Tome XXIII. Samedi 14 Avril 1900. 7e Année. — N° 15

L'Éclairage Électrique

REVUE HEBDOMADAIRE DES TRANSFORMATIONS

Électriques — Mécaniques — Thermiques

DE

L'ÉNERGIE

SUR L'INDUCTION UNIPOLAIRE

1. M. le colonel de Nicolaïeve a dernièrement communiqué à l'Académie des Sciences (1) diverses expériences curieuses sur la rotation continue d'un aimant soumis à l'action de divers systèmes de courants.

Le caractère paradoxal de ces expériences et d'autres analogues avait frappé plusieurs personnes qui avaient été jusqu'à se demander si le principe de l'égalité de l'action et de la réaction restait applicable dans toutes les circonstances.

D'autre part la question de l'induction unipolaire a donné lieu dans ces derniers mois à de nombreuses discussions et ici même (2) M. Raveau a exprimé à ce sujet des idées fort justes dans un article qui a été très remarqué.

Cependant toutes ces expériences sont susceptibles d'une explication des plus simples et elles ne présentent rien de mystérieux. Il suffit pour s'en rendre compte d'en revenir aux principes fondamentaux de l'électrodynamique.

Dans toutes ces expériences, l'appareil se compose :

1° D'un aimant présentant la forme d'un solide de révolution ; cet aimant peut être fixe ou tourner autour de son axe ; dans tous les cas le champ magnétique dû à cet aimant est invariable ; car à cause de la forme symétrique de l'aimant, la rotation de l'aimant ne peut rien changer à ce champ.

2° D'un circuit voltaïque dont une partie est fixe, et l'autre susceptible de tourner autour de l'axe de l'aimant.

---

(1) *Comptes rendus*, 24 juillet et 18 septembre 1899, *L'Éclairage Électrique*, t. XX, p. 348 et t. XXI, p. 66.
(2) *L'Éclairage Électrique*, du 3 février 1900, t. XXII, p. 161.

Le courant passe de la partie fixe du circuit à la partie mobile par un contact mobile ; mais deux cas sont à distinguer.

Si le contact se trouve sur l'axe de révolution du système, c'est toujours le *même* point du circuit fixe qui se trouve en contact avec le *même* point du circuit mobile ; nous avons alors un *contact sans glissement*. Si au contraire le contact ne se trouve pas sur l'axe de révolution, un point du circuit fixe vient successivement en contact avec différents points du circuit mobile ou inversement, nous aurons ce que j'appellerai un *contact glissant*, soit que le glissement se fasse entre conducteurs solides, soit qu'une pointe métallique plonge dans un godet de mercure.

Nous ne tarderons pas à voir l'importance de cette distinction.

Considérons un système électrodynamique quelconque soumis à l'action d'un champ magnétique extérieur ; envisageons un circuit voltaïque faisant partie de ce système ; multiplions l'intensité du courant qui parcourt ce circuit par le flux d'induction magnétique dû au champ extérieur qui traverse le circuit ; je désigne par T la somme des produits ainsi obtenus pour tous les circuits du système.

Cette somme représentera l'énergie électrodynamique due à l'action mutuelle du système électrodynamique et du champ extérieur.

(Je rappellerai en passant, pour éviter toute confusion, que si on voulait calculer l'énergie électrodynamique due à l'action d'un système électrodynamique sur *lui-même*, il faudrait après avoir fait la somme des produits obtenus par la règle ci-dessus, diviser cette somme par deux.)

Les attractions électrodynamiques ont toujours pour effet d'augmenter T et pour un déplacement infiniment petit du système, le travail de ces attractions est précisément δT. Pour savoir si un système électrodynamique va se mettre en mouvement, il faut chercher si un déplacement compatible avec les liaisons peut avoir pour effet d'augmenter T.

Telle est la règle que l'on peut déduire des principes généraux de l'électrodynamique ; mais pour appliquer cette règle correctement, il faut bien en comprendre le sens.

Prenons d'abord un exemple un peu grossier.

Supposons un système formé de deux circuits. Dans une première position, le premier circuit est fermé et parcouru par un courant d'intensité i, le second circuit est ouvert et n'est parcouru par aucun courant ; de plus les flux d'induction qui traversent les deux circuits sont respectivement A et B. Dans ces conditions on a :

$$T = iA.$$

Le système passe dans une seconde position où les deux flux deviennent respectivement $A + \delta A$ et $B + \delta B$. Par conséquent l'énergie électrodynamique devient :

$$T + \delta T = i(A + \delta A).$$

Mais je suppose qu'en même temps un commutateur entre en jeu, ouvre le premier circuit où l'intensité devient nulle et ferme le second circuit où l'intensité devient j. L'énergie électrodynamique devient alors :

$$j(B + \delta B).$$

De sorte que cette énergie a subi deux accroissements différents ; le premier

$$\delta T = i\delta A$$

dû directement au déplacement des circuits, et le second

$$\delta' T = j(B + \delta B) - i(A + \delta A).$$

dû à la mise en jeu du commutateur.

Il est bien clair dans ce cas que le travail des forces électrodynamiques sera égal à δT et non à $\delta T + \delta' T$ et qu'on n'a pas à se préoccuper dans le calcul de ces forces des variations que l'énergie T peut subir par suite du jeu du commutateur.

Supposons maintenant un système comprenant deux de ces contacts glissants dont je parlais tout à l'heure. A un moment donné, le courant suit à l'intérieur de la partie fixe du système le chemin ABC et dans la partie mobile le chemin DEF, C étant en contact avec D et F avec A. Dans un instant ultérieur, D et F cessent d'être en contact avec C et A par suite du mouvement de l'appareil et viennent respectivement en contact avec deux points C' et A' appartenant à la partie fixe du système. Par conséquent le courant suivra toujours dans la partie mobile le chemin DEF, mais dans la partie fixe il suivra un chemin nouveau A'B'C'.

Soit AMC une ligne quelconque joignant les points A et C, nous regarderons cette ligne comme fixe et comme appartenant à la partie fixe du système.

Soit FND une ligne invariablement liée à la partie mobile du système et coïncidant avec AMC dans la première position de l'appareil. Soit enfin A'M'C' la ligne fixe qui coïncide avec FND dans la seconde position de l'appareil.

Soient APA' CQC' les arcs lieux des points de la partie fixe qui se trouvent successivement en contact avec F et avec D.

J'aurai à envisager les circuits ABCMA, A'B'C'M'A', CMAPA'M'C'QC, appartenant à la partie fixe et le circuit DEFND appartenant à la partie mobile. Soient φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 les flux d'induction magnétique qui traversent ces quatre circuits, dans la première position et $\varphi_1 + \delta\varphi_1$, $\varphi_2 + \delta\varphi_2$, $\varphi_3 + \delta\varphi_3$, $\varphi_4 + \delta\varphi_4$, les flux qui les traversent dans la deuxième position.

Soit i l'intensité du courant, que dans ce genre de calcul il convient de considérer comme constante.

Dans la première position, on aura :

$$T = i(\varphi_1 + \varphi_4).$$

et dans la deuxième

$$T = i(\varphi_2 + \delta\varphi_2 + \varphi_4 + \delta\varphi_4).$$

Cela veut-il dire que le travail des forces électrodynamiques soit égal à la différence

$$\Delta T = i(\varphi_2 + \delta\varphi_2 - \varphi_1 + \delta\varphi_4)\ ?$$

Evidemment non. Si la communication métallique n'avait pas été rompue entre A et F et entre C et D, et si elle n'avait pas été établie entre A' et F et entre C' et D, le courant au lieu de suivre (dans la deuxième position) le chemin A'B'C'DEF, aurait suivi le chemin ABCQC'DEA'PA (comme si deux fils métalliques fictifs CQC' et A'PA avaient maintenu la communication entre A et F d'une part, entre C et D d'autre part) et l'on aurait eu

$$T = i(\varphi_1 + \delta\varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_4 + \delta\varphi_4),$$

de sorte que l'énergie aurait subi un accroissement

$$\delta T = i(\delta\varphi_1 + \delta\varphi_4 + \varphi_3 + \delta\varphi_3).$$

Le contact glissant en ouvrant de nouvelles communications métalliques et en fermant d'autres a joué le rôle d'un commutateur; le travail des forces électrodynamiques est égal à δT et non à ΔT et nous n'avons pas plus à tenir compte de la différence $\Delta T - \delta T$ que nous ne tenions compte tout à l'heure de la variation d'énergie due au jeu du commutateur.

Ainsi la condition pour qu'il se produise un mouvement, c'est que δT soit positif; peu importe que ΔT soit nul.

S'il n'y avait que des contacts sans glissement, il n'y aurait ni rupture, ni ouverture de communications métalliques et l'on aurait $\delta T = \Delta T$. On entrevoit déjà l'importance du rôle des contacts glissants.

Dans le cas qui nous occupe, le champ est invariable, de sorte que $\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2 = 0$, puisque les deux premiers circuits sont fixes; de plus le champ est de révolution et le quatrième circuit est animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe. On a donc :

$$\delta\varphi_4 = 0.$$

Dans la première position, le troisième circuit s'évanouit parce que les points A et A', C et C' se confondent. Donc

$$\varphi_3 = 0.$$

Nous pouvons admettre enfin à cause de la symétrie de l'appareil qu'on peut passer de la ligne ABC à la ligne A'B'C' par une simple rotation de sorte que

$$\varphi_2 = \varphi_1.$$

(En tout cas on retrouverait cette égalité après une révolution complète.)

On voit alors que

$$\Delta T = 0, \quad \delta T = i\delta\varphi_3 .$$

On en conclut tout de suite que s'il n'y a pas de contact glissant, il ne saurait y avoir de mouvement.

Cherchons maintenant le travail des forces électrodynamiques pendant une révolution complète, ce sera :

$$\int \delta T = i \int \delta\varphi_3.$$

Pendant cette révolution la ligne AMC engendrera une certaine surface de révolution et $\int \delta\varphi_3$ est le flux d'induction qui traverse cette surface.

Cette surface de révolution forme la surface latérale d'une sorte de cylindre dont les deux bases sont les deux cercles limités par les circonférences décrites par les deux contacts glissants D et F. Comme le flux d'induction qui traverse une surface fermée quelconque est nul, le flux d'induction $\int \delta\varphi_3$ qui traverse la surface latérale doit être égal au signe près à la somme algébrique des flux d'induction qui traversent ces deux cercles de base.

D'où la règle suivante :

En multipliant l'intensité du courant par la somme algébrique des flux d'induction qui traversent les circonférences décrites par les différents contacts glissants dans leur rotation, on aura une quantité proportionnelle au travail des forces électromagnétiques dans une révolution complète et par conséquent au couple moteur.

Le seul énoncé de cette règle montre pourquoi il ne peut pas y avoir de rotation sans contact glissant.

2. Soit H la partie fixe de notre système; M la partie mobile du circuit, K l'aimant. D'après ce que nous venons de voir, M se mettra à tourner. Si M est rendu solidaire de l'aimant K, il l'entraînera dans sa rotation. Mais si K est indépendant de M, il ne tournera pas, car H et M font agir sur lui deux couples égaux et de sens contraire.

Si H, M et K pouvaient tous trois tourner autour de l'axe du système et si ces trois pièces étaient indépendantes, K ne bougerait pas, H et M tourneraient l'un dans un sens, l'autre dans l'autre.

Si H et M étaient rendues solidaires, la rotation s'arrêterait; il n'y aurait plus alors de contact glissant, car les deux pièces H et M ne pourraient plus glisser l'une sur l'autre.

Si H et M redevenant indépendantes, on rendait K solidaire soit de H, soit de M, l'aimant K serait entraîné soit dans la rotation de H, soit dans celle de M et tournerait par conséquent soit dans un sens, soit dans l'autre.

Tous ces faits n'ont rien de mystérieux et sont conformes au principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

On voit que la rotation de l'aimant n'est qu'un fait pour ainsi dire secondaire; l'aimant tourne s'il est entraîné par une pièce tournante, comme le serait n'importe quel corps inerte rendu solidaire d'une pièce tournante.

Il est vrai que dans beaucoup de ces expériences, dans celle d'Ampère, par exemple, l'aimant est lui-même traversé par le courant; il est alors soumis directement à un couple, mais s'il tourne, ce n'est pas en tant qu'aimant, c'est en tant que conducteur.

3. On peut se demander maintenant si, quand on fera tourner les diverses parties de l'appareil les unes par rapport aux autres, il se développera des forces électromotrices d'induction.

Si le flux d'induction qui traverse un circuit quelconque augmente de $\delta\varphi$ dans le temps δt il en résulte dans ce circuit une force électromotrice égale à $\frac{\delta\varphi}{\delta t}$, que la variation du flux soit due à la variation du champ, ou au déplacement du circuit. Mais, si par suite de l'intervention d'un commutateur ou d'un contact glissant, le courant après avoir parcouru un certain circuit, vient à parcourir un circuit différent et si les flux qui traversent ces deux circuits ne sont pas les mêmes, il ne se produit pas une force électromotrice d'induction égale à l'accroissement du flux.

Reprenons nos notations et supposons que H soit de nouveau fixe, M et K susceptibles de tourner.

Le courant parcourt d'abord le circuit ABCDEFA qui est traversé par le flux $\varphi_1 + \varphi_4$. La partie mobile se déplace; si les communications métalliques n'étaient pas altérées par le jeu du contact glissant, le courant parcourrait le circuit ABCQC′DEFA′PA qui est traversé par le flux

$$(\varphi_1 + \delta\varphi_1) + (\varphi_3 + \delta\varphi_3) + (\varphi_4 + \delta\varphi_4) = \varphi_1 + \delta\varphi_3 + \varphi_4 .$$

Mais à cause du contact glissant, il parcourt le circuit A′B′C′DEFA′ qui est traversé par le flux

$$(\varphi_2 + \delta\varphi_2) + (\varphi_4 + \delta\varphi_4) = \varphi_2 + \varphi_4 .$$

Or nous devons calculer la force électromotrice d'induction comme si le contact glissant n'avait pas agi. Cette force sera donc proportionnelle à

$$(\varphi_1 + \delta\varphi_3 + \varphi_4) - (\varphi_1 + \varphi_4) = \delta\varphi_3$$

et non à

$$(\varphi_2 + \varphi_4) - (\varphi_1 + \varphi_4) = \varphi_2 - \varphi_1 = 0 .$$

Cette force sera donc proportionnelle à ce que nous appelions tout à l'heure $\int \delta \varphi_r$, ou ce qui revient au même :

La force électromotrice d'induction est proportionnelle à la somme algébrique des flux d'induction magnétique qui traversent les circonférences décrites par les contacts glissants dans leur rotation.

On remarquera que cette force est développée par la rotation de la partie M et qu'elle reste la même, soit que l'aimant demeure immobile, soit qu'il soit entraîné dans la rotation de M. La rotation de l'aimant ne fait rien à l'affaire ; celle du conducteur seule importe.

4. Dans ces conditions que doit-on penser de cette question ? les lignes de force sont-elles entraînées dans la rotation de l'aimant ?

Elle n'a par elle-même aucun sens puisque ces lignes de force ne sont qu'une création de notre esprit. Elle ne peut signifier qu'une chose ; en appliquant la règle des lignes de force arrive-t-on à un résultat exact en les supposant fixes et à un résultat inexact en les supposant mobiles, ou bien est-ce le contraire ?

Or nous allons voir que, en ce qui concerne les courants fermés, le résultat est le même, qu'on suppose ces lignes fixes ou mobiles ; ce résultat est d'ailleurs exact.

Supposons que nous fassions tourner l'aimant K en même temps que la partie M du système, la partie H restant fixe. Si les lignes de force sont fixes, la partie H du circuit n'en coupera aucune, mais la partie M en coupera un certain nombre.

Si au contraire les lignes de force sont entraînées dans la rotation de K et de M, la partie M tournant avec les lignes de force, n'en coupera aucune ; mais la partie H en coupera.

Dans les deux cas, le nombre total des lignes de force coupées par le circuit total $H + M$ sera le même.

En effet, pour calculer le nombre de lignes de force coupées dans un petit mouvement quelconque, nous pouvons décomposer ce mouvement en deux parties ; nous pouvons faire tourner M en laissant K immobile ; et ensuite faire tourner K en laissant M immobile.

Dans la première partie, les lignes de force doivent être regardées comme fixes dans les deux hypothèses, puisque l'aimant est fixe. Nous n'avons donc à nous occuper que de la seconde partie du mouvement.

Dans cette seconde partie, si nous supposons les lignes de force fixes, comme le circuit $H + M$ reste fixe, il ne coupe aucune ligne de force. Supposons maintenant les lignes de force entraînées par l'aimant, je dis que le nombre total des lignes de force coupées par le circuit fermé sera nul. En effet, le champ étant de révolution, le flux d'induction qui traverse le circuit $H + M$ sera constant. Or la variation de ce flux est égale au nombre de lignes de force coupées par le circuit ; ce nombre est donc nul.

Entendons-nous bien cependant. Je n'ai employé le mot de lignes de force que pour me conformer à l'usage, j'aurais dû dire *lignes d'induction magnétique*. La force magnétique est identique à l'induction magnétique à l'extérieur des aimants, et c'est à l'extérieur des aimants qu'on a le plus souvent à l'envisager, de sorte qu'aucune confusion n'est à craindre. Mais à l'intérieur des aimants, il est nécessaire de faire cette distinction.

Précisons donc ; la force électromotrice d'induction cherchée dépend du nombre des lignes d'induction magnétique coupées et non du nombre des lignes de force. C'est donc le nombre de ces lignes d'induction qu'il convient de considérer. Le nombre des lignes d'induction coupées est égal à la variation du flux magnétique qui traverse le circuit ; on le démontrerait à l'aide de la relation :

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0$$

C'est ce nombre des lignes d'induction coupées par le circuit total qui reste le même, que ces lignes soient supposées fixes, ou qu'on les suppose entraînées par la rotation de l'aimant.

Or la seule chose que l'expérience puisse atteindre dans le cas des courants fermés, c'est la force électromotrice totale développée dans le circuit, c'est-à-dire le nombre total des lignes coupées par le circuit fermé.

On n'a donc aucun moyen de décider entre les deux hypothèses.

D'autre part l'observation des rotations magnétiques ne peut non plus rien nous apprendre, puisque la force électrodynamique qui agit sur un élément de courant est proportionnelle au parallélogramme construit sur cet élément et sur la force magnétique, sans qu'on ait à s'inquiéter de savoir si le champ est constant ou variable et par conséquent si la ligne de force magnétique est en repos ou en mouvement.

5. Il semble que la considération des circuits ouverts doit permettre de résoudre la question que les expériences sur les circuits fermés laissent indécise.

A défaut d'expériences à ce sujet, voyons ce que les principales théories proposées, celles de Hertz et de Lorentz, peuvent nous faire prévoir.

Imaginons un système comprenant : 1° un aimant, 2° divers conducteurs, 3° divers diélectriques. L'aimant est de révolution comme nous l'avons toujours supposé jusqu'ici et les diverses parties du système sont les unes fixes, les autres susceptibles de tourner autour de l'axe du système.

D'après la théorie de Hertz, si l'on appelle X, Y, Z, les composantes de la force électrique, l'intégrale

$$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

prise le long d'un contour fermé C, est égale à la dérivée du flux d'induction magnétique qui traverse ce contour. Dans le calcul de cette dérivée, il faut supposer que le contour est entraîné par le mouvement de la matière.

Si alors le contour fermé C est contenu tout entier dans une partie fixe du système, la variation du flux est nulle ; car le champ, étant de révolution, demeure invariable que l'aimant tourne ou ne tourne pas. Notre intégrale est donc nulle.

Si le contour fermé C est contenu tout entier dans une partie tournante du système, cette variation sera encore nulle ; car le champ est invariable et de révolution et le contour n'a d'autre déplacement qu'une rotation autour de l'axe de révolution. Notre intégrale est donc encore nulle.

L'expression

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

est donc une différentielle exacte tant à l'intérieur des parties fixes qu'à l'intérieur des parties tournantes.

On aura donc soit dans les parties fixes, soit dans les parties tournantes :

$$X = \frac{dV}{dx}, \quad Y = \frac{dV}{dy}, \quad Z = \frac{dV}{dz},$$

V étant un potentiel.

Seulement la fonction V pourra subir une discontinuité quand on passera d'une partie fixe à une partie tournante ou inversement.

Soient P et P′ deux parties du système en contact l'une avec l'autre et tournant respectivement avec des vitesses angulaires ω et ω' ; je supposerai que la surface de séparation est une surface de révolution.

Soit ABCDA un contour fermé passant de l'une à l'autre et traversant la surface de séparation aux points A et C ; la partie ABC du contour est dans P, la partie CDA dans P'. Quand on traverse la surface de séparation en passant de P en P', la fonction V subit une variation brusque que j'appelle δV ; soit δV_1 la valeur de δV au point A et δV_2 la valeur de δV au point C. L'intégrale

$$\int (X dx + Y dy + Z dz)$$

prise le long du contour ABCDA sera évidemment :

$$\delta V_1 - \delta V_2 .$$

Quelle sera d'autre part la variation du flux d'induction ; la partie ABC du contour, tournant avec la vitesse ω viendra au bout du temps 1 en A'B'C'; la partie CDA, tournant avec la vitesse ω' viendra en C''D''A''; de sorte que le contour ABCDA deviendra A'B'C'C''D''A''A', les deux parties du contour étant après leur déplacement raccordées par deux arcs de cercle C'C'' et A''A'.

Joignons les points C et A par une ligne quelconque CQA appartenant à la surface de séparation ; joignons de même C' et A', C'' et A'' par des lignes C'Q'A', C''Q''A'' qui s'obtiennent en faisant tourner CQA d'un angle ω ou d'un angle ω'. Nous aurons évidemment en désignant par la notation (flux ABCDA) le flux d'induction magnétique qui traverse le circuit ABCDA :

$$\begin{gathered}\text{flux ABCDA} = \text{flux ABCQA} + \text{flux CDAQC}\\ \text{flux A'B'C'C''D''A''A'} = \text{flux A'B'C'Q'A'} + \text{flux C''D''A''Q''C''} + \text{flux C'C''Q''A''A'Q'C'}\\ \text{flux ABCQA} = \text{flux A'B'C'Q'A'}\\ \text{flux CDAQC} = \text{flux C''D''A''Q''C''}\end{gathered}$$

d'où :

$$\text{flux A'B'C'C''D''A''A'} - \text{flux ABCDA} = \text{flux C'C''Q''A''A'Q'C'}$$

d'où enfin :

$$\delta V_1 - \delta V_2 = \text{flux C'C''Q''A''A'Q'C'}$$

Mais le second membre de cette dernière égalité est égal à $\frac{\omega' - \omega}{2\pi} \times \Phi$, Φ étant le flux qui traverse la portion de la surface de séparation (laquelle est de révolution, comme nous le savons) comprise entre le parallèle décrit par le point C et le parallèle décrit par le point A.

Ce flux Φ lui-même est égal à la différence des flux Φ_1 et Φ_2 qui traversent les deux cercles limités respectivement par le parallèle du point A et par le parallèle du point C. On a donc :

$$\delta_1 V - \delta V_2 = \frac{\omega' - \omega}{2\pi} (\Phi_1 - \Phi_2)$$

Si nous observons que V n'est déterminé qu'à une constante près et que nous avons le droit d'attribuer à cette constante deux valeurs différentes dans P et dans P', nous voyons que nous pouvons nous donner arbitrairement la valeur de δV en un point de la surface de séparation. Nous avons donc le droit de prendre :

$$\delta V_1 = \frac{\omega' - \omega}{2\pi} \Phi_1 ; \; \delta V_2 = \frac{\omega' - \omega}{2\pi} \Phi_2 . \qquad (1)$$

et nous aurions ainsi une règle très simple pour déterminer δV en un point quelconque de la surface de séparation de deux parties tournant avec des vitesses différentes.

Cela posé, il est facile de voir comment on devra calculer V ; ce potentiel se composera :

1° Du potentiel d'une double couche dont la densité sera $\frac{\delta V}{4\pi}$ et qui sera répandue sur les surfaces de séparation des diverses parties du système qui tourneront avec des vitesses de rotations différentes.

2° Du potentiel de simples couches répandues à la surface des conducteurs.

3° Du potentiel de simples couches répandues à la surface de séparation de deux diélectriques dont le pouvoir diélectrique est différent.

(Dans ce dernier cas, je parle de l'électrisation apparente de la surface des diélectriques par suite de la polarisation de ces diélectriques, ou en d'autres termes de ce que Hertz appelle l'électricité libre par opposition à l'électricité vraie).

La densité des doubles couches est donnée par ce qui précède ; voyons comment se détermine la densité des simples couches.

Nous supposerons qu'aucun conducteur ne se compose de deux parties contiguës tournant avec des vitesses différentes ; sans cela l'équilibre ne serait pas possible, le conducteur serait continuellement parcouru par un courant, nous retomberions en somme sur le cas des circuits fermés que nous avons traité plus haut.

Si aucun conducteur ne se compose de deux parties en rotation relative, l'intégrale

$$\int (X dx + Y dy + Z dz)$$

prise le long d'un contour intérieur à ce conducteur sera nulle ; il ne s'établira donc pas à l'intérieur du conducteur de courant continu et l'équilibre ne tardera pas à être atteint. La condition de cet équilibre, c'est qu'on ait à l'intérieur du conducteur :

$$X = Y = Z = 0, \quad V = \text{const.} \tag{2}$$

D'autre part à la surface de séparation de deux diélectriques dont les pouvoirs diélectriques sont respectivement ε et ε' on devra avoir

$$\varepsilon N = \varepsilon' N', \tag{3}$$

N et N' désignant la composante normale de la force électrique de part et d'autre de la surface de séparation.

Les relations (2) et (3) sont celles que l'on rencontre dans tous les problèmes d'électrostatique ; elles permettront de déterminer la densité des simples couches, celle des doubles couches étant connue par la relation (1).

Donc les simples couches seront celles qui se développent *par influence* à la surface des conducteurs et des diélectriques, sous l'action des doubles couches, d'après les règles ordinaires de l'électrostatique.

Ces doubles couches étant connues par l'équation (1), le problème peut être regardé comme entièrement résolu et cette analyse nous permettra en particulier de calculer la charge électrique qui se portera aux différents points de la surface des condensateurs.

6. Après avoir examiné la théorie de Hertz, voyons ce que donne celle de Lorentz.

Dans la théorie de Lorentz, si l'on désigne par f, g, h, les composantes du déplacement électrique ; celles de la force électrique seront :

$$\frac{4\pi f}{K_0}, \frac{4\pi g}{K_0}, \frac{4\pi h}{K_0}$$

***

où K_0 est l'inverse du carré de la vitesse de la lumière. L'intégrale :

$$\int \frac{4\pi}{K_0}(f dx + g dy + h dz)$$

prise le long d'un contour fermé est encore égale à la variation du flux d'induction magnétique qui traverse ce contour, mais en supposant ce contour fixe et non pas entraîné dans le mouvement de la matière.

Il semble donc que nous allons être conduits à d'autres résultats que dans le numéro précédent.

Mais si nous posons,

$$X = \frac{4\pi f}{K_0} + \zeta b - \eta c$$

$$Y = \frac{4\pi g}{K_0} + \xi c - \zeta a$$

$$Z = \frac{4\pi h}{K_0} + \eta a - \xi b,$$

en désignant par a, b, c les composantes de l'induction magnétique et par ξ, η, ζ celles de la vitesse de la lumière, on trouve que l'intégrale

$$\int (X dx + Y dy + Z dz$$

est égale à la variation du flux d'induction magnétique qui traverse le contour, le contour étant supposé entraîné dans le mouvement de la matière.

Donc cette intégrale aura même valeur que dans l'analyse de Hertz.

On aura donc tant à l'intérieur des parties fixes qu'à l'intérieur des parties tournantes

$$X = \frac{dV}{dx},\ Y = \frac{dV}{dy},\ Z = \frac{dV}{dz};$$

et quand on passera d'une partie fixe à une partie tournante ou inversement, la fonction V subira un saut brusque δV qui sera donné par la formule (1).

D'après la théorie de Lorentz la force qui tend à mettre en mouvement un électron dans un conducteur a des composantes proportionnelles à

$$\frac{4\pi f}{K_0} + \zeta\beta - \eta\gamma$$

$$\frac{4\pi f}{C_0} + \xi\gamma - \zeta\alpha$$

$$\frac{4\pi f}{K_0} + \eta\alpha - \xi\beta.$$

En dehors de l'aimant, la force magnétique α, β, γ se confond avec l'induction magnétique a, b, c, de sorte que la force qui agit sur l'électron a ses composantes proportionnelles à

$$X, Y, Z.$$

Pour l'équilibre on doit donc avoir à l'intérieur du conducteur

$$X = Y = Z = o,$$

d'où $V = \text{const.}$

Quant à la densité de l'électricité à la surface du conducteur, elle est proportionnelle à la variation brusque que subit, en traversant cette surface, la composante normale du déplacement électrique f, g, h. D'autre part α, β, γ ne subissent pas de variations brusques et ξ, η, ζ n'en subissent pas non plus, si l'on suppose, pour plus de simplicité, que la surface du conducteur ne coïncide pas avec la surface de séparation de deux parties en rotation relative.

La densité de l'électricité est donc proportionnelle à la variation brusque éprouvée par la composante normale de la force X, Y, Z. Elle est donc, comme dans l'électrostatique ordinaire, proportionnelle à $\frac{dV}{dn}$ (dérivée du potentiel estimée suivant la normale à la surface du conducteur du côté extérieur au conducteur).

Nous retombons sur les mêmes conditions que dans la théorie de Hertz.

Enfin à la surface de séparation de deux diélectriques de pouvoir diélectrique différent, une analyse plus compliquée nous conduirait encore à la relation (3).

En résumé, pour tout ce qui est accessible à l'expérience, la théorie de Lorentz conduit aux mêmes résultats que celle de Hertz.

7. Particularisons un peu nos hypothèses pour fixer nos idées. La partie fixe du système se composera d'un condensateur dont les deux armatures seront deux plateaux annulaires métalliques; le centre de chacun de ces deux anneaux se trouvera sur l'axe de révolution du système (cet axe sera regardé comme vertical).

J'appellerai D la distance des deux plateaux, R et r le rayon extérieur et le rayon intérieur des anneaux.

Ces deux armatures seront réunies par un fil métallique.

Entre les deux plateaux métalliques, se trouvera un plateau annulaire d'ébonite susceptible de tourner autour de l'axe du système. J'apellerai e l'épaisseur de ce plateau et je supposerai que les rayons extérieur et intérieur de l'anneau sont encore R et r. La lame isolante du condensateur se compose ainsi d'une épaisseur d'ébonite e et d'une épaisseur d'air $D - e$.

L'aimant sera de révolution et pourra rester immobile ou tourner autour de l'axe du système. L'aimant sera un barreau cylindrique dont une extrémité, le pôle N par exemple, s'engagera à moitié dans le trou qui est au centre des trois plateaux annulaires de façon que cette extrémité vienne à peu près à la hauteur du plan horizontal médian du plateau d'ébonite.

Imprimons au plateau d'ébonite une vitesse ω.

Considérons une droite verticale traversant la lame isolante du condensateur, coupant en A l'armature supérieure, en B la base supérieure du plateau tournant d'ébonite, en C la base inférieure de ce plateau, en E l'armature inférieure du condensateur.

La fonction V a même valeur en A et en E puisque les deux armatures sont reliées par un fil métallique ; elle subit un saut brusque δV_1 en B et un autre saut brusque $-\delta V_2$ en C. Partout ailleurs on a :

$$\frac{dV}{dz} = Z,$$

on a donc

$$\int_A^E Z dz = \delta V_2 - \delta V_1. \tag{4}$$

Si j'appelle ρ la densité de l'électricité au point A à la surface du condensateur, on aura en ce point

$$4\pi\rho = Z.$$

D'autre part, si les lignes de force électrique peuvent être considérées comme se réduisant à des droites verticales, et les tubes de force comme des cylindres, le flux d'induction électrique qui traverse les diverses sections droites de l'un de ces cylindres peut être regardé comme constant.

En un point quelconque de la droite AE, on aura donc dans l'air : $4\pi\rho = Z$, et dans l'ébonite : $4\pi\rho = \varepsilon Z$; ε étant le rapport du pouvoir diélectrique de l'ébonite à celui de l'air. L'équation (4) devient donc :

$$4\pi\rho\left(\frac{e}{\varepsilon} + D - e\right) = \delta V_2 - \delta V_1 .$$

Il est aisé de déduire de là la charge totale des armatures. Cette formule montre que la densité au point A est proportionnelle à $\delta V_2 - \delta V_1$, c'est-à-dire au flux d'induction magnétique qui traverse le cylindre de révolution dont le rayon est égal à la distance du point A à l'axe, ou plutôt la partie de ce cylindre qui est à l'intérieur du plateau d'ébonite.

On remarquera que ce flux d'induction magnétique diminuant rapidement quand le rayon du cylindre augmente, il n'y aura guère d'électricité que près du bord intérieur des anneaux.

8. Revenons alors à la question que nous nous étions posée ; les lignes de force tournent-elles ou ne tournent-elles pas avec l'aimant ?

Pour qu'on pût la résoudre, il faudrait que la règle des lignes de force appliquée dans une hypothèse donnât des résultats exacts et qu'elle en donnât d'inexacts dans l'hypothèse contraire.

Mais que veut-on dire quand on dit qu'on applique la règle des lignes de force à un circuit ouvert ? On sous-entend évidemment qu'on envisagera les lignes de force qui coupent la partie métallique du circuit, sans s'occuper de celles qui coupent la partie diélectrique, le diélectrique étant regardé comme inerte conformément aux idées des anciens électriciens.

Or il est clair, à ce compte, que la règle donnera des résultats inexacts dans l'une et l'autre hypothèse.

1° D'abord si l'on faisait tourner le plateau d'ébonite, en laissant l'aimant immobile, le condensateur se chargerait. Or d'après la règle des lignes de force, il ne devrait pas se charger, et cela dans aucune des deux hypothèses, puisque la partie métallique du circuit est fixe, et que l'aimant étant fixe, les lignes de force doivent dans les deux hypothèses être regardées comme fixes.

2° On pourrait presque dire que la charge prise par le condensateur ne dépend que de la rotation de l'ébonite et nullement de celle de l'aimant et qu'elle restera la même si l'aimant tourne et s'il ne tourne pas. Cela ne serait pas tout à fait vrai (car si l'aimant tourne, tout se passera comme si sa surface était recouverte d'une double couche fictive calculée comme je l'ai expliqué plus haut, et cette double couche chargera le condensateur par influence). Cela toutefois serait presque vrai (car la charge développée sur le condensateur par l'influence de la double couche fictive qui recouvre l'aimant serait, dans les conditions où nous nous sommes supposés placés, beaucoup plus petite que celle qui serait développée par l'influence de la double couche fictive qui recouvre l'ébonite) ; cela serait vrai en définitive dans la mesure où on a le droit de regarder les tubes de force électrique, entre les armatures du condensateur comme des cylindres à génératrices verticales.

3° Enfin la charge du condensateur dépend du pouvoir diélectrique des diverses parties du diélectrique et de leur vitesse de rotation. D'après la règle des lignes de force, quelle que soit l'hypothèse adoptée, elle n'en devrait pas dépendre.

Quelle sera donc notre conclusion ?

Un aimant en rotation entraîne-t-il avec lui ses lignes de force ?

Aussi bien dans le cas des circuits ouverts que dans le cas des circuits fermés, la question ne peut être résolue parce qu'elle n'a pas de sens.

H. Poincaré.

TRAMWAY ÉLECTRIQUE A CONTACTS SUPERFICIELS

(SYSTÈME PAUL)

Lorsque des raisons d'esthétique font proscrire l'emploi de la prise de courant aérienne pour une installation de tramways électriques, on doit faire un choix entre les systèmes à caniveau, à accumulateurs et à contacts superficiels.

L'application du système à caniveau entraîne des dépenses très élevées, qui ont, dans certains cas, dépassé 400 000 fr par kilomètre. On ne peut donc adopter cette solution que pour des lignes, sur lesquelles les recettes seront suffisantes pour assurer le service de l'intérêt et l'amortissement d'un capital considérable.

Les systèmes à accumulateurs ont donné lieu à des mécomptes et leur emploi est actuellement et paraît devoir demeurer restreint.

La solution la plus satisfaisante du problème posé sera donc, en général, l'adoption d'un système à contacts superficiels.

De nombreux systèmes de ce genre ont été proposés, mais un petit nombre ont été appliqués. L'un de ces derniers, le système Paul, a été appliqué par la Maison Schuckert (de Nuremberg) à l'une des lignes du réseau de tramways de Munich, où il fonctionne depuis plus d'un an et donne les meilleurs résultats.

Le courant est amené à des plots, installés au milieu de la voie et qui sont mis automatiquement sous tension au moment précis où ils sont couverts par la voiture et à ce moment-là seulement. La voiture porte une chaîne de Galle, suspendue à l'aide de ressorts, et permettant de capter le courant. La longueur de cette chaîne articulée dépend de la longueur des voitures employées et détermine l'écartement à donner aux plots. La distance de deux plots consécutifs doit être un peu inférieure à la longueur de l'appareil de prise de courant, afin que ce dernier puisse toucher simultanément ces deux plots. Dans les alignements droits la distance de deux plots consécutifs est de 4 mètres environ.

L'examen de la figure 1 permet de se rendre compte du principe de la distribution.

A chaque plot P correspond un appareil, dit « appareil directeur » et composé de deux électro-aimants A et B entre lesquels peut se déplacer une armature C, reliée au câble d'alimentation.

Supposons que la chaîne de prise de courant E soit en contact avec le plot P_2 actuellement électrisé et que le sens de marche soit celui de la flèche F.

Dès que la prise de courant atteindra le plot P_3, une dérivation du courant principal traversera les électro-aimants A_3 et B_2 et s'écoulera dans le sol en T_1. L'armature C_3, attirée par l'électro A_3, mettra le plot P_3 en relation avec le câble d'alimentation, tandis que le rappel de l'armature C_2 par l'électro B_2 aura pour effet d'isoler le plot P_2.

Sans entrer dans la description détaillée des appareils directeurs, il est essentiel de signaler qu'au moment où un courant passe dans un électro B, ce dernier, en même temps