

L'Éclairage Électrique

REVUE HEBDOMADAIRE DES TRANSFORMATIONS

Électriques — Mécaniques — Thermiques

DE

L'ÉNERGIE

DIRECTION SCIENTIFIQUE

A. CORNU, Professeur à l'École Polytechnique, Membre de l'Institut. — A. D'ARSONVAL, Professeur au Collège de France, Membre de l'Institut. — G. LIPPMANN, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Institut. — D. MONNIER, Professeur à l'École centrale des Arts et Manufactures. — H. POINCARÉ, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Institut. — A. POTIER, Professeur à l'École des Mines, Membre de l'Institut. — A. WITZ, Ingénieur des Arts et Manufactures, Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille. — J. BLONDIN, Agrégé de l'Université, Professeur au Collège Rollin.

LA THÉORIE DE LORENTZ ET LE PHÉNOMÈNE DE ZEEMAN

INTRODUCTION

La découverte du triplet de Zeeman parut un instant une confirmation éclatante de la théorie de Lorentz. Mais bientôt après, M. Cornu découvrait que la plupart des raies ne se décomposent pas en trois dans le champ magnétique, mais bien en quatre composantes dont deux polarisées parallèlement au champ et deux perpendiculairement. Bien plus, MM. Becquerel et Deslandres ont montré que dans certains triplets du fer, c'est la raie médiane dont le plan de polarisation est parallèle au champ et les deux raies extrêmes qui sont polarisées perpendiculairement au champ.

La théorie de Lorentz, sous sa forme primitive, paraissait incapable de rendre compte de tous ces faits ; aussi M. Lorentz la modifia-t-il en y introduisant l'hypothèse des ions complexes dont nous parlerons bientôt. La théorie perdait ainsi sa simplicité séduisante ; il y a lieu cependant d'examiner dans quelle mesure elle est devenue conforme aux faits

observés. C'est cet examen que je me propose de faire.

Soient f, g, h , le déplacement électrique ; X, Y, Z , la polarisation diélectrique ; l'équation déduite des conditions de l'équilibre des particules chargées sera de la forme :

$$\lambda \frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{X}{L} = f + \frac{X}{3} \quad (1)$$

λ et L étant des coefficients constants. D'autre part, si l'onde est plane et le plan de l'onde perpendiculaire à l'axe des ζ , on a l'équation :

$$\frac{d^2 f}{d\zeta^2} + K_0 \frac{d^2 f}{dt^2} = K_0 \frac{d^2 X}{dt^2}$$

$\frac{1}{\sqrt{K_0}}$ étant la vitesse de la lumière dans le vide.

Supposons maintenant que la lumière soit monochromatique ; alors chacune de nos fonctions f, g, h, X, Y, Z , sera égale à la partie réelle d'un produit dont le premier facteur

241912

RECAP
9292
602

Digitized by Google

Original from
PRINCETON UNIVERSITY

est constant et dont le second facteur est l'exponentielle

$$e^{ip(n\sqrt{K_0} - t)}.$$

On a donc :

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -p^2X, \quad \frac{d^2f}{dt^2} = -p^2f, \quad \frac{d^2f}{dt^2} = -p^2n^2K_0f$$

$\frac{2\pi}{p}$ représente la période de mouvement vibratoire et n l'indice de réfraction.

Nos équations deviennent alors :

$$X\left(\frac{1}{L} - \lambda p^2\right) = f + \frac{X}{3} \quad (a)$$

$$(n^2 - 1)f = X$$

d'où :

$$\frac{1}{L} - \lambda p^2 = \frac{1}{n^2 - 1} + \frac{1}{3} \quad (2)$$

c'est la relation qui relie l'indice n à la période $\frac{2\pi}{p}$, c'est la courbe de dispersion.

Les raies d'absorption correspondent aux asymptotes de la courbe de dispersion (parce que dans le voisinage de ces asymptotes on n'a plus le droit de négliger un terme en $\frac{dX}{dt}$ qui devrait figurer dans l'équation (1) et dont dépend l'absorption).

Si donc l'équation (2) était exacte, il n'y aurait qu'une raie dans le spectre. On est donc obligé de modifier un peu l'hypothèse, en supposant des particules chargées de plusieurs sortes.

Soient alors X_k, Y_k, Z_k les composantes de la polarisation partielle due aux particules de la k^e sorte, de telle façon que la polarisation totale X, Y, Z soit la somme des polarisations partielles et que l'on ait :

$$X = \Sigma X_k. \quad (3)$$

D'autre part on aura une série d'équations analogues à l'équation (1) :

$$\lambda_k \frac{d^2X_k}{dt^2} + \frac{X_k}{L_k} = f + \frac{X}{3}$$

d'où l'on déduira les équations :

$$X_k\left(\frac{1}{L_k} - \lambda_k p^2\right) = f + \frac{X}{3} \quad (4)$$

En éliminant X et les X_k entre les équations (3), (4) et (a), on obtiendra l'équation de la courbe de dispersion.

Voici comment peut se faire cette élimination :

Posons :

$$\Phi = \sum \frac{X_k^2}{2L_k} - \frac{X^2}{6}; \quad \Phi_1 = \sum \frac{\lambda_k}{2} X_k^2.$$

Nos équations (4) peuvent s'écrire, en se rappelant que $X = \Sigma X_k$:

$$\frac{d}{dX_k} (\Phi - p^2\Phi_1 - fX) = 0.$$

Nous pouvons alors trouver des combinaisons linéaires des X_k que nous appellerons X'_k et qui sont telles que si on prend les X'_k comme nouvelles variables, les deux formes quadratiques Φ et Φ_1 se réduisent à des sommes de carrés.

Nous pouvons donc toujours supposer :

$$\Phi = \sum \frac{p_k^2}{a_k} \frac{X'^2_k}{2}, \quad \Phi_1 = \sum \frac{X'^2_k}{2a_k}, \quad X = \Sigma X'_k.$$

Nos équations deviennent alors :

$$\frac{d}{dX'_k} (\Phi - p^2\Phi_1 - fX) = 0.$$

ou bien :

$$(p_k^2 - p^2) X'_k = a_k f \quad (5)$$

d'où en combinant (5) et (a) :

$$n^2 - 1 = \sum \frac{a_k}{p_k^2 - p^2}.$$

Telle est l'équation de la courbe de dispersion ; on voit que les raies d'absorption, c'est-à-dire les asymptotes correspondent aux valeurs

$$p^2 = p_k^2.$$

*Polarisation rotatoire magnétique
et phénomène de Zeeman.*

Examinons maintenant l'action d'un champ magnétique intense α, β, γ ; nos équations en

tenant compte de l'action mécanique de ce champ sur les ions deviennent :

$$\lambda_k \frac{d^2 X_k}{dt^2} + \frac{X_k}{L_k} = f + \frac{X}{3} + \varepsilon_k \left(\frac{dY_k}{dt} \gamma - \frac{dZ_k}{dt} \beta \right)$$

ε_k étant un nouveau coefficient. Supposons d'abord le champ parallèle au rayon, c'est-à-dire à l'axe des γ . Supposons en d'autres termes $\alpha = \beta = 0$. Notre équation deviendra, en tenant compte de (α) :

$$\lambda_k \frac{d^2 X_k}{dt^2} + \frac{X_k}{L_k} = \frac{1}{n^2 - 1} + \frac{X}{3} + \varepsilon_k \frac{dY_k}{dt} \gamma$$

et nous aurons de même :

$$\lambda_k \frac{d^2 Y_k}{dt^2} + \frac{Y_k}{L_k} = \frac{1}{n^2 - 1} + \frac{Y}{3} - \varepsilon_k \frac{dX_k}{dt} \gamma.$$

Examinons comment se comporte un rayon circulaire droit. J'ai dit que chacune de nos fonctions f , X , X_k est la partie réelle d'un produit dont le premier facteur est une constante et le second une exponentielle imaginaire. Eh bien, ce qui caractérise le rayon droit, c'est que g , Y , Y_k , sont les parties imaginaires de ces mêmes produits, de sorte que, si nous posons,

$$U_k = X_k + iY_k, \quad U = X + iY,$$

U et U_k seront ces produits eux-mêmes et qu'on aura :

$$U = \Sigma U_k; \quad \frac{dU_k}{dt} = -ipU_k; \quad \frac{d^2 U_k}{dt^2} = -p^2 U_k.$$

Nos équations nous donnent alors :

$$\lambda_k \frac{d^2 U_k}{dt^2} + \frac{U_k}{L_k} = \frac{U}{n^2 - 1} + \frac{U}{3} - i\varepsilon_k \gamma \frac{dU_k}{dt} \quad (5)$$

d'où :

$$\frac{U_k}{L_k} - p^2 \lambda_k U_k = \frac{U}{n^2 - 1} + \frac{U}{3} + p\varepsilon_k \lambda U_k.$$

En éliminant les U_k entre ces équations et se rappelant que $U = \Sigma U_k$, on trouverait la relation entre n , p et γ , ce qui permettrait de construire la courbe de dispersion. Pour faire

cette élimination, je pose :

$$\Phi = \Sigma \frac{U_k^2}{2L_k} - \frac{U^2}{6}; \quad \Phi_1 = \Sigma \frac{\lambda_k}{2} U_k^2; \quad \Phi_2 = \frac{U^2}{2};$$

$$\Phi_3 = \Sigma \frac{\varepsilon_k}{2} U_k^2$$

$$\Theta = \Phi - p^2 \Phi_1 - \frac{\Phi}{n^2 - 1} - p\gamma \Phi_3.$$

Nos équations deviennent :

$$\frac{d\Theta}{dU_k} = 0$$

et à cause du théorème des fonctions homogènes :

$$\Theta = \frac{1}{2} \Sigma U_k \frac{d\Theta}{dU_k} = 0.$$

Nous pouvons regarder n et les U_k comme des fonctions de deux variables indépendantes p et γ ; en différenciant par rapport à p je trouve :

$$\frac{d\Theta}{dn} \frac{dn}{dp} + \frac{d\Theta}{dp} + \Sigma \frac{d\Theta}{dU_k} \frac{dU_k}{dp} = \frac{d\Theta}{dn} \frac{dn}{dp} + \frac{d\Theta}{dp} = 0$$

et de même en différenciant par rapport à γ .

$$\frac{d\Theta}{dn} \frac{dn}{d\gamma} + \frac{d\Theta}{d\gamma} = 0.$$

La première de ces équations nous fait connaître $\frac{dn}{dp}$ c'est-à-dire les variations de l'indice avec la couleur; la seconde nous fait connaître $\frac{dn}{d\gamma}$ dont dépend la polarisation rotatoire magnétique.

Or il vient :

$$\frac{d\Theta}{d\gamma} = -p\Phi_3; \quad \frac{d\Theta}{dp} = -2p\Phi_1 - \gamma\Phi_3,$$

ou en négligeant le second terme :

$$\frac{d\Theta}{dp} = -2\Phi_1.$$

Donc $\frac{dn}{dp}$ et $\frac{dn}{d\gamma}$ sont entre eux comme $2\Phi_1$ et Φ_3 . Si l'on suppose que le rapport de Φ_1 à Φ_3 est à peu près constant (ce qui serait rigoureusement vrai si les ε_k étaient entre eux comme les λ_k), on pourra dire que $\frac{dn}{d\gamma}$ est sensiblement proportionnel à $\frac{dn}{dp}$.

Pour avoir les asymptotes de la courbe de dispersion, c'est-à-dire les raies d'absorption, il faut faire $n = \infty$ et regarder p comme une fonction de γ . On trouve ainsi :

$$\frac{d\theta}{dp} \frac{dp}{d\gamma} + \frac{d\theta}{d\gamma} = 0.$$

d'où :

$$\frac{dp}{d\gamma} = -\frac{\Phi_3}{2\Phi_1}$$

formule qui nous fait connaître le déplacement de la raie d'absorption par le champ magnétique en supposant la polarisation circulaire droite.

Si nous avions affaire à un rayon circulaire gauche, il aurait fallu poser $U_k = X_k - iY_k$, nous aurions retrouvé l'équation (5) sauf que le signe du terme en γ aurait été changé. Nous aurions donc obtenu les mêmes résultats à cette différence près que le signe de $\frac{dn}{d\gamma}$ et $\frac{dp}{d\gamma}$ aurait été changé.

La différence d'indice des deux rayons droit et gauche est donc $2\gamma \frac{dn}{d\gamma}$; donc la polarisation rotatoire est proportionnelle à $p \frac{dn}{d\gamma}$; d'après le résultat obtenu plus haut elle sera sensiblement proportionnelle à $p \frac{dn}{d\gamma}$; c'est la loi récemment énoncée par M. H. Becquerel.

La raie d'absorption qui correspond au nombre p_k se décomposera en deux qui correspondront aux nombres

$$p_k - \frac{\Phi_3\gamma}{2\Phi_1}; \quad p_k + \frac{\Phi_3\gamma}{2\Phi_1}$$

et qui seront polarisées circulairement, la première à droite, la seconde à gauche.

Dans le cas où le rayon est parallèle au champ, la théorie de Lorentz rend donc bien compte des faits observés.

Rayon perpendiculaire au champ.

Supposons maintenant que le rayon soit perpendiculaire au champ, soit par exemple : $\beta = \gamma = 0$.

Nos équations deviennent :

$$\begin{aligned} \lambda_k \frac{d^2 X_k}{dt^2} + \frac{X_k}{L_k} &= f + \frac{X}{3} \\ \lambda_k \frac{d^2 Y_k}{dt^2} + \frac{Y_k}{L_k} &= g + \frac{Y}{3} + \varepsilon_k \alpha \frac{dZ_k}{dt} \\ \lambda_k \frac{d^2 Z_k}{dt^2} + \frac{Z_k}{L_k} &= h + \frac{Z}{3} - \varepsilon_k \alpha \frac{dY_k}{dt} \end{aligned} \quad (6)$$

On aura d'ailleurs

$$(n^2 - 1)f = X, \quad (n^2 - 1)g = Y. \quad (7)$$

Mais la relation entre h et Z serait différente. On a en effet :

$$\sum \frac{df}{dx} + \sum \frac{dX}{dx} = 0.$$

Si l'onde est plane, les dérivées prises par rapport à x et à y sont nulles et cette équation se réduit à :

$$\frac{dh}{d\gamma} + \frac{dZ}{d\gamma} = 0$$

ou puisque h et Z doivent être des fonctions périodiques de γ :

$$h + Z = 0. \quad (8)$$

Des équations (6), (7) et (8) nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

1° Pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire quand il n'y a pas de champ, on a $Z = h = Z_k = 0$, c'est-à-dire que les vibrations des particules comme celles de l'éther sont transversales ;

2° Si α est très petit du 1^{er} ordre (un champ de 30000 unités qui produit le dédoublement des raies, mais un dédoublement très faible, peut encore, à ce compte être regardé comme très petit), les quantités h , Z et Z_k seront très petites du premier ordre ; le terme $\varepsilon_k \alpha \frac{dZ_k}{dt}$ sera donc du second ordre et pourra être négligé et il viendra :

$$\begin{aligned} \lambda_k \frac{d^2 X_k}{dt^2} + \frac{X_k}{L_k} &= f + \frac{X}{3} \\ \lambda_k \frac{d^2 Y_k}{dt^2} + \frac{Y_k}{L_k} &= g + \frac{Y}{3} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que le champ n'aura aucune influence.

Ainsi la théorie de Lorentz sous sa forme primitive n'est pas plus capable d'expliquer le triplet de Zeeman que le quadruplet de Cornu.

On a longtemps cru le contraire et je l'ai moi-même écrit. C'est que se croyant en droit d'envisager les « vibrations propres » d'une particule ou d'un système de particules en laissant de côté l'action de l'éther on faisait dans les équations (6) $f=g=h=0$. Cela, on n'a pas le droit de le faire, car l'équation (8) est une véritable équation de liaison entre les mouvements de l'éther et ceux des particules.

J'arrive à une généralisation de la théorie donnée par M. Lorentz lui-même.

Théorie des ions complexes.

Supposons que nos ions, au lieu de se comporter comme de simples points matériels, soient formés d'un système dynamique plus compliqué comprenant plusieurs points matériels qui pourront être assujettis à des liaisons quelconques. Je choisirai pour représenter l'état du système des coordonnées généralisées quelconques que je désignerai par T_k .

Soit H la force vive des ions, ce sera une forme quadratique homogène par rapport aux $\frac{dT_k}{dt}$. Soit P_2 l'énergie potentielle due aux actions mutuelles des ions ; à cause de la petitesse des déplacements, ce sera encore une forme quadratique par rapport au T_k . Soit $-P_1$ l'énergie potentielle due à l'action électrostatique de l'éther sur les ions ; nous pourrions supposer :

$$P_1 = fX + gY + hZ;$$

X, Y, Z représentant toujours les composantes de la polarisation diélectrique seront des formes linéaires par rapport aux T_r .

Soit enfin :

$$\sum W_k \delta T_k$$

le travail virtuel des forces dues à l'action du champ magnétique sur les ions quand ces ions subissent des déplacements virtuels, δT_k .

Les équations de Lagrange nous donnent :

$$\frac{dH}{d\frac{dT_k}{dt}} + \frac{dP_2}{dT_k} = \frac{dP_1}{dT_k} + W_k.$$

Or, comme nous avons toujours les équations (7) et (8), il vient :

$$dP_1 = d\left(\frac{X^2 + Y^2}{2n^2 - 2} - \frac{Z^2}{2}\right)$$

d'où :

$$\frac{dH}{d\frac{dT_k}{dt}} + \frac{d}{dT_k}\left(P_2 - \frac{X^2 + Y^2}{2n^2 - 2} + \frac{Z^2}{2}\right) = W_k.$$

Si nous voulons chercher les asymptotes de la courbe de dispersion, il faut faire $n = \infty$ et il reste :

$$\frac{dH}{d\frac{dT_k}{dt}} + \frac{d}{dT_k}\left(P_2 + \frac{Z^2}{2}\right) = W_k.$$

On peut toujours supposer que les T_k aient été choisis de telle sorte que :

$$H = \sum \frac{1}{2} \left(\frac{dT_k}{dt}\right)^2; \quad P_2 + \frac{Z^2}{2} = \sum \frac{P_k^2}{2} T_k^2$$

et notre équation devient :

$$\frac{d^2 T_k}{dt^2} + p_k^2 T_k = W_k.$$

Les W_k sont évidemment des formes linéaires d'une part par rapport à α, β, γ , d'autre part par rapport aux $\frac{dT_k}{dt}$. De plus l'action d'un champ magnétique sur un courant est toujours perpendiculaire à ce courant ; dans le cas du mouvement des ions, où il s'agit d'un courant de convection, cette action du champ sera perpendiculaire à la vitesse de l'ion et son travail sera nul. On aura donc identiquement :

$$\sum W_k \frac{dT_k}{dt} = 0.$$

Si la lumière est monochromatique, on aura :

$$\frac{dT_k}{dt} = -ipT_k; \quad \frac{d^2 T_k}{dt^2} = -p^2 T_k.$$

...

Voici le sens de la première de ces deux équations : T_k est la partie réelle du produit d'un facteur constant et d'une exponentielle imaginaire. Ce produit lui-même satisfera aux mêmes équations que T_k . Nos équations comportent ainsi une solution imaginaire plus aisée à traiter que la solution réelle, et d'où il est facile de déduire cette solution réelle. C'est cette solution imaginaire que, par un artifice bien connu, je substitue à la solution réelle.

Soit V_k ce que devient W_k quand on y remplace les $\frac{dT}{dt}$ par les T , on aura :

$$W_k = -ipV_k, \quad \Sigma V_k T_k = 0$$

d'où :

$$(p^2_k - p^2) T_k = -ipV_k. \quad (9)$$

Parmi les valeurs de p_k , je suppose qu'il y en ait n : $p_1, p_2, \dots, p_n$ qui soient égales entre elles de sorte que :

$$p_k = p_1 \quad (K \leq n); \quad p_k < p_1 \quad (K > n).$$

Supposons que dans les équations (9) le champ α, β, γ , soit nul, et faisons $p = p_1$, il viendra :

$$T_k < 0 \quad (K \leq n); \quad T_k = 0 \quad (K > n).$$

Si le champ, sans être nul, est très petit, les T_k dont l'indice est plus grand que n , sans être nuls, sont très petits. On peut donc les négliger dans les seconds membres des équations (9) dont tous les termes contiennent des composantes du champ en facteur. Si donc V'_k est ce que devient V_k quand on y annule tous les T dont l'indice est plus grand que n , nos équations deviennent :

$$(p^2_1 - p^2) T_k = -ipV'_k \quad (K = 1, 2, \dots, n). \quad (9 \text{ bis})$$

Posons :

$$S = i \frac{p^2 - p^2_1}{p}$$

Si je pose en outre $p = p_1 + \delta p$, comme δp sera très petit, j'aurai approximativement

$$S = 2i\delta p$$

et nos équations deviendront :

$$ST_k + V'_k = 0.$$

Ce sont là n équations linéaires entre les n variables

$$T_1, T_2, \dots, T_n;$$

en égalant à zéro le déterminant de ces équations, on aura une équation en S algébrique et du n^{e} ordre. Aux n racines de cette équation correspondront n raies qui proviendront du dédoublement de la raie $p = p_1$.

A cause de l'identité

$$\Sigma V'_k T_k = 0, \quad (10)$$

cette équation sera d'une forme toute particulière. Pour le faire comprendre, j'écris complètement l'équation en supposant $n = 4$.

$$\begin{vmatrix} S & a & b & c \\ -a & S & d & e \\ -b & -d & S & f \\ -c & -e & -f & S \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Je dis que l'équation a ses racines purement imaginaires; envisageons en effet les équations différentielles

$$\frac{dT_k}{dt} = V'_k$$

ce sont des équations linéaires à coefficients constants dont la solution dépend des exponentielles e^{-st} . De plus, à cause de l'identité (10), cette solution doit satisfaire à la condition :

$$\Sigma T^2_k = \text{const.}$$

ce qui serait impossible si la partie réelle de S était positive ou négative.

Les n valeurs de S étant donc purement imaginaires, les n valeurs de δp seront réelles, de sorte que les n raies de dédoublement existeront effectivement.

De plus les racines de l'équation en S devront être deux à deux égales et de signe contraire; c'est-à-dire que les raies dédoublées devront être deux à deux symétriques par rapport à la raie primitive. Si n est impair une des racines doit être nulle et par consé-

quent l'une des raies dédoublées coïncide avec la raie primitive. En définitive il suffit de faire $n=3$ pour retrouver le triplet de Zeeman et $n=4$ pour trouver le quadruplet de Cornu.

Telle est la théorie des ions complexes imaginée par M. Lorentz.

Isotropie dans le plan de l'onde.

Il reste à voir s'il est possible de satisfaire aux conditions de symétrie qui s'imposent à nous. Supposons que l'on change d'axes de coordonnées, en conservant l'axe des ζ qui est perpendiculaire au plan de l'onde, mais en faisant tourner les axes des x et des y d'un angle quelconque.

Le milieu étant isotrope, nos équations ne devront pas changer.

Nous sommes ainsi conduits à distinguer parmi les coordonnées T_k deux catégories différentes : les *coordonnées vectorielles* qui seront les composantes de vecteurs fixes dans l'espace, mais dont les projections sur les axes varieront d'après les lois ordinaires quand on fera tourner ces axes ; les *coordonnées scalaires* qui ne varieront pas quand les axes tourneront.

Supposons que l'on ait $n=4$, et que nous ayons deux coordonnées vectorielles X_k et Y_k , composantes d'un même vecteur et deux coordonnées scalaires T_k et T'_k . Nos équations s'écriront :

$$SX_k + V'_1 = SY_k + V'_2 = ST_k + V'_3 = ST'_k + V'_4 = 0. \quad (9 \text{ ter})$$

Quand les axes tourneront d'un angle φ , les quantités $X_k + iY_k$, $\alpha + i\beta$ seront multipliées par $e^{i\varphi}$ et les quantités conjuguées par $e^{-i\varphi}$. Donc $V'_1 + iV'_2$ doit être également multiplié par $e^{i\varphi}$, V'_3 et V'_4 ne doivent pas changer.

J'en conclurai que notre équation (11) doit être de la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} S & a\gamma & bz & c\beta \\ -a\gamma & S & b'\beta & -cz \\ -bz & -b'\beta & S & d\gamma \\ -c\beta & cz & -d\gamma & S \end{vmatrix} = 0 \quad (11 \text{ bis})$$

Ce n'est pas tout ; le milieu n'est pas seulement isotrope, il est symétrique ; nos équations ne doivent donc pas changer quand on remplace notre système d'axes par un système symétrique (le plan de symétrie étant le plan des $x\zeta$ par exemple).

Nous sommes ainsi amenés à distinguer, parmi les coordonnées vectorielles, celles de la première et de la deuxième sorte, selon que le vecteur correspondant conserve son signe ou change de signe quand on passe d'un système d'axes à son symétrique et nous distinguerons de même parmi les coordonnées scalaires celles de la première sorte, qui conservent leur signe et celles de la deuxième qui en changent.

Nous voyons ainsi que quand γ change de signe, γ , z , Y_k et T_k doivent changer de signe, c'est-à-dire que X_k et Y_k sont des coordonnées vectorielles de la première sorte, T'_k une coordonnée scalaire de la première sorte, T_k une coordonnée scalaire de la deuxième sorte.

En développant le déterminant (11 bis) on trouve :

$$S^4 + S^2(a^2\gamma^2 + b^2z^2 + b'^2\beta^2 + c^2z^2 + c'^2\beta^2 + d^2\gamma^2) + (ad\gamma^2 + bc\alpha^2 + bc'\beta^2) = 0.$$

Si l'on fait l'une des quatre hypothèses

$$a=b, d=c; \quad a=c, d=b; \quad a=-b, d=-c; \quad a=-c, d=-b;$$

les racines de cette équation ne dépendront que de la somme $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$; en d'autres termes elles dépendront de l'intensité du champ et pas de sa direction.

L'écartement des raies dédoublées serait donc le même que le champ soit parallèle ou perpendiculaire au rayon. En est-il effectivement ainsi ? L'expérience ne paraît pas défavorable à cette hypothèse, mais je ne crois pas que des mesures assez précises aient été faites pour qu'on puisse rien affirmer.

Supposons $\beta=0$ et étudions les conditions de la polarisation ; il faut pour cela déterminer le rapport $\frac{Y_k}{X_k}$ pour les quatre valeurs de S .

Pour que la polarisation soit rectiligne, le plan de polarisation étant perpendiculaire à la composante du champ normal au rayon, il faut que Y_k s'annule. En faisant $Y_k = 0$, on trouve :

$$S^2 + b^2 x^2 + d^2 y^2 = 0$$

ce qui concorde avec (11 bis) si l'on suppose :

$$a = c, \quad d = b.$$

Pour que la polarisation soit rectiligne, le plan de polarisation étant parallèle à la composante du champ normal au rayon, il faut faire $X_k = 0$, d'où :

$$S^2 + c^2 x^2 + d^2 y^2 = 0$$

ce qui concorde avec (11 bis) si l'on suppose :

$$a = b; \quad d = c.$$

Dans les deux cas, il y a deux raies (raies moyennes) dont la polarisation est toujours rectiligne, et qui disparaissent pour $z = 0$, et deux raies (raies extrêmes) dont la polarisation est rectiligne pour $\gamma = 0$, elliptique en général, et circulaire pour $z = 0$.

Dans la première hypothèse ($a = c, d = b$) la polarisation des raies moyennes est perpendiculaire au champ, celle des raies extrêmes parallèle.

Dans la seconde hypothèse ($a = b, c = d$) c'est le contraire.

C'est donc la première hypothèse que l'expérience semble confirmer.

Isotropie dans l'espace.

Mais nous n'avons pas encore rempli toutes les conditions de symétrie du problème.

Nos équations doivent rester les mêmes quelle que soit l'orientation du plan de l'onde, puisque le milieu est isotrope; de plus le milieu n'est pas seulement isotrope sans symétrie (comme l'essence de térébenthine par exemple) il est isotrope et symétrique. Les équations ne doivent donc pas changer quand on remplace le système des axes par un système symétrique par rapport à l'origine.

Nous sommes ainsi conduits à distinguer deux sortes de coordonnées :

1° Les coordonnées vectorielles que j'appellerai X_k, Y_k, Z_k et qui seront les composantes d'un vecteur;

2° Les coordonnées scalaires que j'appellerai T_k et qui seront tout à fait indépendantes du choix des axes.

Cela posé, par raison de symétrie :

1° H sera une combinaison linéaire d'expressions d'une des quatre formes suivantes :

$$\frac{dX_k}{dt} \frac{dX_i}{dt} + \frac{dY_k}{dt} \frac{dY_i}{dt} + \frac{dZ_k}{dt} \frac{dZ_i}{dt}; \quad \frac{dT_k}{dt} \frac{dT_i}{dt}$$

(i peut être égal à k).

2° P_2 sera une combinaison linéaire d'expressions d'une des formes suivantes :

$$X_k X_i + Y_k Y_i + Z_k Z_i; \quad T_k T_i;$$

3° $P_1 = fX + gY + hZ$ est une combinaison linéaire d'expressions de la forme

$$fX_k + gY_k + hZ_k.$$

4° L'expression $\sum V_k \partial T_k$ sera une combinaison linéaire d'expressions de la forme

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ X_k & Y_k & Z_k \\ \partial X_i & \partial Y_i & \partial Z_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ X_i & Y_i & Z_i \\ \partial X_k & \partial Y_k & \partial Z_k \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} T_i & \alpha X_k + \beta Y_k + \gamma Z_k \\ \partial T_i & \alpha \partial X_k + \beta \partial Y_k + \gamma \partial Z_k \end{vmatrix};$$

On voit que dans P_2 et H , les termes qui dépendent des X , ceux qui dépendent des Y , ceux qui dépendent des Z , ceux qui dépendent des T sont entièrement séparés les uns des autres. Soient

$$\begin{matrix} P_x, P_y, P_z, P_t \\ H_x, H_y, H_z, H_t \end{matrix}$$

ces huit ensembles de termes, P_x représentant par exemple l'ensemble des termes de P_2 qui dépendent des X .

Nous pouvons choisir les X_k et les T_k , de telle façon que :

$$H_x = \sum \frac{1}{2} \left(\frac{dX_k}{dt} \right)^2; \quad P_x = \sum \frac{P_k^2}{2} X_k^2;$$

$$H_t = \sum \frac{1}{2} \left(\frac{dT_k}{dt} \right)^2; \quad P_t = \sum \frac{Q_k^2}{2} T_k^2$$

et alors on verrait que H_y et P_y sont formés avec les Y , et H_z et P_z avec les Z comme H_x et P_x le sont avec les X .

On obtiendra ainsi une série d'équations analogues aux équations (9)

$$\begin{aligned} X_k(p_k^2 - p^2) &= \xi_k; & Y_k(p_k^2 - p^2) &= \tau_k; \\ T_k(q_k^2 - p^2) &= \tau_k \\ Z_k(p_k^2 - p^2) + Z \frac{dZ}{dZ_k} &= \zeta_k \end{aligned} \quad (12)$$

où ξ_k , τ_k , ζ_k , τ_k sont des quantités qui jouent par rapport à X_k , Y_k , Z_k , T_k le même rôle que jouait $-ipV$ par rapport à T_k dans les équations (9),

Nous allons traiter les équations (12) comme nous avons fait des équations (9). Les seconds membres des équations (12) comme ceux des équations (9) sont très petits. Annulons-les en première approximation et faisons $p = p_1$; nous obtiendrons une série d'équations linéaires entre les quantités X_k , Y_k , Z_k , T_k . En vertu de ces équations, un certain nombre de ces quantités s'annuleront. Par exemple X_k s'annulera si p_k n'est pas égal à p_1 et T_k si q_k n'est pas égal à p_1 . De plus celles de ces quantités qui ne s'annuleront pas pourront ne pas rester indépendantes, mais il pourra y avoir entre elles certaines relations linéaires.

Pour mieux mettre le fait en évidence, je distinguerai parmi les Z_k deux catégories; ceux pour lesquels $\frac{dZ}{dZ_k}$ sera nulle et que j'appellerai les Z'_k ; ceux pour lesquels cette dérivée ne sera pas nulle et que j'appellerai les Z''_k . J'appellerai X'_k et Y'_k les X_k et les Y_k qui correspondent aux Z'_k et X''_k et Y''_k ceux qui correspondent aux Z''_k .

Je poserai

$$Z = \sum l_k Z_k$$

et je désignerai par p'_k et l'_k les valeurs des coefficients p_k et l_k qui correspondent aux Z'_k ; par p''_k et l''_k celles qui correspondent aux Z''_k ; il résulte de cette définition et de celle des Z'_k que tous les l'_k sont nuls.

Nos équations (12) privées de seconds

membres s'écriront alors quand on y aura fait $p = p_1$

$$\begin{aligned} (p'^2_k - p^2_1) X'_k &= 0; & (p''^2_k - p^2_1) X''_k &= 0 \\ (p'^2_k - p^2_1) Z'_k &= 0; & (p''^2_k - p^2_1) Z''_k + l'_k Z &= 0 \end{aligned} \quad (12 \text{ bis})$$

avec

$$Z = \sum l'_k Z''_k.$$

On peut toujours supposer qu'un au plus des p'_k est égal à p_1 ; le cas où il y en aurait plus d'un se ramènerait immédiatement à celui où il n'y en a qu'un.

Si aucun des p''_k n'est égal à p_1 , tous les X''_k sont nuls.

Si un des p''_k que j'appellerai par exemple p''_i est égal à p_1 , les équations (12 bis) relatives aux Z''_k , montrent que Z et tous les Z''_k sont nuls.

Il est donc impossible que l'un des X''_k et l'un des Z''_k soient en même temps différents de zéro.

Mais on peut généraliser notre hypothèse; ne supposons plus

$$P_1 = fX + gY + hZ;$$

supposons toujours

$$P_1 = \sum l'_k (fX''_k + gY''_k + hZ''_k)$$

mais au lieu d'avoir

$$Z = \sum l_k Z_k = \sum l'_k Z''_k$$

on aura :

$$Z = \sum m_k Z_k$$

les coefficients m_k étant différents des l_k .

Nous pouvons supposer alors :

$$p''_i = p_1; \quad l''_i \geq 0, \quad m'_i = 0$$

et alors X''_i , Y''_i , Z''_i pourront ne pas s'annuler.

En vertu des équations (12 bis) quelques-unes de nos coordonnées s'annuleront; les autres s'exprimeront linéairement à l'aide d'un certain nombre d'entre elles qui resteront indépendantes et qui joueront le rôle des coordonnées $T_1, T_2, \dots, T_n$ dans les équations (9 bis). Substituons les valeurs ainsi

déduites des équations (12 bis) dans les seconds membres des équations (12); ce que nous pouvons faire en négligeant des termes du deuxième ordre; nous obtiendrons des équations linéaires analogues aux équations (9 bis) et en égalant à zéro le déterminant de ces équations linéaires, nous obtiendrons une équation analogue à l'équation (11).

Discussion.

Si nous voulons rendre compte du quadruplet, il faut que cette équation soit du quatrième degré; pour cela il faut que 4 et 4 seulement de nos coordonnées ne s'annulent pas en vertu des équations (12 bis).

Supposons d'abord que les coefficients appelés plus haut m_k sont égaux aux coefficients l_k .

Alors les coordonnées qui ne s'annulent pas pourront être trois coordonnées vectorielles X'_i, Y'_i, Z'_i et une coordonnée scalaire T_k .

L'expression :

$$\frac{i}{p} \sum (\xi_k \delta X_k + \tau_k \delta Y_k + \zeta_k \delta Z_k + \tau_k \delta T_k),$$

qui joue le même rôle que jouait l'expression $\Sigma V_k \delta T_k$ par rapport aux équations (9), sera de la forme :

$$a \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ X'_i & Y'_i & Z'_i \\ \partial X'_i & \partial Y'_i & \partial Z'_i \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} T_k & \alpha X'_i + \beta Y'_i + \gamma Z'_i \\ \partial T_k & \partial \alpha X'_i + \partial \beta Y'_i + \partial \gamma Z'_i \end{vmatrix}$$

notre équation en S s'écrit alors :

$$\begin{vmatrix} S & -\alpha\gamma & \alpha\beta & bz \\ \alpha\gamma & S & -\alpha z & b\beta \\ -\alpha\beta & \alpha z & S & b\gamma \\ -bz & -b\beta & -b\gamma & S \end{vmatrix} = 0$$

où il est aisé de reconnaître l'équation (11 bis) dans l'hypothèse $a=c, b=d$.

Le problème semble donc résolu d'une manière satisfaisante. Il n'en est rien encore cependant. Reprenons l'équation dont dépend X'_i .

$$(p^2_1 - p^2) X'_i = \gamma'_i.$$

Elle a été tirée d'une équation différentielle (que j'écris en supprimant le second membre qui dépend du champ magnétique et est très petit).

$$\frac{d^2 X'_i}{dt^2} + p^2_1 X'_i = l'_i f.$$

Mais d'après la définition même des X'_k , le coefficient l'_i doit être nul. Il reste donc :

$$\frac{d^2 X'_i}{dt^2} + p^2_1 X'_i = 0.$$

On voit que dans cette équation différentielle, le déplacement électrique n'entre pas.

La coordonnée X'_i pourra donc éprouver des oscillations, mais ces oscillations ne se communiqueront pas à l'éther. Il en résulte que la solution qui précède est illusoire.

Nous sommes donc réduits à supposer les l_k différents des m_k :

$$p''_i = p_i, \quad m''_i = 0, \quad l''_i \geq 0$$

Soient alors X''_i, Y''_i, Z''_i et T_k les coordonnées qui ne s'annulent pas; l'expression (13) sera de la forme :

$$a \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ X''_i & Y''_i & Z''_i \\ \partial X''_i & \partial Y''_i & \partial Z''_i \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} T_k & \alpha X''_i + \beta Y''_i + \gamma Z''_i \\ \partial T_k & \partial \alpha X''_i + \partial \beta Y''_i + \partial \gamma Z''_i \end{vmatrix}$$

Nous retrouvons alors l'équation (14). D'ailleurs l'équation différentielle

$$\frac{d^2 X''_i}{dt^2} + p^2_1 X''_i = l''_i f$$

contient le déplacement électrique et nous sommes à l'abri de l'objection que je faisais tout à l'heure.

On voit qu'il est à la rigueur possible de rendre compte du quadruplet de Cornu par la théorie de Lorentz généralisée. Je laisse de côté les cas plus compliqués où l'on aurait des sextuplets ou des phénomènes encore plus complexes.

L'introduction de coordonnées scalaires ne doit pas nous étonner; supposons par exemple une sphère pulsante de Bjerknes, susceptible en outre d'un mouvement de translation;

la situation du système sera définie par quatre coordonnées, le rayon de la sphère qui sera une coordonnée scalaire et les coordonnées cartésiennes du centre de la sphère qui seront des coordonnées vectorielles.

Quoique le caractère artificiel de toutes ces

hypothèses soit manifeste, il convient donc de conserver provisoirement la théorie de Lorentz généralisée qui seule jusqu'à présent permet de relier entre eux les faits observés.

H. POINCARÉ,
Membre de l'Institut.

APPLICATIONS MÉCANIQUES DE L'ÉLECTRICITÉ ⁽¹⁾

Les applications de l'électricité à la conduite des **appareils de levage** se répand de jour en jour, principalement en raison de la facilité avec laquelle ces applications se prêtent aux circonstances les plus variées.

Le type d'**ascenseur électrique** que nous décrivons aujourd'hui, dû à M. SPRAGUE, l'un des premiers promoteurs de ce genre d'appareil, est remarquable par l'efficacité des mesures, très simples, d'ailleurs, prises pour assurer la sécurité de sa marche. Il a été adopté pour le service des stations du Central Railway de Londres ⁽¹⁾.

Le treuil 1 (fig. 1, 2, 3) est commandé au moyen des deux dynamos 1 et 2, par des vis sans fin 5, 6, 7 et 8, diagonalement droites et gauches, et de pignons 13, 14, 15, 16, calés sur les arbres 10 et 11, dont l'un, 10, est celui même du treuil, et qui sont conjugués par les pignons 12, 12, 12, 12. Cette conjugaison oblige naturellement les deux dynamos à se synchroniser, et fait que l'un des mécanismes sert de frein de sûreté ou de contrôle à l'autre. En outre, les pignons hélicoïdaux et leurs vis sont disposés de manière que leurs poussées se neutralisent sur leurs arbres qui, ainsi, n'exigent pas de butées et les couronnes des pignons 15 sont reliés (fig. 6) à leurs

corps 17 par des boulons 19 qui relient aussi 17 à la couronne 12, de manière à en permettre l'ajustement pour le rattrapage des jeux.

Les dynamos ont leurs inducteurs AA reliés en série aux fils LL et en dérivation avec les armatures.

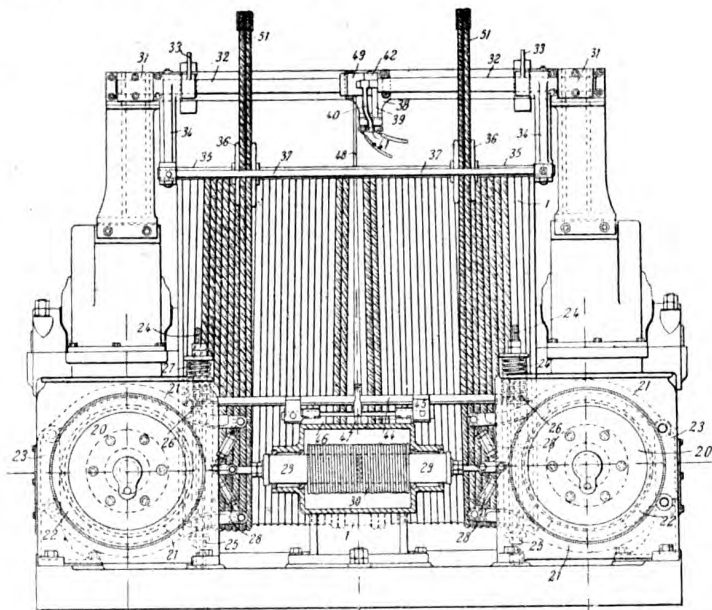


Fig. 1. — Ascenseur Sprague (1897), vu par bout.

Chacun des arbres à vis sans fin porte un frein 20, 22, à mâchoires 21, articulées en 23 et pressées par les ressorts 27 et leurs tiges 25 dès que le solénoïde 30 lâche ses armatures 29, articulées aux genoux 28, 28.

Le tambour est à deux câbles enroulés l'un à droite et l'autre à gauche, et dont les

⁽¹⁾ *Engineering*, 3, et 10 mars 1899, p. 273 et 304.

⁽¹⁾ *L'Éclairage Électrique*, t. XVIII, p. 281.