

OBSERVATIONS AU SUJET DE L'ARTICLE PRÉCÉDENT;

PAR H. POINCARÉ.

1. On ne saurait prendre à la lettre l'affirmation de M. Seares que l'exactitude du résultat dépend bien plus de la fréquence des changements de signe des différences successives que de la valeur absolue de ces différences.

Soient $F(x)$ la fonction à interpoler, a_1, a_2, \dots, a_n , les valeurs pour lesquelles on calcule la fonction $F(a_1), F(a_2), \dots, F(a_n)$; nous remplaçons la fonction $F(x)$ par un polynôme du $n - 1^{\text{ième}}$ degré $P(x)$, en choisissant les coefficients de ce polynôme de telle façon que

$$P(a_i) = F(a_i).$$

Soit alors

$$\Phi(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n),$$

et soit k le maximum de la valeur absolue de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $F(x)$ dans l'intervalle considéré; l'erreur commise est plus petite que la valeur absolue de

$$\frac{k}{n!} \Phi(x).$$

L'erreur commise sur l'intégrale est donc plus petite que

$$\frac{k}{n!} \int |\Phi(x)| dx.$$

Mais ce résultat donnerait une idée très inexacte de la grandeur de l'erreur, qui peut être beaucoup plus petite. Il est clair que cette erreur peut être représentée par une intégrale de la forme

$$\int F^{(n)}(x) \Theta(x) dx,$$

où $F^{(n)}(x)$ représente la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $F(x)$ et où $\Theta(x)$ est une fonction qui ne dépend que des limites d'intégration et des valeurs a_1, a_2, \dots, a_n .

Pour déterminer cette fonction $\Theta(x)$, supposons que la fonction $F(x)$ soit définie de la façon suivante : 1° Elle devra s'annuler pour $x = a_i$; 2° elle sera continue ainsi que ses $n - 2$ premières

dérivées; 3° la dérivée $n - 1^{\text{ième}}$ sera continue également, sauf pour une valeur z de x comprise entre a_p et a_{p+1} ; en franchissant cette valeur, cette dérivée subira un saut brusque égal à 1, de telle façon que

$$F^{(n-1)}(z + \varepsilon) = F^{(n-1)}(z - \varepsilon) + 1.$$

4° La dérivée $n^{\text{ième}}$ sera nulle partout, sauf pour la valeur z , pour laquelle elle n'existe pas.

Dans ces conditions l'intégrale $\int F(x) dx$ [dont la valeur approchée déduite par interpolation des valeurs $F(a_1), F(a_2), \dots, F(a_n)$ serait évidemment nulle] ne sera autre chose que ce que nous appelons l'*erreur commise* et sera égale à $\Theta(z)$.

Déterminons donc la fonction $F(x)$ qui satisfait aux conditions précédentes. D'abord elle sera égale à un polynôme du $n - 1^{\text{ième}}$ degré pour $x < z$ et à un autre polynôme du $n - 1^{\text{ième}}$ degré pour $x > z$. Soient $Q_1(x)$ et $Q_2(x)$ ces deux polynômes. Soient

$$\begin{aligned}\Phi_1(x) &= (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_p), \\ \Phi_2(x) &= (x - a_{p+1})(x - a_{p+2}) \dots (x - a_n),\end{aligned}$$

d'où

$$\Phi(x) = \Phi_1(x) \Phi_2(x),$$

Q_1 devra être divisible par Φ_1 et Q_2 par Φ_2 ; soient

$$Q_1 = \Phi_1 P_1, \quad Q_2 = \Phi_2 P_2.$$

La différence $Q_2 - Q_1$ doit, pour $x = z$, s'annuler ainsi que ses $n - 2$ premières dérivées, tandis que la $n - 1^{\text{ième}}$ doit être égale à 1; on a donc

$$Q_2 - Q_1 = \frac{(x - z)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Cela suffit pour déterminer les deux polynômes; car

$$\frac{P_2}{\Phi_2} - \frac{P_1}{\Phi_1} = \frac{(x - z)^{n-1}}{(n-1)! \Phi}.$$

Décomposons le second membre en éléments simples

$$\frac{(x - z)^{n-1}}{(n-1)! \Phi} = \sum \frac{A_i}{x - a_i},$$

où

$$A_i = \frac{(a_i - z)^{n-1}}{(n-1)! \Phi'(a_i)},$$

de sorte que

$$Q_2 = \Phi \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\Lambda_i}{x - a_i}, \quad Q_1 = -\Phi \sum_{i=p+1}^{i=n} \frac{\Lambda_i}{x - a_i}.$$

Soient x_0 et x_1 les deux limites d'intégration, de telle sorte que

$$x_0 < a_1, \quad x_1 > a_n;$$

il viendra

$$\begin{aligned} \theta(z) = \int_{x_0}^z Q_1 dx + \int_z^{x_1} Q_2 dx = & - \sum_{i=p+1}^n \int_{x_0}^z \frac{\Phi dx}{(n-1)!} \frac{(a_i - z)^{n-1}}{\Phi'(a_i)(x - a_i)} \\ & + \sum_{i=1}^p \int_z^{x_1} \frac{\Phi dx}{(n-1)!} \frac{(a_i - z)^{n-1}}{\Phi'(a_i)(x - a_i)}, \end{aligned}$$

ou

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta(z) = & \sum_{i=1}^p \int_{x_0}^{x_1} \frac{\Phi dx}{(n-1)!} \frac{(a_i - z)^{n-1}}{\Phi'(a_i)(x - a_i)} \\ & - \sum_{i=1}^{i=n} \int_{x_0}^z \frac{\Phi dx}{(n-1)!} \frac{(a_i - z)^{n-1}}{\Phi'(a_i)(x - a_i)}. \end{aligned} \right.$$

On voit que dans le premier terme la sommation doit être étendue à toutes les valeurs de a_i plus petites que z , et, dans le second, à toutes les valeurs de a_i sans exception.

Rappelons que, pour une fonction $F(x)$ quelconque, la formule d'interpolation nous donne

$$\frac{F(x)}{\Phi(x)} = \sum \frac{F(a_i)}{(x - a_i)\Phi'(a_i)},$$

de sorte que la valeur approchée de l'intégrale s'écrira

$$\int_{x_0}^{x_1} F dx = \int_{x_0}^{x_1} \sum \frac{F(a_i)\Phi dx}{(x - a_i)\Phi'(a_i)},$$

ce qui, en posant

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\Phi dx}{(x - a_i)\Phi'(a_i)} = B_i,$$

s'écrit tout simplement

$$(2) \quad \int_{x_0}^{x_1} F(x) dx = \sum B_i F(a_i).$$

C'est la formule ordinaire des quadratures mécaniques.

Le premier terme de la formule (1) s'écrit alors

$$\sum_{i=1}^p B_i \frac{(a_i - z)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Quant au second, il peut s'écrire

$$-\int_{x_0}^z \frac{\Phi dx}{(n-1)!} \frac{(x-z)^{n-1}}{\Phi} = \frac{(x_0 - z)^n}{n!}.$$

On a donc finalement

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta(z) = \frac{B_1}{(n-1)!} (a_1 - z)^{n-1} + \frac{B_2}{(n-1)!} (a_2 - z)^{n-1} + \dots \\ \quad + \frac{B_p}{(n-1)!} (a_p - z)^{n-1} + \frac{(x_0 - z)^n}{n!} \end{array} \right.$$

pour les valeurs de z comprises entre a_p et a_{p+1} .

Nous voyons que, dans chaque intervalle, $\Theta(z)$ est un polynôme d'ordre n en z , mais que ce n'est pas le même polynôme dans les différents intervalles.

Quand z franchit la valeur a_{p+1} , il faut ajouter au second membre de (3) un terme complémentaire

$$\frac{B_{p+1}}{(n-1)!} (a_{p+1} - z)^{n-1}.$$

Comme ce terme complémentaire s'annule ainsi que ses $n-2$ premières dérivées, nous devons conclure que $\Theta(z)$ est continue ainsi que ses $n-2$ premières dérivées. Au contraire, la dérivée $n-1$ est discontinue et subit un saut brusque

$$(-1)^{n-1} B_i$$

quand z franchit la valeur a_i .

Dans l'intervalle $x_0 a_1$, $\Theta(z)$ se réduit à $\frac{(x_0 - z)^n}{n!}$ et dans l'intervalle $a_n x_1$ à

$$\sum_{i=1}^{i=n} B_i \frac{(a_i - z)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(x_0 - z)^n}{n!} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(x_0 - z)^n}{n!} = \frac{(x_1 - z)^n}{n!}.$$

La dérivée $(n-1)^{\text{ième}}$ de $\Theta(z)$ s'annule donc aux deux limites pour $z = x_0$ et pour $z = x_1$. On se l'expliquera si l'on observe que la dérivée $n^{\text{ième}}$ est, dans cet intervalle, constante et égale

à $(-1)^n$; l'accroissement total de la dérivée $(n-1)^{\text{ième}}$ serait donc

$$(-1)^n(x_1 - x_0)$$

si cette dérivée était continue. Mais à cause des sauts brusques qu'elle subit, cet accroissement sera

$$(-1)^n(x_1 - x_0) + (-1)^{n-1} \Sigma B_i,$$

c'est-à-dire zéro, puisque

$$\Sigma B_i = x_1 - x_0.$$

La fonction $\Theta(z)$ s'annule aux deux limites ainsi que ses $n-1$ premières dérivées; si elle s'annule en outre h fois dans l'intervalle, sa dérivée $p^{\text{ième}}$ ($p < n$) s'annulera $p+h$ fois, et en particulier la dérivée $n-1^{\text{ième}}$ s'annulera $n+h-1$ fois; or, on voit sans peine que cette dérivée s'annule au plus $2n-1$ fois; à savoir une fois au plus dans chaque intervalle $a_i a_{i+1}$, une fois au plus en chacun des points a_i . Donc $\Theta(z)$ s'annule au plus n fois.

Il suit de là que si $F^{(n)}(x)$ est plus petit en valeur absolue que M_n , l'erreur commise sera plus petite que

$$M_n \int_{x_0}^{x_1} |\Theta(x)| dx.$$

Dans cette formule intervient uniquement la limite supérieure de $|F^{(n)}(x)|$ et nullement la fréquence des changements de signe de cette dérivée.

L'assertion de M. Seares n'aurait donc aucun sens si l'on devait se borner à la limite donnée par cette formule. Mais il y a des cas où l'on peut la remplacer par une limite à peu près moitié moindre.

Supposons, en effet, que $F^{(n)}(x)$ demeure toujours positive; l'erreur serait plus petite que

$$M_n \int H(x) dx,$$

$H(x)$ étant une fonction qui serait égale à $\Theta(x)$ quand $\Theta(x)$ est positif et à zéro quand $\Theta(x)$ est négatif.

Remarquons que, si $F^{(n)}(x)$ est une constante, la valeur de l'er-

reur est

$$M_n \int \Theta(x) dx$$

et que si $\Theta(x)$ change fréquemment de signe, cette intégrale $\int \Theta(x) dx$ peut être beaucoup plus petite que $\int |\Theta(x)| dx$.

Si $\Theta(x)$ était constamment positif, l'erreur

$$\int F^{(n)}(x) \Theta(x) dx$$

serait plus grande si $F^{(n)}(x)$ était constamment positif que si $F^{(n)}(x)$, conservant d'ailleurs la même valeur absolue, était tantôt positif, tantôt négatif; cela serait directement contraire à l'assertion de M. Seares.

Si au contraire $\Theta(x)$ change de signe, l'erreur sera plus grande si $F^{(n)}(x)$ change de signe en même temps que $\Theta(x)$ ou à peu près en même temps que $\Theta(x)$, que si $F^{(n)}(x)$, tout en conservant la même valeur absolue, reste constamment positif, ou change de signe indépendamment de $\Theta(x)$. Voilà dans quelle mesure l'assertion de M. Seares est exacte.

Soit d'abord

$$F^{(n)}(x) = a(x)$$

et soit A l'erreur correspondante; supposons que $a(x)$ change fréquemment de signe.

Soit maintenant B l'erreur qui correspond à l'hypothèse

$$F^{(n)}(x) = b(x),$$

et C l'erreur qui correspond à l'hypothèse

$$F^{(n)}(x) = c(x).$$

Nous pouvons supposer que $c(x)$ est une constante égale à la plus petite valeur de $a(x)$ et que

$$b(x) = a(x) - c(x).$$

Alors la plus grande valeur absolue de $b(x)$ sera au plus le double de la plus grande valeur absolue de $a(x)$, et $b(x)$ sera constamment positif. On aura d'ailleurs

$$B = A - C;$$

il est donc impossible que $|B|$ et $|C|$ soient tous deux beaucoup plus petits que $|A|$; et c'est pourtant ce qui devrait être si l'assertion de M. Seares devait être prise à la lettre, puisque les valeurs absolues de $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont du même ordre de grandeur et que $a(x)$ change fréquemment de signe, tandis que $b(x)$ et $c(x)$ n'en changent pas.

Ce que M. Seares aurait dû dire, et ce qu'il a évidemment voulu dire, c'est que, pour une même valeur du maximum M_n , l'erreur sera plus grande si $F^{(n)}(x)$ subit de fortes variations que si $F^{(n)}(x)$ est sensiblement constant.

Elle ne dépendra donc pas seulement de M_n , mais de M_{n+1} , M_{n+2} , ...

C'est ce dont on se rendra compte d'une façon plus précise de la manière suivante :

Soient

$$\begin{aligned}\theta_1(x) &= \int_{x_0}^x \theta(x) dx, & \theta_2(x) &= \int_{x_0}^x \theta_1(x) dx, \\ \theta_3(x) &= \int_{x_0}^x \theta_2(x) dx, & \dots &\end{aligned}$$

Si les intervalles sont petits et si $\theta(x)$ change fréquemment de signe, $\theta_1(x_1)$ sera plus petit que $\int |\theta| dx$, $\theta_1(x)$ sera notablement plus petit que $\theta(x)$, θ_2 plus petit que θ_1 , ...

Et l'intégration par parties nous donne aisément pour l'erreur cherchée

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} F^{(n)}(x)\theta(x) dx &= F^{(n)}(x_1)\theta_1(x_1) - F^{(n+1)}(x_1)\theta_2(x_1) + \dots \\ &\pm F^{(n+p)}(x_1)\theta_{p+1}(x_1) \mp \int F^{(n+p+1)}(x)\theta_{p+1}(x) dx,\end{aligned}$$

de sorte que la limite supérieure de cette erreur sera

$$M_n|\theta_1(x_1)| + M_{n+1}|\theta_2(x_1)| + \dots + M_{n+p}|\theta_{p+1}(x_1)| + M_{n+p+1} \int |\theta_{p+1}| dx$$

dépendant à la fois de M_n , M_{n+1} , ..., M_{n+p+1} .

2. De tout cela résulte que la limite de l'erreur dépend de la valeur absolue de la dérivée $n^{\text{ième}}$ et des dérivées d'ordre supérieur.

Supposons donc que nous ayons une valeur approchée F_0 de F et soit

$$F(x) = F_0(x) + R(x),$$

$R(x)$ étant très petit. Alors

$$\int F dx = \int F_0 dx + \int R dx.$$

Supposons que l'on puisse calculer exactement $\int F_0 dx$, mais qu'il faille calculer $\int R dx$ par quadratures mécaniques. Dans quels cas aura-t-on avantage à se servir de ce détour au lieu de calculer directement $\int F dx$ par quadratures mécaniques?

Soient M_n la plus grande valeur absolue de la dérivée $F^{(n)}(x)$ et N_n la plus grande valeur absolue de la dérivée $R^{(n)}(x)$.

Si le nombre des intervalles employé dans les quadratures mécaniques est $n - 1$, on pourrait croire qu'il suffit (pour que le détour soit avantageux) que N_n soit beaucoup plus petit que M_n et qu'il n'est pas nécessaire que N_{n+1} soit aussi beaucoup plus petit que M_{n+1} , N_{n+2} plus petit que M_{n+2} , etc.

C'est ce qui serait vrai si l'on n'avait à envisager, comme limite supérieure de l'erreur, que

$$M_n \int |\theta| dx.$$

Cela ne sera plus vrai s'il y a lieu d'envisager une autre des limites que nous avons trouvées à la fin du paragraphe précédent.

Soit donc

$$Q_{p+1} = M_n |\theta_1(x_1)| + M_{n+1} |\theta_2(x_1)| + \dots \\ + M_{n+p} |\theta_{p+1}(x_1)| + M_{n+p+1} \int |\theta_{p+1}| dx,$$

de telle sorte que

$$Q_0 = M_n \int |\theta| dx.$$

Alors l'erreur commise dans le calcul direct de $\int F dx$, par quadratures mécaniques sera plus petite à la fois que Q_0 , que Q_1 , que Q_2 , etc.

Désignons par Q'_{p+1} une expression analogue à Q_{p+1} , mais où

les M_q sont remplacés par les N_q . Alors l'erreur commise dans le calcul de $\int R dx$ (et, par conséquent, dans le calcul indirect de $\int F dx$) sera plus petite à la fois que Q'_0 , que Q'_1 , que Q'_2, \dots

Soit alors Q_p la plus petite des quantités Q_0, Q_1, Q_2, \dots . Si Q'_p est beaucoup plus petit que Q_p , il y aura avantage à employer le calcul indirect.

Or, c'est ce qui arrivera certainement si N_n est très petit devant M_n , N_{n+1} devant M_{n+1} , ... et enfin N_{n+p} devant M_{n+p} .

Mais cela pourrait ne plus être vrai, bien que N_n fût négligeable devant M_n , si N_{n+p} était comparable à M_{n+p} .

Ainsi, pour que le calcul indirect soit avantageux, il ne suffit pas toujours que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de R soit négligeable devant la dérivée de même ordre de F ; il faut encore quelquefois qu'il en soit de même pour quelques-unes des dérivées d'ordre supérieur.

L'article de M. Seares est de nature à attirer notre attention sur ce fait, et c'est ce qui en fait la véritable portée.

Supposons que, dans les divers cercles de rayon ρ et ayant pour centres les différents points du chemin d'intégration, la fonction $F(x)$ soit holomorphe et plus petite que μ en valeur absolue. Alors on aura comme on sait :

$$M_n < \frac{\mu n!}{\rho^n}.$$

La fonction F_0 diffère par hypothèse très peu de F , mais deux cas sont à distinguer. Ou bien F_0 présente les mêmes singularités que F , de telle façon que la différence $F - F_0 = R$ ne possède plus les points singuliers de F , ou du moins ceux de ces points qui sont le plus rapprochés du chemin d'intégration.

Dans ces conditions les cercles de convergence ayant leurs centres sur le chemin d'intégration auront un rayon plus grand pour la fonction R que pour la fonction F . Nous pourrions admettre qu'à l'intérieur des cercles de rayon ρ' , la fonction R est plus petite que μ , (ρ' étant notablement plus grand que ρ). On aura alors :

$$N_n < \frac{\mu n!}{\rho'^n}.$$

On voit qu'alors N_n est beaucoup plus petit que M_n , et cela quel

que soit n , et même le rapport de N_n à M_n sera d'autant plus petit que n sera plus grand.

On n'a pas alors de mécompte à craindre dans l'application de la méthode indirecte.

Supposons maintenant que F_0 n'ait pas les mêmes singularités que F , mais ait seulement à *peu près* les mêmes singularités; qu'en particulier, les points singuliers ne soient pas exactement les mêmes pour les deux fonctions, mais seulement à *peu près* les mêmes. Alors la différence $F - F_0 = R$ admettra à la fois tous les points singuliers de F et tous ceux de F_0 .

Les dérivées d'ordre très élevé de R seront alors à *peu près* égales aux dérivées d'ordre très élevé de F (ou à celles de F_0 , qui seront plus grandes encore) en vertu des théorèmes de M. Darboux sur les fonctions de très grands nombres.

Si F_0 a été choisi très voisin de F , et de telle façon que les points singuliers diffèrent très peu, il pourra se faire que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de R soit beaucoup plus petite que celle de F et qu'il en soit encore de même pour la dérivée $n + 1^{\text{ième}}$ et pour quelques-unes des dérivées suivantes. Mais à partir d'un certain ordre, cela ne sera plus vrai, de sorte que si, en vertu des considérations que je viens d'exposer, l'erreur commise dans l'intégration dépendait moins des valeurs des dérivées $n^{\text{ième}}$ que de celles des dérivées $n + p^{\text{ième}}$, il pourrait se faire que l'avantage offert par la méthode indirecte devînt illusoire.

Dans ce cas donc une discussion plus approfondie est nécessaire pour reconnaître si F_0 est suffisamment approché de F .

3. C'est évidemment à une circonstance de ce genre qu'est dû l'insuccès de M. Seares. Peut-être vaudrait-il mieux modifier la méthode comme il suit :

Il s'agit, on s'en souvient, d'évaluer des intégrales de la forme

$$\int \frac{G(u) du}{\sqrt{F(u)}};$$

les $G(u)$ sont des fonctions entières; $F(u)$ est le carré de la distance de la planète et de la comète; u est l'anomalie excentrique de la comète; u_0 est la valeur de cette anomalie qui correspond au minimum de $F(u)$.

La méthode ordinaire consiste à remplacer la fonction sous le signe \int

$$\frac{G(u)}{\sqrt{F(u)}},$$

par un polynome entier $\Pi(u)$ du $n - 1^{\text{ième}}$ degré qui en diffère très peu.

La méthode proposée consiste à poser

$$\frac{G(u)}{\sqrt{F(u)}} = \frac{Q(u)}{\sqrt{P(u)}} + R(u),$$

$P(u)$ étant un polynome du quatrième degré différant peu de F et Q un polynome différant peu de G , et à intégrer ensuite R par quadratures mécaniques, c'est-à-dire à remplacer R par un polynome Π' du $n - 1^{\text{ième}}$ degré qui en diffère extrêmement peu.

Il est évident que le résidu R , laissé par M. Seares, n'était pas assez petit pour que la méthode fût avantageuse; il l'aurait été assez sans doute si les zéros de $P(u)$ avaient été exactement ceux de $F(u)$; mais cette coïncidence exacte était impossible à réaliser, de sorte que toutes les observations que je viens de faire dans le paragraphe précédent trouvaient leur application.

Je propose donc de modifier la méthode comme il suit : On ne laissera aucun résidu R à intégrer après coup et l'on s'efforcera de représenter la fonction sous le signe \int par une expression de la forme

$$(1) \quad \frac{Q(u)}{\sqrt{P(u)}},$$

qui en diffère très peu, P étant un polynome du quatrième degré et Q un polynome du $n - 1^{\text{ième}}$ degré.

Que la fonction

$$\frac{G(u)}{\sqrt{F(u)}}$$

puisse être beaucoup mieux représentée par une expression de la forme (1) que par un polynome Π du $n - 1^{\text{ième}}$ degré, c'est ce qui n'est pas douteux.

L'intégration de l'expression (1) ne présente pas non plus de

difficulté. On peut la ramener par un calcul simple à la recherche des deux intégrales elliptiques de première et de seconde espèce.

On pourrait d'ailleurs construire des Tables qui faciliteraient ce calcul.

4. Mais la difficulté commence quand il s'agit de déterminer les polynômes P et Q, et d'abord pour P.

Considérons l'équation

$$F(u) = 0.$$

Elle n'aura que des racines imaginaires. Soient

$$u_0 + \lambda_1, \quad u_0 + \lambda'_1; \quad u_0 + \lambda_2, \quad u_0 + \lambda'_2; \quad u_0 + \lambda_3, \quad u_0 + \lambda'_3; \quad \dots$$

Elles sont rangées par paires de racines imaginaires conjuguées; et dans l'ordre des modules croissants des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$

Nous prendrons alors

$$P(u) = (u - u_0 - \lambda_1)(u - u_0 - \lambda'_1)(u - u_0 - \lambda_2)(u - u_0 - \lambda'_2).$$

La dérivée $n^{\text{ième}}$ de

$$\frac{G(u)}{\sqrt{F(u)}}$$

sera alors du même ordre de grandeur que

$$\frac{n!}{|\lambda_1|^n},$$

celle de

$$\psi(u) = \frac{G(u)\sqrt{P(u)}}{\sqrt{F(u)}}$$

sera du même ordre de grandeur que

$$\frac{n!}{|\lambda_3|^n}.$$

Leur rapport sera donc très petit et du même ordre que $\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right|^n$ et cela quel que soit n .

Si donc on connaissait exactement les racines de $F(u) = 0$, l'approximation par la méthode indirecte serait, pour un même nombre d'intervalles, à peu près $\left|\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right|^n$ fois plus grande que par la méthode directe.

Bien qu'on ne connaisse pas ces racines exactement, il n'en est pas moins certain que l'on peut choisir $P(u)$ de façon que l'approximation pour un même nombre d'intervalles soit beaucoup plus grande que par la méthode directe.

On pourrait, par exemple, déterminer les coefficients de $P(u)$ de telle façon que les dérivées d'ordre $n, n+1, n+2, n+3$ de

$$\psi(u) = \frac{G(u)\sqrt{P(u)}}{\sqrt{F(u)}}$$

s'annulent pour $u = u_0$. On serait assuré alors que ces dérivées, qui sont celles dont dépend surtout l'approximation, ne deviennent jamais très grandes et que, par conséquent, l'erreur commise reste petite.

Mais il serait plus simple, et cela reviendrait à peu près au même, d'annuler, pour $u = u_0$, les dérivées d'ordre $n, n+1, n+2, n+3$ de

$$\frac{P(u)}{F(u)}.$$

Le polynome $P(u)$ une fois déterminé, on calculera $Q(u)$ à l'aide de n valeurs particulières de la fonction

$$\psi(u) = \frac{G(u)\sqrt{P(u)}}{\sqrt{F(u)}},$$

pour n valeurs

$$u = a_1, \quad u = a_2, \quad \dots, \quad u = a_n,$$

réparties d'une manière quelconque sur le chemin d'intégration.

5. Tout cela n'est qu'un aperçu qui pourra sans doute être utile à celui qui entreprendra une discussion méthodique. Cette discussion devrait nous permettre de reconnaître comment variera l'approximation finale sur laquelle on pourra compter en fonction du nombre $n-1$ des intervalles et de l'approximation avec laquelle on aura calculé les coefficients de $P(u)$; on déterminerait ainsi quelles sont les conditions pour que l'emploi de la méthode indirecte soit avantageux.

Il faudrait également voir comment devrait être dirigée la construction des Tables auxiliaires destinées à rendre le procédé

pratique. Je me bornerai à dire que cette construction serait grandement facilitée, si l'on se bornait à introduire des intégrales circulaires au lieu d'intégrales elliptiques et des polynomes du deuxième degré au lieu du quatrième.

Mais M. Seares a encore rencontré une autre difficulté. Nous n'avons envisagé jusqu'ici que les perturbations du premier ordre qui sont données par des intégrales simples de la forme

$$(1) \quad \int \frac{G du}{\sqrt{F}}.$$

Mais justement dans les cas où l'emploi de la méthode indirecte serait indiqué, c'est-à-dire quand la comète passe très près de la planète troublante, les perturbations du deuxième ordre deviennent sensibles.

Pour en tenir compte, M. Seares fait ce que l'on fait d'ordinaire, c'est-à-dire qu'à la fin de chaque intervalle, il corrige les éléments de la comète des perturbations du premier ordre. On conçoit que, dans ces conditions, les avantages de la méthode indirecte s'évanouissent.

Il faudrait calculer d'abord, pour tout le champ d'intégration, les intégrales simples (1) sans se soucier des perturbations du deuxième ordre, et y ajouter ensuite des termes correctifs destinés à tenir compte de ces perturbations.

L'expression analytique des perturbations du deuxième ordre ne se réduit plus à une intégrale simple telle que (1), mais à des intégrales doubles de la forme

$$(2) \quad \int \frac{G}{\sqrt{F}} \left(\int \frac{G' du}{\sqrt{F}} \right) du.$$

Si l'on considère $P(u)$ comme donné, les intégrales (1) seront des polynomes du premier degré par rapport aux n valeurs particulières de $\psi(u)$,

$$(3) \quad [\psi(a_1), \psi(a_2), \dots, \psi(a_n),$$

et ce sont précisément les coefficients de ces polynomes qui devraient être donnés par des Tables. De même, les intégrales (2) seront des polynomes du deuxième degré par rapport à ces mêmes

quantités, et les coefficients de ces polynomes pourraient également être donnés par des Tables.

Je me borne à ces considérations sommaires, quitte à revenir plus tard sur ce sujet à une autre occasion.

ÉPHÉMÉRIDE DE LA PLANÈTE (172) BAUCIS,

LIEUX MOYENS 1901,0-1902,0 (minuit moyen de Paris);

PAR M. LOUIS FABRY.

Les éléments ont été tirés du *Jahrbuch* pour 1903.

Dates.	R.	Q.	log Δ.	log r.
1901.	h m s	°		
Nov. 7.....	5.37.3	+38.36,7	0,1978	0,3803
9.....	35.46	43,5	0,1942	0,3807
11.....	34.20	49,8	0,1908	0,3811
13.....	32.44	+38.55,6	0,1876	0,3815
15.....	31. 1	+39. 0,8	0,1846	0,3820
17.....	29.10	5,3	0,1818	0,3825
19.....	27.10	9,1	0,1793	0,3829
21.....	25. 4	12,1	0,1771	0,3834
23.....	22.51	14,2	0,1751	0,3838
25.....	20.32	15,4	0,1734	0,3842
27.....	18. 8	15,6	0,1720	0,3847
29.....	15.39	15,0	0,1709	0,3851
Déc. 1.....	13. 6	13,4	0,1700	0,3855
3.....	10.31	10,8	0,1694	0,3860
5.....	7.54	7,2	0,1692	0,3864
7.....	5.16	+39. 2,7	0,1693	0,3868
9.....	2.38	+38.57,2	0,1697	0,3873
11.....	5. 0. 1	50,7	0,1704	0,3877
13.....	4.57.26	43,3	0,1715	0,3881
15.....	54.54	35,0	0,1729	0,3886
17.....	52.25	26,0	0,1746	0,3890
19.....	50. 2	16,4	0,1766	0,3894
21.....	47.42	+38. 6,0	0,1789	0,3899
23.....	45.28	+37.54,8	0,1815	0,3903
25.....	43.23	43,1	0,1844	0,3907
27.....	41.23	30,8	0,1875	0,3911
29.....	39.31	18,3	0,1909	0,3915
31.....	4.37.47	+37. 5,3	0,1945	0,3919