ ou $\frac{d\psi}{dn} = 0$.

Or, on démontre à l'aide du théorème de Green que toute fonction satisfaisant aux trois mêmes conditions que la fonction ψ est nulle; donc les fonctions φ et φ_1 sont identiques.

Détermination de φ . — Soit V la vitesse de translation de la sphère suivant ox (fig. 279). Considérons un point M sur la sphère et soit θ l'angle que fait la normale en ce point dirigée vers l'extérieur avec ox . La vitesse du point M étant parallèle à ox et égale à V , on a

$$N = V \cos \theta.$$

D'autre part, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ et $\cos \theta = \frac{x}{r}$, r étant le rayon de la sphère et x, y, z les coordonnées de M . Pour un point quelconque de l'espace situé à la distance ρ du centre de la sphère, on a

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2.$$

La fonction $\frac{1}{\rho}$ satisfait à l'équation :

$$\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta\varphi = 0.$$

Or, si une fonction φ satisfait à l'équation $\Delta\varphi = 0$, elle satisfait encore à $\Delta\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = 0$; donc $\Delta\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{dx} = 0$.

D'ailleurs, $x dx + y dz + z dz = \rho d\rho$.

D'où $\frac{d\rho}{dx} = \frac{x}{\rho}$, par suite

$$\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{dx} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{x}{\rho} = -\frac{x}{\rho^3} \quad \text{et} \quad \Delta\left(-\frac{x}{\rho^3}\right) = 0$$

ou $\Delta\left(\frac{\Lambda x}{\rho^3}\right) = 0$, Λ désignant une constante.

Posons $\varphi = \frac{Ax}{\rho^3}$. La condition (1) est remplie; la condition (2) l'est aussi, car φ est nul pour un point à l'infini; reste à déterminer A de façon que cette fonction satisfasse à la troisième condition.

Pour cela, il faut calculer $\frac{d\varphi}{dn}$; on peut écrire $\varphi = \frac{A \cos \theta}{\rho^2}$. Si M se déplace sur la normale à la sphère, θ ne varie pas, ρ seul varie, par suite $\frac{d\varphi}{dn} = \frac{d\varphi}{d\rho}$.

Or, $\frac{d\varphi}{d\rho} = -\frac{2A \cos \theta}{\rho^3}$. A la surface de la sphère $\rho = r$, on a donc sur cette surface

$$\frac{d\varphi}{dn} = -\frac{2A \cos \theta}{r^3}.$$

Cette expression est égale à N, c'est-à-dire à $V \cos \theta$, on a donc $-\frac{2A \cos \theta}{r^3} = V \cos \theta$, d'où $A = -\frac{Vr^3}{2}$. Par suite

$$\varphi = -\frac{Vr^3 \cos \theta}{\rho^2}.$$

Connaissant φ , on connaît la vitesse d'un point quelconque. Cherchons la résultante des actions du liquide sur la sphère. Le théorème de Bernoulli donne, dans le cas d'un liquide pesant dont la densité est prise pour unité,

$$(1) \quad p = p_0 + gz - T - \frac{d\varphi}{dt}.$$

On pourrait déterminer T et $\frac{d\varphi}{dt}$ et substituer les expressions obtenues dans l'équation (1).

AUTRE SOLUTION. — Appliquons le théorème des forces vives : considérons une certaine force X appliquée au centre de la sphère et dirigée suivant ox. Soient M la masse de la sphère solide dont la force vive est $M \cdot V^2$, et H la force vive du liquide.

La demi-force de tout le système est $\frac{1}{2} (MV^2 + H)$. L'accrois-

sement de cette demi-force est égal au travail de X , ce qui donne :

$$MV.dV + \frac{dH}{2} = X \frac{dx}{dt} dt = XV dt.$$

Pour écrire les équations du mouvement de la sphère il faut calculer H , force vive totale du liquide.

Appliquons pour cela le théorème de Green, nous savons que

$$-\int \varphi \frac{d\varphi}{dn} d\omega = \int \left[\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right] d\tau,$$

$d\omega$ est un élément de la surface de la sphère, et $d\tau$ un élément du volume du liquide extérieur à la sphère.

Calculons cette intégrale. Le coefficient de $d\tau$ est le carré de la vitesse; la densité du liquide étant 1, $d\tau$ élément de volume est aussi l'élément de masse correspondant; le second membre est donc la force vive de tout le liquide H ; nous avons alors :

$$H = - \int \varphi \frac{d\varphi}{dn} d\omega.$$

Remplaçons φ et $\frac{d\varphi}{dn}$ par leur valeur à la surface de la sphère :

$$\varphi = \frac{A \cos \theta}{r^2} \quad \frac{d\varphi}{dn} = - \frac{2 A \cos \theta}{r^3}.$$

$$\text{Alors } H = \int \frac{2A^2 \cos^2 \theta}{r^5} d\omega.$$

Remplaçant A par la valeur $-\frac{Vr^3}{2}$, il vient :

$$H = \frac{V^2 r}{2} \int \cos^2 \theta d\omega.$$

Reste à évaluer l'intégrale $\int \cos^2 \theta d\omega$.

En déterminant un point de la sphère par sa longitude ψ et sa colatitude θ , on a :

$$d\omega = r^2 \sin \theta d\theta d\psi.$$

L'intégrale cherchée se transforme alors dans l'intégrale double

$$r^2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta.$$

Calculons d'abord $\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$.

En posant $\cos \theta = \zeta$, l'intégrale devient :

$$-\int_{+1}^{-1} \zeta^2 d\zeta \quad \text{ou} \quad \int_{-1}^{+1} \zeta^2 d\zeta = \frac{2}{3}.$$

L'autre intégration $\int_0^{2\pi} d\psi$ donne 2π et nous trouvons pour H la valeur :

$$H = \frac{V^2}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3.$$

H mesure la demi-force vive d'une sphère de liquide de même rayon que la sphère donnée. La demi-force vive totale devient alors :

$$\left[M + \frac{2}{3} \pi r^3 \right] \frac{V^2}{2}.$$

La force vive est la même que celle d'une sphère de masse $M + \frac{2}{3} \pi r^3$.

On a donc pour l'équation des forces vives :

$$\left[M + \frac{2}{3} \pi r^3 \right] \frac{dV}{dt} = X.$$

Supposons $X=0$, on a alors $\frac{dV}{dt} = 0$. La sphère est animée d'un mouvement uniforme sans subir aucune résistance de la part du liquide.

Ce résultat s'applique aux fluides parfaits, mais l'expérience ne le vérifie pas dans le cas des fluides naturels. Il n'y a pas à s'étonner de cela : dans un fluide parfait il n'y a aucune viscosité, c'est-à-dire aucune force capable de détruire de la force vive pour la transformer en chaleur comme il en existe dans les fluides naturels.

Solide immergé de forme et de grandeur variables. — Le cas des corps immergés de forme et de dimensions variables a été réalisé par les sphères pulsantes de M. Bjerknæs.

L'appareil se compose d'une sphère en caoutchouc munie d'un tube et d'une poire; en pressant plus ou moins la poire, on produit des dilatations ou des contractions de la sphère.

1° Considérons d'abord une sphère pulsante isolée, elle restera en repos par raison de symétrie.

Calculons φ et la force vive totale du liquide; soit r le rayon de la sphère, c'est une fonction du temps puisque le diamètre est variable, soit r' la dérivée de r par rapport au temps.

Nous prendrons $\varphi = \frac{\Lambda}{\rho}$. La fonction $\frac{\Lambda}{\rho}$ satisfait à la condition $\Delta\varphi = 0$; elle est nulle à l'infini et c'est la seule qui ne dépende que de ρ . Il faut déterminer Λ pour que $\frac{d\varphi}{dn} = N$; N c'est r' , or $\frac{d\varphi}{dn} = \frac{d\varphi}{d\rho} = -\frac{\Lambda}{\rho^2}$. On a donc $-\frac{\Lambda}{\rho^2} = r'$ à la surface de la sphère, donc $\Lambda = -r' r^2$.

Calculons la force vive totale du liquide.

Appliquant comme précédemment le théorème de Green à la surface de la sphère, il vient :

$$H = - \int \varphi \frac{d\varphi}{dn} d\omega$$

ou

$$H = + \int \frac{\Lambda^2}{r^3} d\omega = \frac{\Lambda^2}{r^3} \int d\omega,$$

l'intégrale $\int d\omega$ est la surface de la sphère.

$$\text{Donc } H = \frac{\Lambda^2}{r} 4\pi = r'^2 r^3 \cdot 4\pi.$$

2° Imaginons qu'au lieu d'une seule sphère pulsante il y ait dans le liquide deux sphères pulsantes de rayons r et r_1 , soient r' et r_1' les dérivées par rapport au temps de r et r_1 , et c la dis-

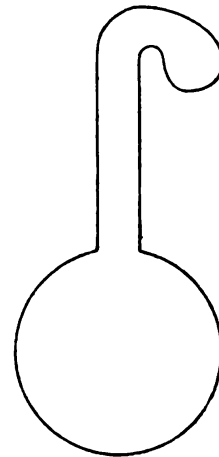


Fig. 278.

tance des centres, supposée parallèle à ox . Imaginons d'abord ces sphères fixes, la forme de la fonction φ est assez compliquée ; c'est une série qu'on pourrait calculer, mais on peut se borner au premier terme en supposant que les rayons des sphères sont très petits par rapport à la distance des centres ; la fonction des forces s'obtient alors en considérant isolément les deux sphères et faisant la somme des fonctions des forces ainsi obtenues. Soient ρ et ρ_1 les distances d'un point de l'espace ambiant aux centres des deux sphères, on a pour la première sphère : $\varphi = -\frac{r'r^2}{\rho}$ et pour la seconde sphère : $\varphi_1 = -\frac{r'_1 r_1^2}{\rho_1}$. La fonction des forces relative au système des deux sphères est

$$\Phi = \varphi + \varphi_1$$

ou

$$\Phi = -\frac{r'r^2}{\rho} - \frac{r'_1 r_1^2}{\rho_1}.$$

Cette fonction Φ ne satisfait qu'approximativement à la 3^e condition $\frac{d\Phi}{dn} = N$ à la surface de la première sphère. En effet $\frac{d\Phi}{dn} = \frac{d\varphi}{dn} + \frac{d\varphi_1}{dn}$ à la surface de la première sphère $\frac{d\varphi}{dn} = N$. Reste à montrer que $\frac{d\varphi_1}{dn}$ est négligeable.

$\frac{d\varphi_1}{dn}$ est la composante de la vitesse normale à la surface de la seconde sphère, elle est de l'ordre de $\frac{1}{\rho_1^2}$ et comme ρ_1 diffère très peu de ρ , elle est de l'ordre de $\frac{1}{\rho^2}$. Comme ρ est très grand par hypothèse, $\frac{1}{\rho^2}$ est très petit, et par suite la fonction Φ peut être prise pour fonction des forces.

Pour avoir la force vive, appliquons le théorème de Green

$$H = - \int \Phi \frac{d\Phi}{dn} d\omega,$$

l'intégrale devant être prise à la surface des deux sphères.

Posons $H = H_1 + H_2$; H_1 étant l'intégrale prise sur la pre-

mière sphère et H_2 l'intégrale prise sur la deuxième sphère. On a

$$H_1 = - \int \frac{d\Phi}{dn} d\omega,$$

or $\frac{d\Phi}{dn} = N = r'$, donc

$$H_1 = - \int r' d\omega \left[-r'r - \frac{r'_1 r_1^2}{\rho} \right]$$

ρ remplaçant ρ_1 , il vient enfin

$$H_1 = 4\pi r'^2 r^3 + \frac{4\pi}{\rho} r' r'_1 r^2 r_1^2.$$

On a de même

$$H_2 = 4\pi r'^2 r_1^3 + \frac{4\pi}{\rho} r r'_1 r^2 r_1^2,$$

par suite $H = 4\pi \left[r'^2 r^3 + r'^2 r_1^3 + \frac{2}{\rho} r' r'_1 r^2 r_1^2 \right]$.

L'expression de la force vive totale n'est plus la même lorsque au lieu de supposer les deux sphères fixes, on imagine que l'une

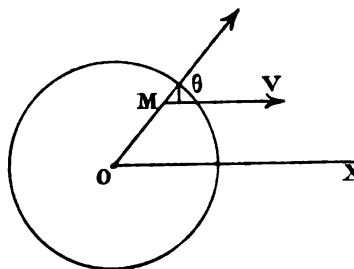


Fig. 279.

d'elles est mobile dans la direction de la ligne des centres. Alors la distance $\rho = c$ des centres est variable et si l'on appelle c' la dérivée de c par rapport au temps, il faut ajouter à H trois termes de la forme :

$$2Bc'r' + 2B_1c'r'_1 + Dc'^2,$$

B , B_1 et D dépendant de r , r_1 et c .

Connaissant H , pour calculer l'action des deux sphères l'une sur l'autre, il suffit d'appliquer les équations de Lagrange.

Soit X l'action du liquide parallèlement à ox sur la première sphère, $-X$ sera la résultante parallèle à ox de la réaction de la sphère sur le liquide, et le travail de cette force pour un accroissement virtuel δc de la distance c est $-X\delta c$.

Les équations de Lagrange donnent alors :

$$\frac{1}{2} \left[\frac{dH}{dc} - \frac{d}{dt} \left(\frac{dH}{dc'} \right) \right] = X.$$

Si $c' = 0$, il reste $\frac{1}{2} \frac{dH}{dc} = Br' + B_1 r_1'$.

En posant $r' = \varepsilon \cos \lambda t$ et $r_1' = \varepsilon_1 \cos \lambda t$, il vient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dH}{dc'} \right) = E \sin \lambda t$$

E étant une constante ; ce terme étant alternativement positif et négatif, si la période de pulsation est assez courte, ses effets alternativement de sens contraire pourront être négligés.

Il reste donc :

$$X = \frac{1}{2} \frac{dH}{dc} = - \frac{4\pi}{c^3} r' r_1' r^2 r_1^2.$$

Cette formule montre que si r' et r_1' sont de même sens, les deux sphères s'attirent ; si r' et r_1' sont de sens contraire, les deux sphères se repoussent, r' ne peut pas être constant, parce que le rayon de la sphère ne peut croître au delà de toute limite.

Supposons que ce soit une fonction périodique, par exemple

$$r' = \mathcal{E} \cos \lambda t, \quad r_1' = \mathcal{E}_1 \cos \lambda t.$$

la période étant la même pour les deux sphères pulsantes. Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_1$ sont de même signe, les deux sphères pulsantes se contractent en même temps et se dilatent en même temps, r' et r_1' sont toujours de même signe.

Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_1$ sont de signes contraires, une sphère se contracte pendant que l'autre se dilate, r' et r_1' sont de signes contraires. On peut produire de la sorte des phénomènes d'attraction et de répulsion apparente entre les sphères pulsantes. C'est ce qu'a réalisé M. Bjerknes.

L'attraction est en raison inverse du carré de la distance, mais elle présente une différence avec les phénomènes électriques : dans ces derniers, deux molécules de même nom se repoussent, deux molécules de nom contraire s'attirent ; ici, si deux sphères sont d'accord, c'est-à-dire si elles se contractent et se dilatent en même temps, elles s'attirent ; au contraire, elles se repoussent si l'une se contracte quand l'autre se dilate.

TABLE DES MATIERES

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE PREMIER

CINÉMATIQUE.	1
Mouvement rectiligne et uniforme.	1
Mouvement rectiligne varié	2
Mouvement curviligne	4
Accélération d'un point mobile dans un mouvement curviligne . .	9
Décomposition de la vitesse et de l'accélération d'un mouvement.	12
Vitesse aréolaire	14
Expression des composantes normale et tangentielle de l'accéléra- tion dans le cas d'un mouvement curviligne.	19

CHAPITRE II

MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE INVARIABLE GLISSANT SUR UN PLAN. . .	27
Mouvement d'une courbe mobile invariable assujettie à rester tan- gente à une courbe fixe.	37
Réduction d'un mouvement plan à un mouvement de roulement. .	41
Mouvement épicycloïdal	65

CHAPITRE III

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE INVARIABLE.	74
Composition des mouvements.	74
Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe	82
Réduction à un roulement du mouvement d'un solide ayant un point fixe	87
Mouvement épicycloïdal sphérique.	92
Position, après plusieurs rotations successives, d'un solide ayant un point fixe	94

CHAPITRE IV

MOUVEMENT HÉLICOÏDAL	102
Étude du mouvement le plus général d'un corps solide	104
Détermination de la position d'un solide	115

CHAPITRE V

MOUVEMENT RELATIF D'UN POINT	121
--	-----

CHAPITRE VI

MÉCANISMES	137
Transformation d'un mouvement circulaire continu en un mouve- ment circulaire continu.	138
Trains épicycloïdaux.	154
Axes concourants.	160
Coulisse de Stephenson	179

DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE PREMIER

FONCTIONS DES FORCES. — POTENTIEL.	201
Expression du potentiel dans le cas d'une force centrale	204
Applications.	206
Flux de force et applications	216

CHAPITRE II

THÉORÈME DE GREENN ET APPLICATIONS	231
Problème de Dirichlet	240

CHAPITRE III

ATTRACTION EXERCÉE PAR UN ELLIPSOÏDE	245
--	-----

CHAPITRE IV

MÉCANIQUE DES FLUIDES	265
Equilibre des fluides soumis seulement à l'action de la pesanteur.	278
Composition des pressions relatives à une surface non fermée . .	282
Formule barométrique	294
Conditions d'équilibre des corps flottants	298

CHAPITRE V

HYDRODYNAMIQUE.	322
Petits mouvements des fluides	343
Tourbillons	347

Digitized by

Google

Original from
HARVARD UNIVERSITY

