IX. *Sur les Groupes Continus.* Par H. Poincaré.

[*Received* 25 September, 1899]

I. Introduction.

La théorie des groupes continus, ce titre immortel de gloire du regretté Sophus Lie, repose sur trois théorèmes fondamentaux

Le premier théorème de Lie nous apprend comment dans tout groupe continu il y a des substitutions infinitésimales et comment ce groupe peut être formé à l'aide des opérateurs

$$X(f) = \Sigma (X_i) \frac{df}{dx_i}.$$

Considérons r opérateurs de cette forme

$$(1) \qquad X_1(f), \quad X_2(f), \quad \ldots\ldots, \quad X_r(f),$$

et convenons de poser

$$X_i X_k - X_k X_i = (X_i X_k).$$

D'après le second théorème de Lie si les symboles $(X_i X_k)$ sont liés aux opérateurs X_i par des relations linéaires de la forme

$$(2) \qquad (X_i X_k) = \Sigma c_{iks} X_s,$$

où les c sont des constantes, les r opérateurs (1) donneront naissance à un groupe.

Les relations linéaires (2) pourront s'appeler *relations de structure* puisqu'elles définissent la "structure" du groupe qui dépend uniquement des constantes c

C'est le troisième théorème de Lie qui attirera surtout notre attention Quelles sont les conditions pour qu'on puisse former un groupe de structure donnée, c'est-à-dire pour trouver r opérateurs X_1, X_2, ..., X_r satisfaisant à des relations de la forme (2) dont les coefficients c sont donnés?

On voit tout de suite que les coefficients c ne peuvent être choisis arbitrairement. On doit d'abord avoir

$$(3) \qquad c_{kis} = -c_{iks}.$$

Ensuite d'après la définition même du symbole $(X_i X_k)$ on a identiquement

$$(4) \qquad ((X_a X_b) X_c) + ((X_b X_c) X_a) + ((X_c X_a) X_b) = 0,$$

d'où résultent entre les c certaines relations connues sous le nom d'*identités de Jacobi*

Une condition nécessaire pour que l'on puisse former un groupe de structure donnée, c'est donc que les coefficients c satisfassent à ces identités de Jacobi auxquelles il convient d'adjoindre les relations (3).

Le troisième théorème de Lie nous enseigne que cette condition est suffisante

Pour la démonstration de ce théorème, nous devons distinguer deux familles de groupes.

Les *groupes de la* 1ère *famille* sont ceux qui ne contiennent aucune substitution permutable à toutes les substitutions du groupe

Les *groupes de la* 2e *famille* sont ceux qui contiennent des substitutions permutables à toutes les substitutions du groupe.

En ce qui concerne les groupes de la 1ère famille, la démonstration de Lie, fondée sur la considération du groupe adjoint, ne laisse rien à désirer par sa simplicité.

En ce qui concerne les groupes de la 2e famille, Lie a donné une démonstration entièrement différente, beaucoup moins simple, mais qui permet cependant de former les opérateurs $X_i(b)$ par l'intégration d'équations différentielles ordinaires

Dans une note récemment insérée dans les *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, j'ai donné une démonstration nouvelle du 3e théorème de Lie.

Les résultats contenus dans cette note étaient moins nouveaux que je ne le croyais quand je l'ai publiée

D'une part en effet, Schur avait dans les *Berichte der k sachsischen Gesellschaft der Wissenschaften* 1891 et dans le tome 41 des *Mathematische Annalen* donné du théorème en question une demonstration entièrement différente de celle de Lie

Cette démonstration présente la plus grande analogie avec celle que je propose, mais elle n'a pour ainsi dire pas été poussée jusqu'au bout Comme le fait remarquer Engel, le résultat dépend de séries que Schur forme et dont il démontre la convergence, au contraire Lie ramène le problème à l'intégration d'équations différentielles ordinaires.

Je suis arrivé comme Lie lui-même à des équations différentielles ordinaires qui même sont susceptibles d'être complètement intégrées

D'autre part Campbell a donné sous une autre forme quelques-unes des formules auxiliaires qui m'ont servi de point de départ (*Proceedings of the London Mathematical Society*, tome 28 page 381 et tome 29 page 612)

Il m'a semblé néanmoins que cette note contenait encore assez de résultats nouveaux pour qu'il y eût quelque intérêt à la développer

Je ramène en effet la formation d'un groupe de structure donnée, à l'intégration d'équations différentielles simples, intégration qui peut se faire en termes finis

Ces équations sont moins simples que celles que Lie a formées pour les groupes de la 1ère famille; mais même dans ce cas, il peut y avoir intérêt à les connaître, car elles sont d'une forme différente et me s'en déduisent pas immédiatement.

De plus elles sont applicables aux groupes de la 2e famille et dans ce cas elles nous fournissent une solution du problème plus simple que celle de Lie.

II Définition des Opérateurs.

Soit f une fonction quelconque de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Soit X un opérateur qui change f en

$$(X_1)\frac{df}{dx_1}+(X_2)\frac{df}{dx_2}+\ldots+(X_n)\frac{df}{dx_n},$$

où les (X_i) sont n fonctions données des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de sorte que

$$X(f)=\Sigma(X_i)\frac{df}{dx_i}$$

Soient Y, Z, etc d'autres opérateurs analogues de telle façon que

$$Y(f)=\Sigma(Y_i)\frac{df}{dx_i},\quad Z(f)=\Sigma(Z_i)\frac{df}{dx_i},\ldots$$

les (Y_i), les (Z_i), étant d'autres fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dans ces conditions

$X^2(f)=X[X(f)]$, $XY(f)=X[Y(f)]$, $X^2Y(f)=X[XY(f)]$, $XYZ(f)=X[YZ(f)]$, ,

seront des combinaisons linéaires des dérivées partielles des divers ordres de la fonction f, multipliées par des fonctions données des x_i

Ainsi se trouveront définis de nouveaux opérateurs X^2, XY, X^2Y, XYZ, ..., qui sont des combinaisons des opérateurs simples X, Y, Z, ... On voit que ces produits symboliques obéissent à la loi associative mais n'obéissent pas en général à la loi commutative de sorte que XY ne doit pas être confondu avec YX.

Ces opérateurs sont ainsi symboliquement représentés par des monômes, mais on peut définir des opérateurs qui seront symboliquement représentés par des polynômes tels que

$$1+aX,\quad aX+bY,\quad aX^2+2bXY+cY^2,\ldots\ldots,$$

en convenant d'écrire par exemple

$$(1+aX)(f)=f+aX(f),\quad (aX+bY)(f)=aX(f)+bY(f)\ldots\ldots\ldots$$

On voit que les polynômes opérateurs ainsi définis obéissent à la fois à la loi associative et à la loi distributive, de sorte qu'on aura

$$(aX+bY)(cX+dY)=acX^2+adXY+bcYX+bdY^2,$$

et en particulier

$$(X+Y)^2=X^2+XY+YX+Y^2,$$

expression qu'il ne faut pas confondre avec $X^2+2XY+Y^2$

On peut aussi introduire des opérateurs qui seront représentés symboliquement par des séries infinies Je citerai par exemple l'opérateur

$$f+\alpha(X+Y)(f)+\alpha^2(X+Y)^2(f)+\alpha^3(X+Y)^3(f)+\quad .,$$

que je représenterai symboliquement par

$$\left[\frac{1}{1-\alpha(\lambda+Y)}\right](f),$$

ou plus simplement par

$$\frac{1}{1-\alpha(X+Y)},$$

et l'opérateur

$$f+\frac{\alpha}{1!}X(f)+\frac{\alpha^2}{2!}X^2(f)+\frac{\alpha^3}{3!}X^3(f)+\ldots\ldots,$$

que je représenterai par $e^{\alpha X}(f)$ ou simplement par $e^{\alpha X}$

On peut se demander si l'emploi de ces opérateurs représentés par des séries est légitime et si la convergence des opérations est assurée

Il y a des cas où cette convergence est certaine. C'est ainsi que Lie a démontré que

$$e^{tX}(f)=f(x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_n)$$

où les x'_i sont définis par les équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt}=(X_i)(x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_n),$$

et par les conditions initiales

$$x'_i=x_i \qquad \text{pour } t=0$$

Les opérateurs définis par des séries symboliques obéissent évidemment aux lois distributive et associative, ce qui permet par exemple d'écrire des égalités telles que celle-ci

$$(e^Ye^{aX}e^Z)(e^{-Z}e^{bX}e^T)=e^Ye^{(a+b)X}e^T$$

Il y a aussi un cas où ils obéissent à la loi commutative Soient

$$\phi(X)=\Sigma a_nX^n,\quad \psi(X)=\Sigma b_nX^n,$$

deux séries symboliques dépendant d'un seul opérateur élémentaire X

On a alors

$$\phi(X)[\psi(X)(f)]=\psi(X)[\phi(X)(f)].$$

Les deux produits symboliques $\phi(X)\psi(X)$ et $\psi(X)\phi(X)$ sont en effet des sommes de monômes dont tous les facteurs sont égaux à X Si tous les facteurs sont

identiques, il est clair que l'ordre de ces facteurs est indifférent et que les opérations sont commutatives

Mais cela ne sera plus vrai si les séries symboliques dépendent de plusieurs opérateurs élémentaires différents; il ne faudrait pas par exemple confondre

$$e^X e^Y = \Sigma \frac{X^m Y^n}{m!\, n!}$$

avec

$$e^Y e^X = \Sigma \frac{Y^n X^m}{m!\, n!},$$

ni avec

$$e^{X+Y} = \Sigma \frac{(X+Y)^p}{p!}$$

III Calcul des Polynômes Symboliques

Soient $X, Y, Z, T, U, \ldots, n$ opérateurs élémentaires Par leurs combinaisons on pourra former d'autres opérateurs représentés symboliquement par des monômes ou des polynômes.

Deux monômes seront dits *équipollents* lors qu'ils ne différeront que par l'ordre de leurs facteurs, il en sera de même de deux polynômes qui seront des sommes de monômes équipollents chacun à chacun

Nous appellerons *polynôme régulier* tout polynôme qui peut être regardé comme une somme de puissances de la forme

$$(\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \ldots)^p.$$

Il résulte de cette définition

1°. Que si un polynôme régulier contient parmi ses termes un certain monôme, tous les monômes équipollents figureront dans ce polynôme avec le même coefficient Cette condition est d'ailleurs suffisante pour que le polynôme soit régulier

2°. Que parmi les polynômes équipollents à un polynôme donné il y a un polynôme régulier et un seul.

Le polynôme

$$XY - YX$$

jouit de la même propriété que les opérateurs élémentaires, c'est-à-dire que

$$(XY - YX)(f)$$

est comme $X(f)$, $Y(f)$ etc. une combinaison linéaire des dérivées *du premier ordre seulement* de la fonction f multipliées par des fonctions données des x_i

Nous supposerons que les opérateurs élémentaires et leurs combinaisons linéaires sont seuls à jouir de cette propriété (Si cela n'avait pas lieu, nous introduirions parmi les opérateurs élémentaires tous ceux qui en jouiraient) Nous devrons donc avoir des relations de la forme.

$$(1) \qquad XY - YX = (XY),$$

où (XY) est une combinaison linéaire des opérateurs élémentaires. nous reconnaissons là la relation de Lie dite relation de structure

$$X_i X_k - X_k X_i = \Sigma c_{iks} X_s$$

Cela posé, deux polynômes seront *équivalents* lorsqu'on pourra les réduire l'un à l'autre en tenant compte des relations (1)

Par exemple le produit

$$(2) \qquad P[XY - YX - (XY)]Q$$

(où le premier et le dernier facteurs P et Q sont deux monômes quelconques) est équivalent à zero, et il en est de même des produits analogues et de leurs combinaisons linéaires. Les produits de la forme (2) sont ce que j'appellerai des *produits trinômes*

La différence de deux monômes qui ne diffèrent que par l'ordre de deux facteurs consécutifs est équivalente à un polynôme de degré moindre

Soient en effet X et Y ces deux facteurs consécutifs Nos deux monômes s'écriront

$$PXYQ, \qquad PYXQ,$$

P et Q étant deux monômes quelconques, et leur différence

$$P[XY - YX]Q$$

sera équivalente à

$$P(XY)Q,$$

dont le degré est d'une unité plus petit, puisque (XY) est du 1er degré, $XY - YX$ du 2d degré

Soient maintenant M et M' deux monômes équipollents quelconques, c'est-à-dire ne différant que par l'ordre des termes On pourra trouver une suite de monômes

$$M, M_1, M_2, \quad , M_p, M',$$

dont le premier et le dernier sont les deux monômes donnés et qui seront tels que chacun d'eux ne diffère du précédent que par l'ordre de deux facteurs consécutifs La différence $M - M'$ qui est la somme des différences $M - M_1$, $M_1 - M_2$, . . , $M_p - M'$ sera donc encore équivalente à un polynôme de degré moindre

Plus généralement, la différence de deux polynômes équipollents est équivalente à un polynôme de degré moindre

Je dis maintenant qu'*un polynôme quelconque est toujours équivalent à un polynôme régulier*

Soit en effet P_n un polynôme quelconque de degré n, il sera équipollent à un polynôme régulier P'_n, on aura alors l'équivalence

$$P_n = P'_n + P_{n-1},$$

où P_{n-1} est un polynôme de degré $n-1$ qui sera à son tour équipollent à un polynôme régulier P'_{n-1}, d'où l'équivalence

$$P_{n-1} = P'_{n-1} + P_{n-2},$$

et ainsi de suite, on finira par arriver à un polynôme de degré zéro, de sorte que nous pouvons écrire l'équivalence :

$$P_n = P'_n + P'_{n-1} + P'_{n-2} + \quad ,$$

dont le second membre est un polynôme régulier

On a donc un moyen de réduire un polynôme quelconque à un polynôme régulier en se servant des relations (1) Il reste à rechercher si cette réduction ne peut se faire que d'une seule manière

Le problème peut encore se présenter sous la forme suivante, un polynôme régulier peut-il être équivalent à zéro ? Ou bien encore peut-on trouver une somme de *produits trinômes* de la forme

$$(2) \qquad P[XY - YX - (XY)]Q,$$

qui soit un polynôme régulier non identiquement nul ? Toutes les sommes de pareils produits sont en effet équivalentes à zéro

Le degré d'un produit trinôme sera égal à 2 plus la somme des degrés des polynômes P et Q Si je considère ensuite une somme S de produits (2), ce que j'appellerai le degré de cette somme S, ce sera le plus élevé des degrés des produits qui y figurent, quand même les termes du degré le plus élevé de ces différents produits se détruiraient mutuellement

Le produit trinôme (2) peut être considéré comme la somme de deux produits, le *produit binôme*

$$(2 \text{ bis}) \qquad P[XY - YX]Q,$$

où je distinguerai le *monôme positif* $PXYQ$ et le *monôme négatif* $-PYXQ$, et le produit

$$-P(XY)Q,$$

que j'appellerai *le produit complémentaire.*

Soit donc S une somme quelconque de produits trinômes de degré p ou de degré inférieur, je pourrai écrire :

$$S = S_p - T_p + S_{p-1} - T_{p-1} + \ldots \ldots + S_2 - T_2,$$

où S_k est une somme de produits binômes de degré k

$$(2 \text{ ter}) \qquad P[XY - YX]Q,$$

tandis que $-T_k$ est la somme des produits complémentaires correspondants

$$-P(XY)Q.$$

Il s'agit de savoir si la somme S peut être un polynôme régulier sans être identiquement nulle J'observe d'abord que si S est un polynôme régulier, il doit en être de même de S_p, car S_p représente l'ensemble des termes de degré p dans S, tandis que $(S_{p-1} - T_p)$, $(S_{p-2} - T_{p-1})$, . . , $(S_2 - T_3)$, $-T_2$ représentent respectivement l'ensemble des termes de degré $p-1$, $p-2$, ..., 2, 1.

On voit immédiatement que S_p est équipollent à zéro, comme zéro est un polynôme régulier, et que deux polynômes réguliers ne peuvent être équipollents sans être identiques, il faut que S_p soit identiquement nul

Soit en particulier $p = 3$,

$$S_3 = \Sigma [XY - YX] Z - \Sigma Z [XY - YX],$$

le signe Σ signifie que l'on fait la somme du terme qui est explicitement exprimé sous ce signe et des deux termes qu'on en peut déduire en permutant circulairement les trois lettres X, Y, Z.

On aura

$$T_3 = \Sigma (XY) Z - \Sigma Z (XY),$$

puis

$$S_2 = \Sigma [(XY) Z - Z (XY)],$$

$$T_2 = \Sigma [(XY) Z],$$

$$S = S_3 - T_3 + S_2 - T_2 = \Sigma [XY - YX - (XY)] Z - \Sigma Z [XY - YX - (XY)]$$
$$+ \Sigma [(XY) Z - Z (XY) - ((XY) Z)]$$

Il est aisé de vérifier que S_3 et $S_2 - T_2$ sont identiquement nuls, de sorte que S se réduit à $-T_2$

Or

$$T_3 = [(XY) Z] + [(YZ) X] + [(ZX) Y]$$

est un polynôme du 1er degre, car $[(XY) Z]$ comme (XY) lui-même est un polynôme du 1er degré

Or dans un polynôme du 1er degré, chaque terme ne contenant qu'un seul facteur, on n'a pas à se préoccuper de l'ordre des facteurs Tout polynôme du 1er degré est donc un polynôme régulier. Si donc le polynôme T_2 n'est pas identiquement nul, la somme S sera égale à un polynôme régulier qui ne sera pas identiquement nul

Donc pour qu'un polynôme puisse être réduit d'une seule manière à un polynôme régulier il faut qu'on ait les identités suivantes

$$(3) \qquad [(XY) Z] + [(YZ) X] + [(ZX) Y] = 0$$

On reconnaît là les *identités de Jacobi* qui jouent un si grand rôle dans la théorie de Lie

(Si d'ailleurs ces identités n'avaient pas lieu, les opérateurs élémentaires seraient liés par les équations (3) qui ne seraient plus des identités, ils ne seraient plus linéairement indépendants; on pourrait donc en réduire le nombre.)

Les identités (3) sont donc la condition nécessaire pour que la réduction d'un polynôme à un polynôme régulier ne puisse se faire que d'une seule manière.

Il me reste à montrer que cette condition est suffisante.

Je dirai pour abréger une *somme régulière* pour désigner une somme de produits trinômes qui est un polynôme régulier.

Soit alors

$$S = S_p - T_p + S_{p-1} - T_{p-1} + \ldots$$

une somme de produits trinômes, les deux premiers termes $S_p - T_p$ représentent la somme des produits trinômes du degré le plus élevé, c'est ce que j'appellerai la *tête* de la somme S.

J'ai distingué plus haut dans un produit trinôme trois parties que j'ai appelées le monôme positif, le monôme négatif et le produit complémentaire Je dirai qu'une somme de produits trinômes forme une *chaîne* si le monôme négatif de chaque produit est égal et de signe contraire au monôme positif du produit suivant Le monôme positif du premier produit et le monôme négatif du dernier seront alors les *monômes extrêmes* de la chaîne

Il résulte de cette définition que tous les monômes positifs d'une même chaîne ne diffèrent que par l'ordre de leurs facteurs.

Une chaîne sera *fermée* si les deux monômes extrêmes sont égaux et de signe contraire. Si $S_p - T_p$ est une chaîne fermée de produits trinômes (S_p représentant la somme des produits binômes et $-T_p$ celle des produits complémentaires), il est clair que S_p est identiquement nul puisque les monômes positifs et négatifs se détruisent deux à deux.

Nous avons vu que si S est une somme régulière, S_p est identiquement nul, d'où il résulte que la tête d'une somme régulière S se compose toujours d'une ou plusieurs chaînes fermées

Si deux chaînes ont mêmes monômes extrêmes, leur différence est une chaîne fermée

Nous nous servirons de cette remarque pour montrer qu'une chaîne fermée peut toujours de plusieurs manières *se décomposer* en deux ou plusieurs chaînes fermées Une chaîne fermée quelconque peut de plusieurs manières être regardée comme la différence de deux chaînes C et C' ayant mêmes monômes extrêmes, soit alors C'' une troisième chaîne ayant mêmes monômes extrêmes La chaîne fermée $C - C'$ se trouve ainsi *décomposée* en deux autres chaînes fermées $C - C''$ et $C'' - C'$

Il s'agit de montrer que *toute somme régulière est identiquement nulle* et en effet quand cela aura été démontré, il sera évident qu'un polynôme régulier dont tous les coefficients ne seront pas nuls ne pourra être équivalente à zéro, puisque tout polynôme régulier équivalent à zéro est par définition une somme régulière

Supposons que le théorème ait été établi pour les sommes de degré 1, 2, ..., $p-1$, je me propose de l'étendre aux sommes de degré p

Je remarque d'abord que si une somme régulière de degré p est identiquement nulle, il en sera de même de toutes les sommes régulières de degré p *qui ont même tête* La différence de ces deux sommes serait en effet une somme régulière de degré $p-1$ qui serait identiquement nulle d'après notre hypothèse.

Il me suffira donc de former toutes les chaînes fermées de degré p et de montrer que chacune d'elles peut être regardée comme la tête d'une somme régulière identiquement nulle

Toute somme régulière S d'ordre p a en effet pour tête une de ces chaînes fermées, par exemple S', si donc je montre que l'une des sommes régulières dont la tête est S' est identiquement nulle, il en sera de même de toutes les autres et en particulier de S.

Pour établir ce point, je vais *décomposer* la chaîne fermée envisagée en plusieurs chaînes fermées composantes

Il me suffira de démontrer la proposition pour chacune des composantes

J'appellerai *chaîne simple de la* 1ère *sorte* toute chaîne où le premier facteur de tous les monômes soit positifs soit négatifs sera partout le même

J'appellerai *chaîne simple de la* 2e *sorte* toute chaîne où le dernier facteur de tous les monômes sera partout le même

Une chaîne simple peut d'ailleurs être ouverte ou fermée.

Il est évident que toute chaîne fermée peut être regardée comme la somme d'un certain nombre de chaînes simples, alternativement de la 1ère et de la 2e sorte

Soit donc S une chaîne fermée, C_1, C_2, , C_n des chaînes simples de la 1ère sorte, C'_1, C'_2, , C'_n des chaînes simples de la 2e sorte, on aura

$$S = C_1 + C'_1 + C_2 + C'_2 + \quad + C_n + C'_n,$$

le monôme négatif extrême de chaque chaîne étant bien entendu égal et de signe contraire au monôme positif extrême de la chaîne suivante, et le monôme négatif extrême de C'_n égal et de signe contraire au monôme positif extrême de C_1

Soit X le premier facteur de tous les monômes de C_1, Z le dernier facteur de tous les monômes de C'_1, Y le premier facteur de tous les monômes de C_2, T le dernier facteur de tous les monômes de C'_2 (je n'exclus pas le cas où deux des opérateurs X, Y, Z, T seraient identiques)

Soit alors C'' une chaîne simple de la 2e sorte ayant son monôme positif extrême égal et de signe contraire au monôme négatif extrême de C'_2, dont tous les monômes ont pour dernier facteur T, et dont le monôme négatif extrême a pour premier facteur X

Soit C''' une chaîne simple de la 1ère sorte dont tous les monômes ont pour premier facteur X et dont les monômes extrêmes sont respectivement égaux et de signe contraire au monôme négatif extrême de C'' et au monôme positif extrême de C_1

La chaîne fermée S se trouvera décomposée en deux chaînes fermées composantes, à savoir

$$S' = (C''' + C_1) + C'_1 + C_2 + (C'_2 + C''),$$

$$S'' = - C''' + C_3 + C'_3 + \ldots + C_n + C'_n - C'''.$$

S' ne contient que quatre chaînes simples, car $(C''' + C_1)$ et $(C'_2 + C'')$ sont des chaînes simples, S'' contient deux chaînes simples de moins que S

En poursuivant on finira par décomposer S en chaînes fermées composantes, formées seulement de quatre chaînes simples. Il nous suffit donc d'envisager les chaînes fermées formées de quatre chaînes simples comme par exemple S'

Les monômes positifs extrêmes des quatre chaînes simples qui forment S' ont respectivement pour premier et dernier facteurs

$$\begin{aligned} &\text{pour } C''' + C_1, && X \text{ et } T,\\ &\text{„ } C'_1 \text{ ,} && X \text{ et } Z,\\ &\text{„ } C_2 \text{ ,} && Y \text{ et } Z,\\ &\text{„ } C'_2 + C'', && Y \text{ et } T \end{aligned}$$

Soient M_1, M'_1, M_2, M'_2 ces quatre monômes

Tous ces monômes sont équipollents entre eux et équipollents à un certain monôme que j'appellerai $XYPZT$

Nous allons alors construire une série de chaînes simples, comprises dans le tableau suivant, où dans la première colonne se trouve la lettre qui désigne la chaîne, dans le seconde le monôme extrême positif, dans la troisième le monôme extrême négatif, je fais figurer dans le même tableau les quatre chaînes simples qui forment S' et je pose pour abréger

$$Q_1 = XYPZT, \quad Q'_1 = XYPTZ, \quad Q_2 = YXPTZ, \quad Q'_2 = YXPZT$$

Nom de la chaîne	Monôme positif	Monôme négatif	Nom de la chaîne	Monôme positif	Monôme négatif
$C''' + C_1$	M_1	$-M'_1$	D_2	M_2	$-Q_2$
C'_1	M'_1	$-M_2$	D'_2	M'_2	$-Q'_2$
C_2	M_2	$-M'_2$	E_1	Q_1	$-Q'_1$
C'_2	M'_2	$-M_1$	E'_1	Q'_1	$-Q_2$
D_1	M_1	$-Q_1$	E_2	Q_2	$-Q'_2$
D'_1	M'_1	$-Q'_1$	E'_2	Q'_2	$-Q_1$

On peut supposer que tous les monômes de la chaîne D_1 ont pour premier et dernier facteurs X et T, de sorte que D_1 est à la fois une chaîne simple de 1ère sorte et une chaîne simple de 2e sorte Il en est de même des autres chaînes D. On peut supposer de plus que les chaînes E se réduisent à un seul produit trinôme de manière que par exemple

$$E_1 = XYP\,[ZT - TZ - (ZT)]$$

La chaîne fermée

$$S' = (C''' + C_1) + C'_1 + C_2 + C'_2$$

peut être décomposée en cinq chaînes fermées composantes, à savoir.

$$U_1 = C''' + C_1 + D'_1 - E_1 - D_1,$$
$$U'_1 = C'_1 + D_2 - E'_1 - D'_1,$$
$$U_2 = C_2 + D'_2 - E_2 - D_2,$$
$$U'_2 = C'_2 + C'' + D_1 - E'_2 - D'_2,$$
$$V = E_1 + E'_1 + E_2 + E'_2$$

Il s'agit donc de montrer que chacune de ces cinq chaînes fermées est la tête d'une somme régulière identiquement nulle

Pour les quatre premières, qui sont des chaînes *simples* fermées, le théorème est évident. On l'a supposé démontré, en effet, pour les chaînes fermées d'ordre inférieur à p. Or il est clair que l'on a par exemple

$$U_1 = XH,$$

H étant une chaîne fermée d'ordre $p-1$.

Quant à V, ce sera la tête de la somme régulière

$$[XY - YX - (XY)]\,PZT + YXP\,[ZT - TZ - (ZT)] - [XY - YX - (XY)]\,PTZ$$
$$- XYP\,[ZT - TZ - (ZT)] + (XY)\,P\,[ZT - TZ - (ZT)] - [XY - YX - (XY)]\,P\,(ZT),$$

qui est identiquement nulle

Il reste à envisager ce qui se passe quand deux des opérateurs X, Y, Z, T sont identiques, par exemple $X = Y$, ou $X = Z$.

Nous devons alors distinguer le cas où les divers monômes positifs ou négatifs de notre chaîne contiennent deux facteurs identiques, l'un jouant le rôle de X et l'autre le rôle de Y (ou l'un le rôle de X et l'autre celui de Z), il n'y a alors rien à changer à l'analyse qui précède

Et d'autre part le cas où ces monômes ne contiennent qu'un seul facteur X

Le premier cas pourra seul se présenter si l'on suppose $X = Z$, ou $X = T$, et s'il y a plus de trois facteurs en tout.

Le second cas pourra au contraire se présenter si l'on suppose par exemple $X = Y$, mais on posera alors

$$Q_1 = Q'_2 = XPZT, \quad Q'_1 = Q_2 = XPTZ.$$

La définition des diverses chaînes demeurera d'ailleurs la même et on constatera immédiatement que la chaîne V est identiquement nulle

Le théorème est donc démontré pour les sommes d'ordre p, s'il l'est pour les sommes d'ordre moindre.

La démonstration précédente n'est toutefois pas applicable au cas de $p = 3$, car la

chaîne V n'existe que s'il y a au moins quatre facteurs. Mais la seule chaîne fermée du 3e ordre est la chaîne $S_3 - T_3$ envisagée plus haut et nous avons vu qu'elle est la tête d'une somme régulière qui est identiquement nulle si les identités (3) ont lieu

Le théorème est donc établi dans toute sa généralité

Toute somme régulière est identiquement nulle.

Donc un polynôme régulier qui n'est pas identiquement nul ne peut pas s'annuler en vertu des relations (1).

Donc en résumé,

Si les identités (3) *ont lieu, les relations* (1) *permettent d'une manière, et d'une seule, de réduire un polynôme quelconque à un polynôme régulier.*

IV. Problème de Campbell

Soient

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_r$$

r opérateurs élémentaires, supposons qu'ils soient liés par les relations

$$(1) \qquad X_a X_b - X_b X_a = (X_a X_b),$$

$(X_a X_b)$ étant une combinaison linéaire des X_k, supposons de plus qu'on ait les identités

$$(3) \qquad ((X_a X_b) X_c) + ((X_b X_c) X_a) + ((X_c X_a) X_b) = 0$$

D'après le deuxième théorème de Lie, ces opérateurs donnent naissance à un "groupe continu," qui admet r transformations infinitésimales indépendantes Ces transformations infinitésimales changent f en

$$f + \epsilon X_k(f),$$

ϵ étant une constante infiniment petite.

Soit

$$T = t_1 X_1 + t_2 X_2 + \ldots + t_r X_r,$$

une combinaison linéaire de ces opérateurs Les t_k sont des coefficients constants quelconques La transformation finie la plus générale du groupe s'exprimera par le symbole

$$e^T(f).$$

Soient maintenant

$$T = t_1 X_1 + t_2 X_2 + \ldots + t_r X_r,$$
$$V = v_1 X_1 + v_2 X_2 + \ldots + v_r X_r,$$

deux combinaisons linéaires des X. Comme les transformations e^T forment un groupe, le produit

$$e^V e^T$$

devra également faire partie du groupe, de sorte que nous devrons avoir

$$(4) \qquad e^V e^T = e^W,$$

où

$$W = w_1 X_1 + w_2 X_2 + \ldots + w_r X_r$$

est une autre combinaison linéaire des X.

Les coefficients w sont évidemment des fonctions des v et des t.

Développons le produit

$$e^V e^T = \Sigma \frac{V^m T^n}{m!\, n!}.$$

Le terme général $\frac{V^m T^n}{m!\, n!}$ est un polynôme d'ordre $m+n$ Par les relations (1) on peut le réduire à un polynôme régulier, et cette réduction ne peut se faire que d'une seule manière.

Nous pouvons donc écrire

$$\frac{V^m T^n}{m!\, n!} = \Sigma_p W(p, m, n),$$

où $W(p, m, n)$ est un polynôme régulier et homogène d'ordre $p\,(p \leq m+n)$, on a donc

$$e^V e^T = \Sigma_{p\ m\ n} W(p, m, n)$$

Si nous réunissons les termes de même degré et que nous posions

$$W_p = \Sigma_{m\ n} W(p, m, n),$$

il viendra :

$$e^V e^T = \Sigma_p W_p$$

Le second théorème de Lie, que je viens de rappeler, nous apprend que le second membre doit être de la forme e^W, et par conséquent que :

$$(5) \qquad W_p = \frac{W_1^p}{p!}$$

C'est là une proposition dont la simplicité serait inattendue, si l'on ne connaissait pas la théorie des groupes

Si on pouvait la démontrer directement on aurait, comme l'a remarqué Campbell, une nouvelle démonstration du second théorème de Lie

Mais il y a plus, on aurait aussi une nouvelle démonstration du *troisième théorème de Lie*

Les égalités (1) nous font connaître des relations entre les opérateurs élémentaires et les combinaisons $XY - YX$; ce sont ces relations qui constituent la *structure* du groupe. Cette structure est donc entièrement définie quand on connaît les r^3 coefficients c des r^3 fonctions linéaires (XY).

Mais ces r^3 constantes c ne sont pas toutes indépendantes, tous les coefficients de (XX) doivent être nuls, les coefficients de (YX) sont égaux et de signe contraire à

ceux de (XY). Enfin les constantes c doivent être choisies de telle façon que les identités (3) soient satisfaites J'adjoins donc aux identités (3) les identités suivantes qui sont evidentes

$$(3\text{ bis}) \qquad (XX)=0, \qquad (XY)=-(YX)$$

Le 3e théorème de Lie nous apprend qu'on peut toujours trouver un groupe de structure donnée, pourvu que les coefficients c qui définissent cette structure satisfassent aux identités (3) et (3 bis), c'est-à-dire aux identités de Jacobi

Mais supposons inversement qu'on ait démontré directement l'identité (5) et par conséquent la formule (4) Les coefficients w seront donnés en fonctions de v et de t, et je puis écrire

$$(6) \qquad w_k=\phi_k(v_i,\ t_i)$$

Pour former les fonctions ϕ_k, il suffit de savoir former le polynôme W_1, par conséquent de savoir former les polynômes $W(p,\ m,\ n)$, c'est-à-dire de savoir réduire un polynôme quelconque en polynôme régulier, pour cela il suffit de connaître les coefficients c

Soit

$$e^V e^T=e^W, \quad e^W e^U=e^Z, \quad e^T e^U=e^Y,$$

où

$$U=\Sigma u_k X_k, \quad Z=\Sigma z_k X_k, \quad Y=\Sigma y_k X_k$$

Le caractère associatif de nos opérateurs nous montre que l'on a

$$e^V e^Y=e^Z,$$

d'où les relations suivantes

$$w_k=\phi_k(v_i,\ t_i), \quad y_k=\phi_k(t_i,\ u_i)$$
$$(7) \qquad z_k=\phi_k(w_i,\ u_i)=\phi_k(v_i,\ y_i)$$

Regardons dans les équations (6) les t comme des constantes, ces équations (6) définiront une transformation qui transforme $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_r$ en $w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_r$. Les relations (7) nous enseignent que l'ensemble de ces transformations constitue un groupe

(C'est ce que Lie appelle la Parametergruppe)

Les substitutions infinitésimales de ce groupe sont

$$X_i(f)=\Sigma \frac{df}{dv_k}\frac{d\phi_k}{dt_i},$$

où dans $\phi_k(v_i,\ t_i)$ on annule les t après la différentiation

Les r substitutions infinitésimales $X_i(f)$ sont linéairement indépendantes Et en effet, pour qu'elles ne le fussent pas, il faudrait que le déterminant fonctionnel des ϕ_k par rapport aux t fût nul, quels que soient les v quand les t s'annulent Or cela n'a pas lieu car ce déterminant devient égal à 1 quand les v s'annulent.

Ayant ainsi défini les opérateurs élémentaires $X_i(f)$, leurs combinaisons $T=\Sigma t_i X_i(f)$, e^T, etc se trouvent définis eux-mêmes

Ces opérateurs étant associatifs, on aura

$$e^Y(f) = e^T e^U(f),$$

c'est-à-dire, en négligeant les quantités du 3e ordre par rapport aux t et aux u

$$Y = T + U + \frac{TU - UT}{2}.$$

D'autre part, d'après la manière dont ont été formées les fonctions ϕ_k, on vérifie que

$$Y = T + U + \tfrac{1}{2}(TU) = \Sigma t_i X_i + \Sigma u_k X_k + \tfrac{1}{2}\Sigma (t_i u_k - t_k u_i)(X_i X_k),$$

et la comparaison de ces deux identités donne

$$X_i X_k - X_k X_i = (X_i X_k),$$

où les coefficients des fonctions linéaires $(X_i X_k)$ sont bien les r^3 coefficients c donnés

Le groupe ainsi formé a donc bien la structure donnée et le troisième théorème de Lie est démontré

C'est au fond la démonstration de Schur

Ce que j'appellerai le problème de Campbell consiste donc à démontrer directement la formule (5), ce qui démontre à la fois le second et le troisième théorème de Lie

V. Le Symbole $\phi(\theta)$

Considérons r opérateurs élémentaires

$$X_1, X_2, \ldots, X_r,$$

et une de leurs combinaisons linéaires

$$T = t_1 X_1 + t_2 X_2 + \quad + t_r X_r$$

Soit ensuite V un autre opérateur élémentaire qui pourra être ou ne pas être une combinaison linéaire des opérateurs X.

Supposons que les opérateurs V et X soient liés par des relations de la forme

$$VX_i - X_i V = b_{i,1} X_1 + b_{i,2} X_2 + \ldots + b_{i,r} X_r$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r),$$

on aura alors

$$VT - TV = \Sigma u_k X_k,$$

où

$$u_k = \Sigma b_{i,k} t_i$$

Je poserai

$$VT - TV = \theta(T)$$

Donc $\theta(T)$ est comme T une combinaison linéaire des X, et les coefficients de $\theta(T)$ se déduisent de ceux de T par une substitution linéaire.

Je poserai

$$\theta[\theta(T)] = \theta^2(T), \quad \theta[\theta^m(T)] = \theta^{m+1}(T),$$

de sorte que $\theta^m(T)$ sera comme T une combinaison linéaire des X, les coefficients de $\theta^m(T)$ se déduisant de ceux de T en répétant m fois cette même substitution linéaire.

Si maintenant

$$\phi(\theta) = \Sigma g_k \theta^k$$

est un polynôme ou une série ordonnée suivant les puissances croissantes de θ, j'écrirai

$$\phi(\theta)(T)$$

au lieu de

$$\Sigma g_k \theta^k (T)$$

Considérons l'équation, dite caractéristique

$$(1) \quad \begin{vmatrix} b_{11}-\theta, & b_{12}, & , & b_{1r} \\ b_{21}, & b_{22}-\theta, & .., & \cdots \\ \cdot & & & \cdot \\ b_{r1}, & , & , & b_{rr}-\theta \end{vmatrix} = 0$$

Si cette équation a toutes ses racines distinctes et si ces racines sont θ_1, θ_2, ., θ_r, il existe r combinaisons linéaires des X_i, à savoir.

$$(2) \quad Y_k = \Sigma \alpha_{ik} X_i,$$

telles que

$$VY_k - Y_k V = \theta_k Y_k$$

Si alors on a

$$T = \Sigma t_i X_i = \Sigma t'_k Y_k,$$

on aura

$$\phi(\theta)(T) = \Sigma \phi(\theta_k) t'_k Y_k$$

Si nous posons

$$\phi(\theta)(T) = \Sigma h_i X_i,$$

nous voyons d'abord que les coefficients h_i sont des fonctions linéaires des t, ce sont d'autre part des fonctions des b, étudions ces fonctions.

Si $\phi(\theta)$ est un polynôme entier d'ordre p en θ, les h_i seront des polynômes entiers d'ordre p par rapport aux b Si donc $\phi(\theta)$ est une série ordonnée suivant les puissances de θ, les h_i se présenteront sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances des b. Nous allons voir bientôt quelles sont les conditions de convergence de ces séries

Des équations (2) on tire en effet

$$X_i = \Sigma \beta_{ik} Y_k,$$

d'où

$$t'_k = \Sigma \beta_{ik} t_i,$$

$$\phi(\theta)(T) = \Sigma \phi(\theta_k) t'_k \alpha_{ik} X_i,$$

d'où enfin,

$$h_i = \Sigma t_j \phi(\theta_k) \cdot \alpha_{ik}\ \beta_{jk}.$$

Pour déterminer les produits $\alpha_{ik}\beta_{jk}$ faisons

$$\phi(\theta) = \frac{1}{\xi - \theta},$$

ξ étant une constante quelconque

On a alors

$$\frac{1}{\xi - \theta}(T) = \Sigma h_i X_i = H,$$

où

$$h_i = \Sigma \frac{t_j \alpha_{ik} \beta_{jk}}{\xi - \theta_k}.$$

On tire de là

$$(\xi - \theta)(H) = T,$$

ce qui peut s'écrire

$$\xi h_i - \Sigma b_{ki} h_k = t_i$$

De ces équations on peut tirer les h en fonctions des t, on trouve

$$(3) \qquad h_i = \Sigma \frac{t_j P_{ij}}{F(\xi)},$$

où P_{ij} est un polynôme entier par rapport aux b et à ξ, quant à $F(\xi)$ c'est le premier membre de l'équation (1) où θ a été remplacé par ξ

Le second membre de l'équation (3) est une fraction rationnelle en ξ, décomposons la en éléments simples, il viendra

$$h_i = \Sigma \frac{t_j P_{ik}{}^k}{F'(\theta_k)(\xi - \theta_k)},$$

où $P_{ij}{}^k$ est ce que devient P_{ij} quand on y remplace ξ par θ_k

On a donc

$$\alpha_{ik}\beta_{jk} = \frac{P_{ij}{}^k}{F'(\theta_k)},$$

d'où enfin pour une fonction $\phi(\theta)$ quelconque

$$(4) \qquad \phi(\theta)(T) = \Sigma \frac{t_j P_{ij}{}^k \phi(\theta_k) X_i}{F'(\theta_k)}.$$

On voit que les h_i s'expriment rationnellement en fonctions des b, des θ_k et des $\phi(\theta_k)$

La formule (4) peut se mettre sous une autre forme, nous pouvons écrire

$$(4 \text{ bis}) \qquad \phi(\theta)(T) = \frac{1}{2i\pi\sqrt{-1}} \int \frac{d\xi \phi(\xi) \Sigma t_j P_{ij} X_i}{F(\xi)},$$

l'intégrale étant prise dans le plan des ξ le long d'un cercle de rayon assez petit pour que la fonction $\phi(\xi)$ soit holomorphe à l'intérieur, nous le supposerons de plus assez grand pour que les points $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$ soient à l'intérieur du cercle. Cela nous amène

à supposer en même temps que le rayon de convergence de la série $\phi(\xi)$ est plus grand que le plus grand module des quantités $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$

On a alors pour tous les points du contour d'intégration

$$|\xi| > |\theta_1|, \quad |\xi| > |\theta_2|, \quad \ldots\ldots, \quad |\xi| > |\theta_r|,$$

d'où il résulte que la fonction rationnelle

$$\frac{P_v}{F(\xi)}$$

est développable suivant les puissances croissantes des b Il en est donc de même des h_i

Nous avons dit plus haut que les h_i sont développables en séries procédant suivant les puissances des b, et d'après ce qui précède, il suffit, pour que ces séries convergent, que le rayon de convergence de la série $\phi(\xi)$ soit plus grand que la plus grande des quantités

$$|\theta_1|, \quad |\theta_2|, \quad \ldots\ldots, \quad |\theta_r|.$$

Si donc $\phi(\xi)$ est une fonction entière, les h_i seront des fonctions entières des b

Qu'arrive-t-il maintenant si l'équation caractéristique

$$F(\theta) = 0$$

a des racines multiples ? Il est aisé de s'en rendre compte en partant du cas général et en passant à la limite.

Je suppose par exemple que θ_1 soit une racine triple Alors $F(\xi)$ contient le facteur $(\xi - \theta_1)^3$ Si je décompose le second membre de (3) en éléments simples, trois de ces éléments deviendront infinis pour $\xi = \theta_1$.

Soient

$$\frac{A_1^{(i)}}{\xi - \theta_1} + \frac{A_2^{(i)}}{(\xi - \theta_1)^2} + \frac{A_3^{(i)}}{(\xi - \theta_1)^3}$$

ces trois éléments simples Alors il faudra dans la formule (4) remplacer le terme

$$\Sigma \frac{t_j P'_v \phi(\theta_i) X_i}{F''(\theta_i)}$$

(qui n'aurait plus de sens dans le cas d'une racine multiple) par les trois termes suivants

$$\Sigma A_1^{(i)} X_i \phi(\theta_i) - (1!)\Sigma A_2^{(i)} X_i \phi'(\theta_i) + (2!)\Sigma A_3^{(i)} X_i \phi''(\theta_i)$$

On opérerait de même pour les autres racines multiples

Donc les h_i, dans le cas des racines multiples, sont des fonctions rationnelles des b, des θ_k, des $\phi(\theta_k)$ et de leurs dérivés $\phi'(\theta_k)$, $\phi''(\theta_k)$, , on pousse jusqu'à $\phi^{(p)}(\theta_k)$ si θ_k est une racine multiple d'ordre $p+1$

Remarquons que je n'aurais pu faire ce raisonnement par passage à la limite, si je m'étais restreint dès le début en supposant que V est une combinaison linéaire des

X, et que les X sont liés par les relations (1) et (3) du N° IV. (relations de structure et identités de Jacobi)

Alors en effet les cas où l'équation caractéristique a des racines multiples ne pourraient plus être regardés comme des cas particuliers de ceux où toutes les racines sont distinctes. On aurait pu, il est vrai, démontrer directement la formule (4 bis) et se servir de cette formule, mais j'ai préféré ne pas m'imposer au début cette hypothèse restrictive, quitte à l'introduire dans la suite du calcul, de façon à avoir le droit de raisonner par passage à la limite.

Quoi qu'il en soit, le cas le plus intéressant au point de vue des applications à la théorie des groupes, c'est celui où cette hypothèse restrictive est satisfaite. Supposons donc que V soit une combinaison linéaire des X

$$V = v_1 X_1 + v_2 X_2 + \quad + v_r X_r.$$

Supposons de plus que les X soient liées par les relations (1) du N° précédent

$$X_i X_j - X_j X_i = \Sigma c_{ijs} X_s,$$

et que les constantes c satisfont à des relations telles que les identités (3) du N° précédent aient lieu.

On aura alors

$$\theta(T) = \Sigma c_{ijs} v_i t_j X_s,$$

d'où

$$b_{i\,k} = c_{1\,i\,k} v_1 + c_{2\,i\,k} v_2 + \quad + c_{r\,i\,k} v_r$$

Les résultats, démontrés dans le cas général, seront évidemment encore vrais dans ce cas particulier, si donc on pose

$$\phi(\theta)(T) = \Sigma h_i X_i,$$

les h_i seront des fonctions linéaires des t, et des fonctions rationnelles des v, des θ_k, des $\phi(\theta_k)$ et de quelques unes de leurs dérivées. Les θ_k sont les racines d'une équation algébrique dont le premier membre est un polynôme entier homogène de degré r par rapport aux v et à l'inconnue θ.

De plus les h_i ne dépendent que linéairement des $\phi(\theta_k)$ et de leurs dérivées.

Si $\phi(\xi)$ est une fonction entière de ξ, les h_i sont des fonctions entières des v.

Dans tous les cas, le symbole $\phi(\theta)(T)$ se trouve entièrement défini.

Je terminerai par deux remarques.

1° Si $\chi(\xi)$ est le produit des deux fonctions $\phi(\xi)$ et $\psi(\xi)$, on aura

$$\phi(\theta)[\psi(\theta)(T)] = \psi(\theta)[\phi(\theta)(T)] = \chi(\theta)(T)$$

2° Si on a

$$\phi(\theta)(T) = U,$$

on aura

$$\frac{1}{\phi(\theta)}(U) = T$$

Cette dernière égalité n'a de sens que si $\phi(\xi)$ ne s'annule pas pour $\xi = 0$, de telle façon que $\frac{1}{\phi(\theta)}$ soit développable suivant les puissances de θ.

VI. Formules fondamentales.

Considérons l'expression

$$(1) \qquad e^{-\alpha V} e^{\beta T} e^{\alpha V},$$

V et T ayant même signification que dans le § précédent, tandis que α et β sont des constantes très petites Développons cette expression en négligeant les termes du 3e ordre par rapport à α et à β, il viendra ·

$$\left(1 - \alpha V + \frac{\alpha^2 V^2}{2}\right)\left(1 + \beta T + \frac{\beta^2 T^2}{2}\right)\left(1 + \alpha V + \frac{\alpha^2 V^2}{2}\right),$$

ou

$$1 + \beta T + \frac{\beta^2 T^2}{2} - \alpha\beta\,(VT - TV),$$

ou avec la même approximation

$$e^{\beta T - \alpha\beta\,(VT - TV)}$$

On aura donc, toujours avec cette approximation

$$(2) \qquad e^{-\alpha V} e^{\beta T} e^{\alpha V} = e^{\beta U}, \text{ où } U = T - \alpha\theta\,(T),$$

ou encore avec la même approximation

$$(2 \text{ bis}) \qquad e^{-\alpha V} e^{\beta T} e^{\alpha V} = e^{\beta U}, \text{ où } U = e^{-\alpha\theta}\,(T)$$

Je me propose maintenant de démontrer que la formule (2 bis) est vraie quelque loin que l'on pousse l'approximation, et d'abord qu'elle est vraie quand on néglige le carré de β et qu'on pousse l'approximation par rapport à α aussi loin que l'on veut

Supposons donc qu'on pousse l'approximation jusqu'aux termes en β et jusqu'aux termes en α^m inclusivement Dans l'expression (1) nous remplacerons $e^{\beta T}$ par $1 + \beta T$, $e^{\alpha V}$ et $e^{-\alpha V}$ par les $m+1$ premiers termes de leurs développements, en effectuant le produit (et négligeant dans ce produit α^{m+1}) nous obtiendrons un polynôme symbolique que nous pourrons rendre régulier par les procédés du N° III Soit

$$\phi\,(\alpha,\ \beta) = \Sigma A \Pi,$$

le polynôme régulier ainsi obtenu, Π est un monôme symbolique, et A son coefficient qui est un polynôme entier en α et β

Nous avons alors

$$(3) \qquad \phi\,(\alpha + d\alpha,\ \beta) = e^{-(\alpha + d\alpha)\,V} e^{\beta T} e^{(\alpha + d\alpha)\,V} = e^{-d\alpha \cdot V}\,\phi\,(\alpha,\ \beta)\,e^{d\alpha \cdot V}.$$

En effectuant le produit du 3e membre de cette double égalité, et négligeant le carré de la différentielle $d\alpha$, on obtiendra un polynôme régulier de même forme dont les coefficients sont eux-mêmes des polynômes du 1er degré par rapport à $d\alpha$ d'une part, par rapport aux coefficients A d'autre part. Telle est la forme du polynôme $\phi\,(\alpha + d\alpha,\ \beta)$.

D'autre part on a

$$(3\text{ bis}) \qquad \phi(\alpha+d\alpha,\beta)-\phi(\alpha,\beta)=d\alpha\,\Sigma\frac{dA}{d\alpha}\,\Pi.$$

Cette égalité, rapprochée de la remarque que nous venons de faire, montre que $\frac{dA}{d\alpha}$ est une combinaison linéaire des coefficients A.

Donc ces coefficients A, considérés comme fonctions de α, satisfont à des équations linéaires à coefficients constants

De plus pour $\alpha=0$ ils doivent se réduire aux coefficients de $e^{\beta T}$ Ces conditions suffisent pour les déterminer

Or je dis que l'on peut y satisfaire en faisant (conformément à la formule 2 bis)

$$\phi(\alpha,\beta)=e^{\beta U}, \qquad U=e^{-\alpha\theta}(T)$$

En effet cette formule nous donne

$$\phi(\alpha+d\alpha,\beta)=e^{\beta U'}, \qquad U'=e^{-(\alpha+d\alpha)\theta}(T),$$

et il s'agit de vérifier que

$$e^{-d\alpha\ V}e^{\beta U}e^{d\alpha\ V}=e^{\beta U'}$$

Or la formule (2 bis) démontrée quand on néglige d'une part le carré de β, d'autre part le carré de α, peut s'appliquer ici puisque nous négligeons le carré de β et celui de $d\alpha$ Nous avons donc

$$e^{-d\alpha\ V}e^{\beta U}e^{d\alpha\ V}=e^{\beta U''}, \quad U''=e^{-d\alpha.\theta}(U),$$

d'où

$$U''=e^{-d\alpha\ \theta}[e^{-\alpha\theta}(T)]=e^{-(\alpha+d\alpha)\theta}(T)=U'.$$

On a donc bien

$$\phi(\alpha+d\alpha,\beta)=e^{-d\alpha.V}e^{\beta U}e^{d\alpha.V}=e^{\beta U''}$$

C. Q. F. D.

La formule (2 bis) satisfait donc à nos équations différentielles et comme ces équations ne comportent qu'une solution, cette formule se trouve vérifiée

Poussons maintenant l'approximation aussi loin que nous voulons tant par rapport à β que par rapport à α

Nous avons

$$\phi(\alpha,\beta)=e^{-\alpha V}e^{\beta T}e^{\alpha V},$$

d'où

$$\phi(\alpha,\beta+d\beta)=e^{-\alpha V}e^{(\beta+d\beta)T}e^{\alpha V}=(e^{-\alpha V}e^{\beta T}e^{\alpha V})(e^{-\alpha V}e^{d\beta\ T}e^{\alpha V}),$$

ou

$$\phi(\alpha,\beta+d\beta)=\phi(\alpha,\beta)\,\phi(\alpha,d\beta)$$

Comme nous négligeons le carré de $d\beta$, je puis écrire

$$\phi(\alpha,d\beta)=e^{d\beta\ U}, \qquad U=e^{-\alpha\theta}(T),$$

d'où :

$$\phi(\alpha,\ \beta+d\beta)=\phi(\alpha,\ \beta)\,e^{d\beta\,.\,U}. \tag{4}$$

Cette formule (4) représente sous forme condensée des équations différentielles de même forme que les équations (3 bis), auxquelles doivent satisfaire les coefficients A de

$$\phi(\alpha,\ \beta)=\Sigma A\,.\,\Pi.$$

C'est ainsi que la formule (4) représentait sous forme condensée les équations (3 bis).

On peut satisfaire à ces équations par la formule (2 bis), cette formule donne en effet

$$\phi(\alpha,\ \beta+d\beta)=e^{(\beta+d\beta)U}=e^{\beta U}e^{d\beta\ U}=\phi(\alpha,\ \beta)\,e^{d\beta\ U}$$

Les équations différentielles ne comportant comme les équations (3 bis) qu'une seule solution, la formule (2 bis) se trouve vérifiée dans tous les cas.

Cette formule (2 bis) n'est d'ailleurs que la traduction symbolique d'une formule bien connue et, si j'ai développé la démonstration, c'est uniquement pour mieux faire comprendre les symboles employés et pour faire connaître un mode de raisonnement applicable à des questions analogues, je veux parler de celui où s'introduisent les équations différentielles (3 bis) ou les équations analogues

Il importe avant d'aller plus loin de préciser la portée de la démonstration que nous venons de donner Pour qu'elle soit valable, il faut que tout polynôme puisse être réduit d'une manière et d'une seule à être régulier Or, d'après le N° III, cela a lieu dans deux cas.

1° Si V et T sont des combinaisons linéaires des opérateurs X,

$$V=\Sigma v_i X_i,\qquad T=\Sigma t_i X_i,$$

et si ces opérateurs sont liés par des relations

$$X_i X_k-X_k X_i=\Sigma c_{iks}X_s,$$

les constantes c satisfaisant aux identités

$$(X_a(X_bX_c))+(X_b(X_cX_a))+(X_c(X_aX_b))=0;$$

si en d'autres termes les opérateurs X définissent un groupe de Lie et si e^{aV}, $e^{\beta T}$ sont deux transformations quelconques de ce groupe

Dans ce premier cas la formule (2 bis) *est toujours vraie*

2° Elle sera donc vraie en particulier si on suppose que

$$V,\ X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_r$$

sont $r+1$ opérateurs liés par les relations

$$VX_i-X_iV=\Sigma b_{ik}X_k \tag{5}$$

et

$$(6) \qquad X_i X_k - X_k X_i = 0$$

Ces relations entraînent en effet l'identité

$$(V(X_i X_k)) + (X_i(X_k V)) + (X_k(V X_i)) = 0,$$

en désignant suivant la coutume par (VX_i) et $(X_i X_k)$ les seconds membres des relations (5) et (6) On aura donc dans cette hypothèse

$$(2 \text{ bis}) \qquad e^{-\alpha V} e^{\beta T} e^{\alpha V} = e^{\beta U}, \quad U = e^{-\alpha\theta}(T).$$

On aura de même en permutant V et T

$$(2 \text{ ter}) \qquad e^{-\beta T} e^{\alpha V} e^{\beta T} = e^{\alpha W}, \quad W = e^{-\beta\eta}(V),$$

$e^{-\beta\eta}$ étant un symbole analogue à $e^{-\alpha\theta}$ et défini de la manière suivante le symbole η est formé avec T comme le symbole θ avec V, on a donc, si Y est un opérateur quelconque

$$\eta(Y) = TY - YT$$

On aura donc

$$\eta(V) = TV - VT = -\theta(T),$$

et en vertu des relations (6)

$$\eta(X) = 0, \quad \eta^2(V) = 0, \quad \eta^m(V) = 0,$$

$$e^{-\beta\eta}(V) = V - \beta\eta(V) = V + \beta\theta(T)$$

La formule (2 ter) devient ainsi

$$(2 \text{ quater}) \qquad e^{-\beta T} e^{\alpha V} e^{\beta T} = e^{\alpha V + \alpha\beta\theta(T)}$$

Si l'on suppose maintenant que les relations (5) subsistent, mais que les relations (6) n'aient plus lieu, les formules (2 bis) et (2 quater) cesseront d'être vraies quels que soient α et β

Cependant supposons que l'on regarde les opérateurs X comme très petits et qu'on en néglige les carrés, à ce degré d'approximation, les relations (6) dont les premiers membres sont du 2d ordre par rapport aux X se trouvent satisfaites d'elles-mêmes

Les relations (2 bis) et (2 quater) sont donc vraies, si l'on néglige les carrés des X, ou, ce qui revient au même, si l'on néglige le carré de T, ou encore si on néglige le carré de β (puisque T ne figure qu'affecté du facteur β)

Si donc V et les X sont $r+1$ opérateurs liés par les relations (5), *les relations* (2 bis) *et* (2 quater) *ont lieu aux quantités près de l'ordre de β^2*

Au même degré d'approximation la formule (2 quater) peut s'écrire

$$e^{\alpha V + \alpha\beta\theta(T)} = e^{\alpha V} - \beta T e^{\alpha V} + e^{\alpha V}\beta T,$$

ou encore

$$e^{\alpha V + \alpha\beta\theta(T)} = e^{\alpha V} - e^{\beta T} e^{\alpha V} + e^{\alpha V} e^{\beta T},$$

ou en vertu de la relation (2 bis).

$$e^{\alpha V+\alpha\beta\theta(T)}=e^{\alpha V}-e^{\alpha V}e^{\beta U}+e^{\alpha V}e^{\beta T},\quad U=e^{-\alpha\theta}(T),$$

ou, toujours en négligeant le carré de β:

$$e^{\alpha V+\alpha\beta\theta(T)}=e^{\alpha V}(1-\beta U+\beta T)=e^{\alpha V}e^{\beta(T-U)}.$$

Si nous posons

$$+\alpha\theta(T)=W;\quad T-U=Y,$$

il vient

$$(7)\qquad e^{\alpha V+\beta W}=e^{\alpha V}e^{\beta Y},\quad Y=\frac{1-e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta}(W).$$

Soit

$$W=\Sigma w_i X_i$$

une combinaison linéaire quelconque des X_i, peut-on déterminer les coefficients t de la combinaison $T=\Sigma t_i X_i$ de telle façon que l'on ait

$$+\alpha\theta(T)=W\,?$$

Cela est évidemment toujours possible si le déterminant des coefficients b_{ik} n'est pas nul Dans ce cas la formule (7) est vraie quel que soit W

Si maintenant ce déterminant est nul, il suffit de partir du cas où ce déterminant n'est pas nul, de faire varier les coefficients b d'une manière continue de façon que ce déterminant devienne de plus en plus petit et de passer à la limite, pour démontrer que la formule (7) est encore vraie quel que soit W

Si enfin V, au lieu d'être un opérateur indépendant des X, n'est qu'une combinaison linéaire des X, la formule (7) est évidemment encore vraie, puisqu'elle ne peut cesser de l'être par suite de l'introduction de nouvelles relations entre nos opérateurs.

Remarquons que ce raisonnement par passage à la limite n'aurait pas été possible, si nous nous étions restreints dès le début en supposant que V et T sont des combinaisons des opérateurs X, que les X définissent un groupe de Lie, que $e^{\alpha V}$ et $e^{\beta T}$ sont deux substitutions finies de ce groupe de Lie. Dans ce cas en effet le déterminant des b_{ik} aurait été constamment nul

La formule (7) peut s'établir directement

En effet en négligeant le carré de β on a

$$e^{\alpha V+\beta W}=\Sigma\frac{(\alpha V+\beta W)^n}{n!}=e^{\alpha V}+\beta\Sigma\frac{\alpha^{n-1}}{n!}(V^{n-1}W+V^{n-2}WV+V^{n-3}WV^2 + \ldots + VWV^{n-2}+WV^{n-1}).$$

Or on trouve aisément

$$V^{n-1}W+V^{n-2}WV+\ldots+WV^{n-1}=\frac{n!}{1!\,(n-1)!}V^{n-1}W-\frac{n!}{2!\,(n-2)!}V^{n-2}\theta(W) + \frac{n!}{3!\,(n-3)!}V^{n-3}\theta^2(W)-\ldots\pm\frac{n!}{(n-1)!\,1!}V\theta^{n-2}(W)\mp\frac{n!}{n!\,0!}\theta^{n-1}(W),$$

d'où :

$$e^{\alpha V+\beta W}=e^{\alpha V}+\beta\Sigma\frac{\alpha^{n-1}}{n!}\left[\Sigma\frac{n!}{(n-p)!\,p!}V^{n-p}(-\theta)^{p-1}(W)\right],$$

ou

$$e^{\alpha V+\beta W}=e^{\alpha V}+\beta\Sigma\left[\frac{(\alpha V)^{n-p}}{(n-p)!}\frac{(-\alpha\theta)^{p-1}}{p!}(W)\right]=e^{\alpha V}\left[1+\beta\Sigma\frac{(-\alpha\theta)^{p-1}}{p!}(W)\right],$$

ou

$$e^{\alpha V+\beta W}=e^{\alpha V}(1+\beta Y)=e^{\alpha V}e^{\beta Y},\quad Y=\frac{1-e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta}(W)$$

C. Q. F. D.

VII. Formation des Substitutions Infinitésimales d'un Groupe de Structure donnée

Soient donc X_1, X_2, , X_r r opérateurs élémentaires liés par les relations

$$(1)\qquad X_iX_k-X_kX_i=(X_iX_k)=\Sigma c_{iks}X_s,$$

les c étant des constantes telles que les identités de Jacobi du N° III aient lieu

Soient

$$T=\Sigma t_iX_i,\quad U=\Sigma u_iX_i,\quad V=\Sigma v_iX_i,\quad W=\Sigma w_iX_i$$

diverses combinaisons linéaires de ces opérateurs.

Considérons le produit

$$e^{\alpha V}e^{\beta T},$$

effectuons le produit qui sera une série de polynômes symboliques, réduisons chacun de ces polynômes à des polynômes réguliers en nous servant des relations (1), je me propose d'étudier la nouvelle série ainsi obtenue que j'appelle $\phi(\alpha,\beta)$, le raisonnement sera le même que dans le N° précédent, mais je le développerai un peu plus.

Tous les termes de cette série $\phi(\alpha,\beta)$ sont des polynômes réguliers, et les coefficients de ces polynômes se présentent eux-mêmes sous la forme de séries développées suivant les puissances de α et de β Je puis ordonner $\phi(\alpha,\beta)$ suivant les puissances croissantes de β, en groupant tous les termes qui contiennent en facteur une même puissance de β. J'obtiens ainsi :

$$\phi(\alpha,\beta)=\phi_0+\beta\phi_1+\beta^2\phi_2+\,.$$

D'autre part j'ai

$$\phi(\alpha,\beta+d\beta)=e^{\alpha V}e^{\beta T}e^{d\beta\ T}=\phi(\alpha,\beta)e^{d\beta\ T}=\phi(\alpha,\beta)(1+d\beta\ T),$$

ou .

$$(2)\qquad \frac{d\phi}{d\beta}=\phi\ T,$$

ou .

$$(3)\qquad m\phi_m=\phi_{m-1}.T,$$

ces conditions jointes à

$$(4)\qquad \phi_0=e^{\alpha V}$$

suffisent pour déterminer ϕ

Or on y satisfait de la manière suivante Faisons

$$\phi(\alpha, \beta) = e^{W}, \quad \phi(\alpha, \beta + d\beta) = e^{W+dW},$$

soit η un symbole qui soit à W ce que θ est à V.

Il s'agit de satisfaire à l'équation (2) ou ce qui revient au même à

$$\phi(\alpha, \beta + d\beta) = \phi(\alpha, \beta)\, e^{d\beta\ T},$$

on doit donc avoir

$$e^{W+dW} = e^{W} e^{d\beta . T}.$$

Or en vertu de la formule (7) du N° précédent, on satisfera à cette condition si l'on a

$$(5) \qquad d\beta . T = \frac{1 - e^{-\eta}}{\eta}(dW)$$

Cette formule (5) représente symboliquement un système d'équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les coefficients w_i.

En vertu de la formule (4 bis) du N° V., ces équations peuvent s'écrire

$$(5 \text{ bis}) \qquad t_i d\beta = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{d\xi}{\xi} \frac{1 - e^{-\xi}}{F(\xi)} \sum_{j=1}^{j=r} dw_j P_{ij}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r)$$

Si l'on a

$$WX_i - X_i W = \Sigma c_{k,i,s} w_k X_s,$$

$F(\xi)$ est le déterminant dont l'élément est (pour la i^e ligne et la s^e colonne)

$$-(c_{1\,i,s} w_1 + c_{2,i,s} w_2 + \ldots + c_{r,i,s} w_r),$$

sauf les éléments de la diagonale principale ($i = s$) qui sont égaux à

$$-(c_{1\,i,i} w_1 + c_{2,i,i} w_2 + \ldots + c_{r,i,i} w_r) + \xi,$$

les P_{ij} sont les mineurs de ce déterminant. L'intégrale du second membre de (5 bis) est prise dans le plan des ξ, le long d'un contour fermé enveloppant toutes les racines de l'équation $F(\xi) = 0$

La condition (2) sera donc satisfaite, si les w satisfont aux équations (5 bis), la condition (4) le sera également si les valeurs initiales des w pour $\beta = 0$ sont

$$w_i = v_i.$$

Les équations (5 bis) admettant toujours une solution telle que pour $\beta = 0$, on ait $w_i = v_i$, et d'autre part les conditions (2) et (4) suffisant pour déterminer ϕ, on aura.

$$\phi(\alpha, \beta) = e^{w}, \qquad w = \Sigma w_i X_i,$$

les w étant des fonctions de β définies par les équations (5 bis) et les conditions initiales $w_i = v_i$.

La série $\phi(\alpha, \beta)$ n'est donc autre chose qu'une exponentielle dont l'exposant est

une combinaison linéaire des X_s, c'est le théorème que j'ai annoncé au N° IV, et comme d'autre part ce théorème a été établi en s'appuyant simplement sur les relations (1) et en en faisant des combinaisons purement formelles, le problème de Campbell est résolu et le troisième théorème de Lie, en vertu de la remarque faite dans ce N° IV, se trouve démontré.

Il est aisé de se rendre compte de la forme relativement simple de ces équations (5 bis). Soient ξ_1, ξ_2, . . . , ξ_p les p racines distinctes de l'équation $F(\xi)=0$, ce sont des fonctions algébriques des w, puisque $F(\xi)$ est un polynôme entier par rapport à ξ et aux w. Les $\frac{dw_j}{d\beta}$ seront donnés par des équations linéaires dont les seconds membres seront des constantes, tandis que les coefficients des premiers membres seront des fonctions rationnelles des w, des ξ_k et des $e^{-\xi_k}$, ces coefficients ne dépendront d'ailleurs que linéairement des exponentielles $e^{-\xi_k}$, ce seront des fonctions symétriques des racines

Résolvons ces équations par rapport aux $\frac{dw_j}{d\beta}$, nous trouverons

$$(6)\qquad \frac{dw_j}{d\beta}=A_{1,j}t_1+A_{2,j}t_2+\quad .\quad +A_{r,j}t_r,$$

les coefficients A étant rationnels par rapport aux w, aux ξ_k et aux $e^{-\xi_k}$.

Le problème qui se pose à propos du troisième théorème de Lie est ainsi complètement résolu

Il s'agit de trouver r opérateurs

$$X_1(f),\quad X_2(f),\qquad ,\quad X_r(f),$$

satisfaisant aux relations (1), on y satisfait en faisant

$$X_i(f)=A_{i,1}\frac{df}{dw_1}+A_{i,2}\frac{df}{dw_2}+\qquad +A_{i,r}\frac{df}{dw_r}.$$

Les équations (5 bis) peuvent se mettre sous plusieurs autres formes

Soit

$$\Sigma c_{k,s}w_k=b_{,s}$$

On aura (puisque les P_{ij} sont les mineurs du déterminant F)

$$\xi P_{ij}-\Sigma b_{ki}P_{kj}=0$$

pour $i\gtrless j$ et

$$\xi P_{ii}-\Sigma b_{ki}P_{ki}=F$$

pour $i=j$

Nos équations

$$(5\text{ bis})\qquad t_i d\beta=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int d\xi\,\frac{1-e^{-\xi}}{\xi}\Sigma_j\frac{dw_j P_{ij}}{F}$$

donnent·

$$d\beta \Sigma_i t_i b_{ik} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi \frac{1-e^{-\xi}}{\xi \cdot F} \Sigma_j dw_j \Sigma_i b_{ik} P_{ij},$$

d'où

$$d\beta \Sigma_i t_i b_{ik} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi (1-e^{-\xi}) \frac{\Sigma_j dw_j P_{kj}}{F} - \frac{dw_k}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi \frac{1-e^{-\xi}}{\xi}.$$

La deuxième intégrale étant nulle, nous pouvons écrire tout simplement

$$\text{(5 ter)} \qquad \Sigma_i t_i b_{ik} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi (1-e^{-\xi}) \frac{\Sigma_j dw_j P_{kj}}{F}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, r)$$

D'autre part l'équation (5) peut s'écrire

$$\text{(7)} \qquad \frac{dW}{d\beta} = \frac{\eta}{1-e^{-\eta}}(T),$$

d'où

$$\frac{dw_i}{d\beta} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\xi d\xi}{1-e^{-\xi}} \frac{\Sigma t_j P_{ij}}{F(\xi)},$$

ce qui donne.

$$X_i(f) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\xi d\xi}{(1-e^{-\xi})F(\xi)} \Sigma_j P_{ji} \frac{df}{dw_j}.$$

Cette dernière intégrale doit être prise le long d'un contour enveloppant toutes les racines de $F(\xi) = 0$, mais n'enveloppant pas les points

$$\xi = 2k\pi\sqrt{-1} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ ad inf})$$

VIII. Formules de Vérification

Soit

$$e^{V+\delta V} = e^V e^Y,$$

$$V = \Sigma v_i X_i, \quad \delta V = \Sigma \delta v_i X_i, \quad Y = \Sigma y_i X_i;$$

on aura en vertu de la formule (7) du N° VI.

$$Y = \frac{1-e^{-\theta}}{\theta}(\delta V)$$

(posant.

$$\theta(T) = VT - TV$$

comme dans le N° V.).

Soit maintenant

$$e^{-V} e^{T} e^{V} = e^{U},$$

on aura par la formule (2 bis) du N° VI

$$U = e^{-\theta}(T).$$

Soit

$$e^{-(V+\delta V)}e^{T}e^{V+\delta V}=e^{U'},$$

on aura

$$U'=e^{-(\theta+\delta\theta)}(T),$$

où $\theta+\delta\theta$ est un symbole qui est à $V+\delta V$ ce que θ est à V. On aura d'autre part

$$e^{U'}=e^{-Y}e^{-V}e^{T}e^{V}e^{Y}=e^{-Y}e^{U}e^{Y}.$$

d'où en négligeant le carré de Y qui est infiniment petit.

$$e^{U'}=e^{U}-Ye^{U}+e^{U}Y=e^{U+UY-YU}$$

D'où

$$U'-U=UY-YU$$

Si je convions de poser

$$e^{-(\theta+\delta\theta)}-e^{-\theta}=\delta(e^{-\theta}),$$

il viendra

$$U'-U=\delta(e^{-\theta})(T)$$

Nous arrivons ainsi à la formule symbolique suivante

$$(1)\qquad \delta(e^{-\theta})T=[e^{-\theta}(T)]\left[\frac{1-e^{-\theta}}{\theta}(\delta V)\right]-\left[\frac{1-e^{-\theta}}{\theta}(\delta V)\right][e^{-\theta}(T)].$$

Pour mieux expliquer le sens de cette formule rappelons que nous avons trouvé plus haut

$$(2)\qquad \phi(\theta)(T)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int d\xi\,\phi(\xi)\,\Sigma h_i X_i,$$

où les h_i sont des fonctions rationnelles des t, des v et des ξ données par les équations

$$(3)\qquad \xi h_i-\Sigma b_{ki}h_k=t_i,\qquad b_{ki}=c_{1,k,i}v_1+c_{2,k,i}v_2+\ldots+c_{r,k,i}v_r.$$

Alors on aura

$$\delta e^{-\theta}(T)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int d\xi e^{-\xi}\Sigma\delta h_i X_i,$$

où les δh_i sont les accroissements que subissent les fonctions h_i quand les variables v_k subissent les accroissements δv_k.

Si alors les h'_i sont ce que deviennent les h_i quand on y remplace les t_k par les δv_k, la formule (1) pourra prendre la forme

$$(1\text{ bis})\qquad 2\pi\sqrt{-1}\,\Sigma X_i\int d\xi e^{-\xi}\delta h_i=\Sigma(X_iX_k-X_kX_i)\int d\xi\frac{1-e^{-\xi}}{\xi}h'_k\int d\xi e^{-\xi}h_i$$

Dans le 1er membre le signe Σ se rapporte aux r valeurs de l'indice i, dans le 2^{d} membre aux $r(r-1)$ *arrangements* des deux indices i et k (l'arrangement i, k étant regardé comme différent de l'arrangement k, i).

Cette formule nous fait connaître un certain nombre de relations auxquelles doivent satisfaire les expressions $X_iX_k-X_kX_i$ ou (X_iX_k) Ces relations sont curieuses, mais

la plupart ont déjà été démontrées par Killing et il semble que les autres pourraient se démontrer facilement par les procédés de Killing. Je n'y insiste donc que comme sur un procédé de vérification

Les deux membres de cette équation sont d'une forme particulière.

Le premier membre est linéaire à la fois par rapport aux symboles X_i, par rapport aux t_i, aux δv_k, aux exponentielles $e^{-\theta_i}$ (les θ_i étant les racines de l'équation $F=0$) Les coefficients de cette fonction linéaire sont eux-mêmes des fonctions rationnelles des v et des θ_i.

Le second membre est linéaire à la fois par rapport aux symboles $(X_i X_k)$, par rapport aux t_i, aux δv_k, aux exponentielles $e^{-\theta}$ et $e^{-\theta_i-\theta_k}$ (θ_i et θ_k étant deux racines de $F=0$). Les coefficients de cette fonction linéaire sont encore rationnels par rapport aux v et aux θ_i.

Les θ_i étant les racines de l'équation $F=0$ sont des fonctions algébriques des v. Dans les deux membres de l'équation (1 bis) entrent en outre linéairement un certain nombre de fonctions transcendantes, il y a d'abord les exponentielles $e^{-\theta_i}$ et il y en a autant que l'équation $F=0$ a de racines distinctes Il y a ensuite les exponentielles $e^{-(\theta_i+\theta_k)}$ qui peuvent être distinctes des précédentes, mais qui peuvent également ne pas en être toutes distinctes si l'une des racines de l'équation $F=0$ est constamment égale à la somme de deux autres racines

Supposons qu'il y ait q exponentielles et soient

$$e^{\eta_1},\ e^{\eta_2},\ \ldots,\ e^{\eta_q}$$

ces exponentielles.

Les deux membres de l'équation (1 bis) seront alors des fonctions linéaires des produits de la forme

$$(4) \qquad t_m \delta v_h e^{\eta_\mu},$$

où m et h peuvent prendre les valeurs 1, 2, ..., r, et où μ peut prendre les valeurs 1, 2, , q

Les coefficients de ces produits sont des fonctions algébriques des v, ne dépendant ni des t, ni des δv Pour que l'identité puisse avoir lieu, il faut que l'on puisse égaler dans les deux membres de (1 bis) les coefficients d'un même produit (4)

Nous aurons ainsi un certain nombre de relations linéaires entre les symboles X_i d'une part, les symboles $(X_i X_k)$ d'autre part, les coefficients de ces relations linéaires sont des fonctions algébriques des v Ces relations linéaires doivent être identiques aux relations de structure ou en être des conséquences.

J'examinerai seulement le cas particulier où $F(\xi)=0$ a toutes ses racines distinctes. Je puis alors supposer que les opérateurs élémentaires X_i ont été choisis de telle sorte que :

$$VX_i - X_i V = \theta_i X_i,$$

θ_i étant l'une de ces racines.

Egalons alors dans l'équation (1 bis) les coefficients de $t_m \delta v_h$, il vient

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \Sigma X_i \int d\xi e^{-\xi} \frac{d^2 h_i}{dv_h dt_m} = (X_m X_h) \frac{1 - e^{-\theta_h}}{\theta_h} e^{-\theta_m}$$

Le premier membre ne dépend que des exponentielles $e^{-\theta_i}$, mais le second membre outre l'exponentielle $e^{-\theta_m}$ contient encore $e^{-\theta_h - \theta_m}$.

Égalons les coefficients de $e^{-\theta_h - \theta_m}$. Si $\theta_h + \theta_m$ n'est pas égal à une racine de $F = 0$, cette exponentielle ne figurera pas dans le 1er membre, nous aurons donc

$$(X_m X_h) = 0.$$

On reconnaît là l'un des théorèmes de Killing

Si au contraire $\theta_h + \theta_m$ est racine de $F = 0$, l'exponentielle pourra figurer dans le 1er membre et $(X_m X_h)$ pourra ne pas être nul

Je n'insisterai pas sur les autres vérifications, ni sur le cas où les racines ne sont pas distinctes et où on retrouverait les autres théorèmes de Killing

Je me bornerai à faire remarquer que la vérification de la formule (1 bis) n'est pas immédiate, et qu'il faut pour la faire avoir recours aux identités de Jacobi et aux théorèmes que Killing en a déduits

IX Intégration des Équations Différentielles et Formation des Substitutions finies des Groupes

Soit

$$(1) \qquad e^{V+dV} = e^V e^{dA},$$

où

$$V = \Sigma v_i X_i, \quad dV = \Sigma dv_i . X_i, \quad dA = \Sigma d\alpha_i X_i$$

On aura en vertu de la formule (7) du N° VI

$$(2) \qquad dA = \frac{1 - e^{-\theta}}{\theta} (dV)$$

Cette formule, identique sauf les notations à la formule (5) du N° VII, comprend, sous la forme symbolique, r systèmes d'équations différentielles, ainsi que je l'ai déjà fait remarquer au N° VII.

Annulons tous les $d\alpha$, sauf $d\alpha_k$, égalons ensuite les coefficients de $X_1, X_2, \ldots, X_r$ dans la formule (2) Nous aurons r équations différentielles qui définiront

$$\frac{dv_1}{d\alpha_k}, \frac{dv_2}{d\alpha_k}, \ldots \frac{dv_r}{d\alpha_k}$$

en fonctions des v Ce sont là comme nous l'avons vu au N° VII, les équations différentielles qui définissent une des substitutions infinitésimales du groupe, si l'on prend les v comme variables indépendantes

En donnant à l'indice k les valeurs 1, 2, ..., r, on obtiendra r systèmes d'équations différentielles correspondant aux r substitutions infinitésimales du groupe

Nous devons prévoir que ces équations peuvent se ramener, au moins dans le cas des groupes de la 1ère famille (vide supra N° I.), à des équations linéaires, puisque c'est là un résultat bien connu obtenu par Lie.

Voici le changement de variables qu'il faudrait faire pour retrouver ces équations, soit:

$$U = \Sigma u_i X_i, \quad e^{-V} e^{U} e^{V} = e^{L}, \quad L = \Sigma l_i X_i;$$

on aura:

$$(3) \qquad L = e^{-\theta}(U).$$

Cette équation symbolique (3) nous apprend que les l_i sont des fonctions des v et des u, linéaires par rapport aux u, et nous permet de former ces fonctions. Si alors on pose:

$$e^{-V-dV} e^{U} e^{V+dV} = e^{L+dL},$$

on aura:

$$e^{L+dL} = e^{-dA} e^{L} e^{dA},$$

ou, puisque A est infiniment petit

$$(4) \qquad dL = L\,dA - dA\,.\,L.$$

Cette formule (4) représente symboliquement r systèmes d'équations différentielles qui ne sont autre chose que ce que deviennent les r systèmes d'équations différentielles représentées symboliquement par la formule (2) quand on prend les l_i pour variables nouvelles.

Celui de ces systèmes que l'on obtient en annulant tous les $d\alpha$ sauf $d\alpha_k$ s'écrit

$$(4 \text{ bis}) \qquad \frac{dL}{d\alpha_k} = LX_k - X_k L$$

Ces équations sont linéaires et à coefficients constants et s'intégrent immédiatement; ce sont celles auxquelles Lie arrive par la considération du groupe adjoint Il importe de remarquer que la réduction des équations différentielles (2) aux équations (4) par le changement de variables (3) n'est pas immédiate et qu'on ne peut la faire qu'en tenant compte des identités de Jacobi.

Considérons de plus près le cas des groupes de la 2e famille Nous pourrons alors choisir les opérateurs élémentaires X_i de telle manière qu'on en puisse distinguer de deux classes Ceux de la 2de classe seront permutables à tous les opérateurs, ce seront les X''_i, quant à ceux de la 1ère classe que j'appellerai les X'_i, ils seront caractérisés par la propriété suivante aucune combinaison linéaire des X'_i ne sera permutable à tous les opérateurs.

Pour mettre en évidence cette distinction, j'écrirai quand il y aura lieu

$$\Sigma v_i X_i = \Sigma v'_i X'_i + \Sigma v''_i X''_i, \quad V' = \Sigma v'_i X'_i, \quad V'' = \Sigma v''_i X''_i, \quad V = V' + V''$$

Les v'_i seront ainsi les coefficients des X'_i et les v''_i ceux des X''_i Les lettres u'_i, u''_i, l'_i, l''_i, U', U'', L', L'', etc. auront une signification analogue

Il est clair qu'on aura

$$V''T - TV'' = V''T'' - T''V' = 0,$$

d'où

$$\theta(T) = VT - TV = V'T' - T'V'$$

J'introduis alors un symbole nouveau, soit:

$$V'T' - T'V' = \Sigma\lambda'_i X'_i + \Sigma\lambda''_i X''_i,$$

je poserai

$$\theta'(T) = \Sigma\lambda'_i X'_i, \quad \theta''(T) = \Sigma\lambda''_i X''_i,$$

et je définis $\phi(\theta')$ à l'aide de θ' comme j'ai défini $\phi(\theta)$ à l'aide de θ On a alors

$$\theta(X''_i) = 0, \quad \theta[\theta''(T)] = 0, \quad \phi(\theta)(T'') = 0,$$

et on trouve aisément

$$\phi(\theta)(T) = \phi(\theta)(T') = \phi(\theta')(T') + \theta''\left[\frac{\phi(\theta') - \phi(0)}{\theta'}(T')\right] + \phi(0)\,T''.$$

Remarquons que les expressions

$$\theta(T), \quad \theta'(T), \quad \theta''(T),$$

dépendent des v' et des t' mais sont indépendantes des v'' et des t'', et il en est de même de $\phi(\theta)\ (T)$ si $\phi(0)$ est nul.

Les l_i étant linéaires par rapport aux u, je puis écrire

$$l_i = \Sigma \frac{dl_i}{du_k} u_k$$

Les $\frac{dl_i}{du_k}$ sont des fonctions des v Voyons combien de ces fonctions sont indépendantes les unes des autres Je dis d'abord que ces fonctions ne dépendent que des v' Nous avons en effet (e^Z étant une substitution quelconque du groupe)

$$e^{V'+V''} = e^{V'}e^{V''}, \quad e^{-V'}e^{Z}e^{V''} = e^{Z},$$

d'où

$$e^{L} = e^{-V'-V''}e^{U}e^{V'+V''} = e^{-V''}e^{-V'}e^{U}e^{V'}e^{V''} = e^{-V'}e^{U}e^{V'},$$

ce qui montre que L ne dépend que de V', mais pas de V''

Je dis maintenant que le nombre des fonctions $\frac{dl}{du}$ indépendantes les unes des autres est précisément celui des variables v' En d'autres termes, si l'on pose

$$e^{L} = e^{-V}e^{U}e^{V}, \quad e^{L_1} = e^{-V_1}e^{U}e^{V_1},$$

l'identité $L = L_1$ si elle a lieu quel que soit U entraîne l'identité $V' = V'_1$. Si en effet $L = L_1$, on aura quel que soit U.

$$e^{V_1} e^{-V} e^{U} e^{V} e^{-V_1} = e^{U},$$

ce qui montre que $e^{V} e^{-V_1}$ est permutable à toutes les substitutions du groupe C'est donc une substitution qui ne dépend que des X''_i de sorte que je puis écrire

$$e^{V} e^{-V_1} = e^{W''},$$

W'' étant une combinaison linéaire des X''_i, on en tire

$$e^{V} = e^{W''} e^{V_1} = e^{V_1 + W},$$

d'où

$$V = V_1 + W'',$$

$$V' = V'_1, \quad V'' = V''_1 + W''$$

Donc $V' = V'_1$

C Q F D

Nous pourrons prendre comme variables les $\frac{dl}{du}$ et les v'', au lieu des v' et des v''.

Les $\frac{dl}{du}$ sont définis par les équations (4 bis), qui étant par rapport à ces variables des équations linéaires à coefficients constants s'intègrent immédiatement

Les équations (4 bis) nous font donc connaître les $\frac{dl}{du}$ et par conséquent les v' en fonctions de la variable α_k

Pour obtenir les v'', revenons aux équations (2), si nous posons

$$1 - e^{-\theta} = \theta + \theta^2 \psi(\theta),$$

elles peuvent s'écrire

$$dA' = dV' + \theta' \psi(\theta'')(dV'),$$

$$dA'' = dV'' + \theta'' \psi(\theta')(dV')$$

On a

$$dA' = \Sigma d\alpha'_k \; X'_k, \quad dA'' = \Sigma d\alpha''_k X''_k$$

Si on annule tous les $d\alpha'$ et tous les $d\alpha''$ sauf $d\alpha''_k$, nos équations donnent simplement

$$v'_i = \text{const}, \quad v''_i = \text{const} \; (i \gtrless k), \quad v''_k = \alpha''_k + \text{const}$$

Si on annule tous les $d\alpha'$ et tous les $d\alpha''$ sauf $d\alpha'_k$ les équations deviennent

$$X'_k d\alpha'_k = dV' + \theta' \psi(\theta')(dV'),$$

$$0 = dV'' + \theta'' \psi(\theta')(dV')$$

La première de ces équations, équivalente aux équations 4 bis, est susceptible comme nous l'avons vu d'être ramenée à la forme d'un système d'équations linéaires à coefficients constants L'intégration est immédiate et nous donne les v' en fonctions de la variable α'_k

La seconde équation est équivalente à un système d'équations de la forme

$$dv''_1 + dv'_1 F'_1 + dv'_2 F'_2 + \ldots + dv'_\rho F'_\rho = 0,$$

les F étant des fonctions données des v' En remplaçant les v' par leurs valeurs en fonctions de α'_k, elle prend la forme

$$dv''_1 + \phi(\alpha'_k)\, d\alpha'_k = 0$$

et s'intègre immédiatement par quadrature.