

1^{re} Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ZAREMBA. — SUR L'ÉQUATION $\Delta u + \xi u = 0$. (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1902.)

Dans un grand nombre de questions de Physique mathématique, au premier abord très différentes, on est conduit à des problèmes tels que celui-ci : déterminer une fonction u qui à l'intérieur d'un domaine D satisfasse à l'équation

$$\Delta u + \xi u = \varphi$$

(ξ est une constante donnée, φ une fonction donnée) et qui sur la surface S qui limite ce domaine satisfasse à des conditions aux limites telles que celles-ci

$$u = \psi,$$

ou

$$\frac{du}{dn} = \psi,$$

ou

$$u = h \frac{du}{dn}$$

(h étant une constante donnée, ou ψ une fonction donnée).

Tous ces problèmes sont étroitement apparentés les uns avec les autres. Dans le cas où φ et ξ sont nuls et où la condition aux limites est

$$u = \psi,$$

on retombe sur le célèbre problème de Dirichlet.

La plupart des méthodes proposées pour l'étude de ce problème sont moins des solutions que des démonstrations de la possibilité d'une solution. Il n'y a d'exception que pour la méthode de Neumann, qui conduit à un développement relativement simple. Mais, sous sa forme primitive, elle ne paraissait applicable qu'aux surfaces convexes, et l'on pouvait croire que cette restriction tenait à la nature même des choses.

Il y a quelques années, j'ai abordé le problème des vibrations
Bull. des Sciences mathém., 2^e série, t. XXVI. (Décembre 1902.) 23

d'une membrane, problème caractérisé par les équations

$$\begin{aligned}\Delta u + \xi u &= \varphi & (\text{dans le domaine } D), \\ u &= 0 & (\text{sur la surface } S).\end{aligned}$$

En me servant d'une ingénieuse idée due à M. Schwarz, et en usant de différents autres artifices analytiques je suis arrivé à une solution complète du problème. Le fait saillant était le suivant : si φ est une fonction donnée, et si l'on fait varier le paramètre ξ , la fonction u est une fonction *méromorphe* de ξ dans tout le plan, et les pôles de cette fonction correspondent aux diverses vibrations propres de la membrane.

La même méthode était évidemment applicable, avec quelques modifications, à tous les problèmes analogues; j'ai donc cherché à l'appliquer à l'étude de la méthode de Neumann. J'ai généralisé le problème posé, de façon à introduire dans l'énoncé un paramètre arbitraire λ . La solution était encore une fonction méromorphe de λ , et l'étude de cette fonction méromorphe m'avait conduit à cette conclusion que la méthode de Neumann devenait légitime, *alors même que la surface envisagée n'était pas convexe*.

Ma démonstration avait encore néanmoins deux défauts :

- 1° Elle ne s'appliquait qu'aux surfaces *simplement connexes*.
- 2° Elle exigeait qu'on eût démontré préalablement le « principe de Dirichlet », c'est-à-dire la possibilité du problème (pour cela, il est vrai, les méthodes ne manquaient pas).

On pouvait prévoir cependant que ces restrictions n'étaient qu'artificielles et que d'autres chercheurs arriveraient à s'en affranchir.

Le problème de Dirichlet

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 & (\text{dans } D), \\ u &= \psi & (\text{sur } S)\end{aligned}$$

est intimement lié au suivant

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 & (\text{dans } D), \\ \frac{du}{dn} &= \psi & (\text{sur } S).\end{aligned}$$

Il est aisé de passer de la solution de l'un à celle de l'autre,

pourvu que cette solution ait été obtenue par la méthode de Neumann. C'est ce que Neumann avait fort bien vu.

Il est d'ailleurs possible de traiter le second de ces problèmes directement par une méthode analogue à celle de Neumann; c'est ce qu'a fait le regretté Robin, qui s'est servi d'un processus qui rappelle tout à fait celui de Neumann, mais où il fait jouer aux potentiels de simple couche le même rôle que le géomètre allemand attribuait aux potentiels de double couche.

Je reviendrai d'ailleurs avec plus de détails sur ces deux méthodes et sur leurs rapports mutuels, en analysant le Mémoire de M. Zaremba.

De la solution du problème de Dirichlet il est plus facile encore de déduire celle d'autres problèmes tels que celui-ci :

$$\begin{aligned} \Delta u &= \varphi && \text{(dans } D), \\ u &= \psi && \text{(sur } S). \end{aligned}$$

Jusqu'ici nous avons supposé $\xi = 0$. Mais le problème plus général

$$(A) \quad \begin{cases} \Delta u + \xi u = \varphi & \text{(dans } D), \\ u \left(\text{ou } \frac{du}{dn} \right) = \psi & \text{(sur } S) \end{cases}$$

peut aussi être résolu quand on sait résoudre ceux dont nous venons de parler. Il suffit de faire une nouvelle application de la même méthode générale et de considérer u comme une fonction de ξ . On voit ainsi que cette fonction est encore méromorphe. On a alors à envisager le développement de cette fonction suivant les puissances croissantes de ξ . Pour calculer chacun des termes de ce développement il faut résoudre un problème de Dirichlet, ou un problème analogue, ce qui peut se faire, comme nous venons de le voir, par la méthode de Neumann et celle de Robin.

La solution du problème (A) se présente ainsi sous une forme fort compliquée, sous la forme d'une série double procédant d'une part suivant les puissances de ξ , de l'autre suivant celles du paramètre auxiliaire de la méthode de Neumann.

Ces considérations historiques étaient nécessaires pour faire comprendre quel était l'état de la question il y a quelques années et les progrès que devaient accomplir les chercheurs qui l'ont

abordée de nouveau dans ces derniers temps. Les principaux de ces chercheurs sont MM. Le Roy, Stekloff, Korn et Zaremba.

Arrivons maintenant à l'analyse du Mémoire de M. Zaremba. Un premier point caractéristique est le suivant. L'auteur aborde *directement* le problème

$$(A) \quad \begin{cases} \Delta u + \xi u = \varphi, \\ u \left(\text{ou } \frac{du}{dn} \right) = \psi. \end{cases}$$

Il a remarqué, en effet, que les méthodes de Neumann et de Robin, convenablement généralisées, peuvent nous fournir une solution immédiate de ce problème (A). Il suffit de substituer aux potentiels newtoniens, employés par Neumann et Robin, des *potentiels généralisés* pour lesquels l'attraction, au lieu de suivre la loi de Newton, varie comme la dérivée de la fonction

$$\frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (\text{où } \xi = -\mu^2, \mu > 0).$$

Le potentiel d'une masse 1 n'est plus alors $\frac{1}{r}$, mais $\frac{e^{-\mu r}}{r}$, où r désigne la distance du point attiré au point attirant.

Il est clair qu'un potentiel généralisé satisfera à l'équation

$$\Delta u - \mu^2 u = 0$$

qui remplacera l'équation de Laplace.

Remarquons, en passant, que ces potentiels généralisés ont été introduits pour la première fois par Kirchhoff, sous une forme un peu différente, dans sa théorie de la diffraction. M. C. Neumann en a fait usage, en 1896, pour étendre sa théorie au problème qui nous occupe, mais toujours en se bornant aux surfaces convexes.

En s'en servant à son tour, M. Zaremba réalisait un notable progrès, la solution du problème (A) ne se présentait plus sous la forme d'une série double, mais sous celle d'une série simple, ce qui était une sensible simplification. De plus, non seulement le problème (A) n'était pas plus difficile que celui de Dirichlet, mais, comme nous le verrons, on pouvait profiter de la possibilité de donner différentes valeurs au nombre $\xi = -\mu^2$, pour simplifier certains points de la démonstration.

D'un autre côté, M. Zaremba, au lieu de commencer par traiter le problème ($u = \psi$) par l'emploi de la méthode de Neumann et des potentiels de double couche, et d'en déduire celle du problème ($\frac{du}{dn} = \psi$), préfère suivre la marche inverse. C'est donc le problème ($\frac{du}{dn} = \psi$) qu'il résout d'abord par la méthode de Robin et les potentiels de simple couche.

Soient donc une surface fermée S , D le domaine intérieur, et D' le domaine extérieur à cette surface. Voici les hypothèses que fait M. Zaremba sur S :

- 1° Elle a un plan tangent en chaque point;
- 2° L'angle de deux normales est plus petit que le produit d'une constante par la distance des pieds de ces normales;
- 3° Si O est un point de la surface et S' l'ensemble des points de S dont la distance à O est inférieure à une certaine limite, une parallèle à la normale en O rencontrera S' en un point au plus.

Le problème à résoudre est le suivant : trouver une fonction u satisfaisant aux conditions

$$(B) \quad \begin{cases} \left(\frac{du}{dN}\right)_e - \left(\frac{du}{dN}\right)_i = \lambda \left[\left(\frac{du}{dN}\right)_e + \left(\frac{du}{dN}\right)_i \right] + 2\varphi & (\text{sur } S), \\ \Delta u - \mu^2 u = 0 & (\text{dans } D \text{ et } D'), \end{cases}$$

et qui, en outre, bien entendu, se comporte régulièrement à l'infini.

On désigne par $\left(\frac{du}{dN}\right)_e$ et par $\left(\frac{du}{dN}\right)_i$ les dérivées de u prises, suivant la normale à la surface S , la première du côté externe, la seconde du côté interne.

On voit que, pour $\lambda = +1$, l'équation se réduit à

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_i = -\varphi,$$

de sorte qu'on est ramené au problème ($\frac{du}{dn} = \psi$) pour le domaine intérieur D , tandis que, pour $\lambda = -1$, l'équation se réduit à

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_e = \varphi,$$

de sorte qu'on est ramené au problème $\left(\frac{du}{dn} = \psi\right)$ pour le domaine extérieur D' .

M. Zaremba développe la solution, suivant les puissances de λ , sous la forme

$$(1) \quad u = \sum u_k \lambda^k,$$

et il envisage, en outre, d'autres séries auxiliaires; posant

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \varphi, \\ 2\sigma_k &= \left(\frac{du_{k-1}}{dN}\right)_e + \left(\frac{du_{k-1}}{dN}\right)_i, \end{aligned}$$

il forme la série

$$(2) \quad 2\pi\sigma = \sum \sigma_k \lambda^k.$$

On voit immédiatement que u_k est un potentiel généralisé de simple couche ayant pour densité σ_k , de sorte que chacun des termes de la série (1) s'obtiendra à l'aide d'un potentiel généralisé dont la densité ne dépendra que des termes précédents de la série.

Il forme ensuite les intégrales

$$\begin{aligned} I_{2k} &= \int_S u_k^2 ds, \\ W_{i+k} &= \int_D \left(\sum \frac{du_i}{dx} \frac{du_k}{dx} + x^2 u_i u_k \right) dx dy dz, \\ W'_{i+k} &= \int_{D'} \left(\sum \frac{du_i}{dx} \frac{du_k}{dx} + x^2 u_i u_k \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

La première intégrale est étendue à tous les éléments ds de la surface S , la seconde au domaine intérieur D , la troisième au domaine extérieur D' . Ce qui me permet d'écrire W_{i+k} et W'_{i+k} avec un *seul* indice $i+k$, c'est que ces intégrales, comme on le démontre aisément, ne dépendent que de la somme des deux indices i et k .

On a encore à envisager les deux séries

$$(3) \quad \sum \sqrt{I_{2k}} \lambda^k$$

et

$$(4) \quad \sum (W'_k + W_k) \lambda^k.$$

La marche de la démonstration consiste à établir que les quatre séries (1), (2), (3), (4) ont même rayon de convergence (la convergence des deux premières étant d'ailleurs uniforme), et que ce rayon de convergence est au moins égal à 1 et même supérieur à 1, si certaines conditions sont remplies.

En ce qui concerne d'abord ce dernier point, on voit presque immédiatement que la suite

$$\frac{W'_{2k} + W_{2k}}{W'_{2k-2} + W_{2k-2}}$$

est constamment décroissante et au moins égale à 1. Elle tend donc vers une limite R^2 qui ne peut être inférieure à l'unité et qui n'est autre chose, comme le montre un raisonnement simple, que le carré du rayon de convergence de la série (4).

Supposons qu'on ait trouvé un nombre Θ_n tel que

$$(5) \quad W_{2k} \leq \Theta_n W'_{2k}, \quad W'_{2k} \leq \Theta_n W_{2k};$$

on montre aisément que

$$R^2 \geq \left(\frac{\Theta_n - 1}{\Theta_n + 1} \right)^2.$$

Ainsi R^2 sera plus grand que 1, pourvu qu'il existe un nombre Θ_n satisfaisant aux inégalités précédentes.

Pour démontrer l'existence de ce nombre je m'étais servi, dans mon Mémoire cité, d'une certaine transformation extrêmement générale, mais qui, cependant, ne s'appliquait qu'aux surfaces simplement connexes. C'était pour cette raison que ma démonstration n'était valable que pour ces surfaces.

M. Zaremba suit une tout autre voie. Il cherche à démontrer que u est une fonction méromorphe de λ . Pour cela, il suit la marche ordinaire, c'est-à-dire qu'il suppose que la fonction donnée φ contient n paramètres dont elle dépend linéairement, et il montre que l'on peut disposer de ces paramètres de façon que les inégalités (5) aient lieu, le nombre Θ_n étant d'autant plus voisin de 1 que n est plus grand.

Pour parvenir à ce résultat, voici l'artifice qu'il emploie : il remarque que la convergence des séries est assurée pourvu que le nombre μ soit assez grand ; il compare ensuite la fonction u et les intégrales W à une autre fonction analogue qui ne diffère de u que par la substitution à μ d'un nombre caractéristique m plus grand que μ , et aux intégrales K formées avec cette fonction comme les intégrales W le sont avec u .

Si ce nombre m est convenablement choisi, la comparaison des intégrales K et W permet d'établir les inégalités (5).

On voit que, en généralisant le problème et en substituant à l'équation de Laplace l'équation plus générale

$$\Delta u - \mu^2 u = 0,$$

M. Zaremba, loin d'augmenter les difficultés, a rendu la solution plus facile.

Nous n'avons pas établi, il est vrai, que R est *toujours* plus grand que 1, mais seulement que R peut dépasser toute limite *si, la fonction φ dépendant de n paramètres, on dispose convenablement de ces paramètres.*

Mais nous verrons bientôt que cette restriction ne peut nous gêner.

La convergence de la série (4) entraîne celle de la série (3). On peut, en effet, établir une inégalité de la forme

$$(6) \quad I_{2k} < L(W_{2k} - W'_{2k}),$$

où L est une constante ne dépendant que de la surface S .

Pour établir cette inégalité je m'étais toujours servi de la même transformation, ce qui m'obligeait encore à me restreindre aux surfaces simplement connexes.

M. Stekloff a trouvé une démonstration applicable à toutes les surfaces, sauf quelques restrictions ; M. Zaremba a apporté encore un nouveau perfectionnement à la démonstration de M. Stekloff, de sorte qu'elle ne laisse plus rien à désirer sous le rapport de la généralité.

On a ensuite à faire voir que la convergence des séries (3) et (4) entraîne la convergence uniforme des séries (1) et (2). On remarque d'abord que ces séries (1) et (2) convergent et divergent en même temps. Si (2) converge, il en est de même de (1), cela

est évident; mais, pour établir rigoureusement la réciproque, M. Zaremba est obligé d'employer un artifice ingénieux analogue à celui dont nous avons parlé plus haut et qui consiste à comparer nos potentiels généralisés, où le nombre caractéristique est égal à μ , à d'autres potentiels généralisés auxiliaires où ce nombre est égal à $m > \mu$.

Cette difficulté ne se serait pas présentée dans la méthode de Neumann.

Il est clair que le rayon de convergence de (1) et (2) ne peut être supérieur ni à celui de (3), ni à celui de (4). Mais ce qu'il importe d'établir c'est qu'il ne peut être inférieur. Pour démontrer ce résultat j'avais été obligé de supposer que le principe de Dirichlet avait été préalablement démontré par une autre méthode. La démonstration de M. Zaremba est exempte de cet inconvénient. Cet auteur établit d'abord l'inégalité suivante :

$$(7) \quad \delta_k < B_1 \rho \delta_{k-1} + B_2 \log \left(\frac{1}{\rho} \right) \sqrt{I_{2k-2}},$$

où δ_k représente le maximum de u_k , où B_1 et B_2 sont deux constantes dépendant uniquement de la surface S ; l'inégalité a lieu pour toutes les valeurs de ρ comprises entre 0 et 1. Elle suffit évidemment pour démontrer le théorème énoncé.

Voici comment on parvient à l'inégalité (7). On trouve une relation entre les valeurs de u_k et de u_{k-1} sur la surface S . Soit M un point de S ; considérons une couche attirante répandue sur cette surface et dont la densité soit $\frac{u_{k-1}}{2\pi}$. On voit que la valeur de u_k au point M est égale à la composante normale en ce point de l'attraction due à cette couche. La loi d'attraction est, bien entendu, la loi généralisée.

Décomposons maintenant la couche attirante en deux parties S' et S'' , où S' sera une petite calotte entourant le point M et dont les dimensions linéaires sont de l'ordre de ρ . L'attraction de S' nous donnera le premier terme du second membre de (e) et l'attraction de S'' nous donnera le second terme. Pour évaluer une limite supérieure de cette attraction de S'' il faut se servir de l'inégalité de Schwarz; mais cette inégalité conduirait à une limite supérieure infinie si le point A se trouvait sur S'' de telle façon que la dis-

tance r pût s'annuler. C'est pour cette raison qu'il a été nécessaire de décomposer la couche attirante en deux parties.

Cette manière de se tirer de cette difficulté et la façon dont M. Zaremba se sert de l'inégalité (7) méritent de fixer l'attention; car cet exemple pourrait être avantageusement imité dans des cas analogues.

Il résulte aisément de tout cela :

1° Que u est une fonction méromorphe de λ dans tout le plan. (Il suffit, en effet, de se rappeler que, si φ dépend linéairement de n paramètres, on peut disposer de ces paramètres de façon que R soit plus grand qu'une certaine limite, qui croît indéfiniment avec n , et d'appliquer ensuite à ce problème la méthode que j'ai employée dans mon Mémoire des *Rendiconti*.)

2° Que u est un potentiel généralisé de simple couche, la densité de la matière attirante étant égale à

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \sum \sigma_k \lambda^k.$$

Si nous considérons le résidu de cette fonction méromorphe relatif à un pôle quelconque, ce résidu sera évidemment un potentiel généralisé de simple couche dont la densité sera égale au résidu correspondant de la fonction σ . De plus, ce résidu devra satisfaire à des équations de même forme que (B), mais où la fonction φ devra être nulle.

Or il est aisé d'établir :

1° Qu'il n'existe pas de fonction satisfaisant à ces équations (où $\varphi = 0$) si λ est imaginaire; ni si $|\lambda| < 1$; ni si $\lambda = -1$; ni si $\lambda = 1$ et $\mu > 0$.

Nous n'aurons donc ni pôle imaginaire, ni pôle à l'intérieur du cercle de rayon 1, ni pôle sur la circonférence de ce cercle pour $\mu > 0$. Donc, si $\mu > 0$, le rayon de convergence R de nos séries sera plus grand que 1; nous pourrons donc faire dans nos séries $\lambda = \pm 1$, ce qui nous donnera la solution du problème

$$\left(\frac{du}{dn} = \psi \right).$$

Si $\mu = 0$, le pôle $\lambda = 1$ peut exister et, pour que la méthode soit applicable, il faut que le résidu correspondant soit nul, ce qui s'écrit

$$(8) \quad \int \varphi ds = 0;$$

c'est là une condition à laquelle toutes les méthodes conduisent : on sait, en effet, que le problème $\left(\frac{du}{dn} = \psi\right)$ n'est possible pour le domaine intérieur D que si

$$\int \frac{du}{dn} ds = 0,$$

ce qui n'est autre chose que la condition (8).

Voyons cependant comment on pourrait résoudre le problème $\left(\frac{du}{dn} = \psi\right)$ pour le domaine extérieur D' quand la condition (8) n'est pas remplie.

Nous trouverons alors

$$u = \frac{P}{\lambda - 1} + w,$$

où w est une fonction méromorphe ayant tous ses pôles extérieurs au cercle de rayon 1; le résidu P est alors le potentiel d'une couche électrique en équilibre sur la surface S supposée conductrice. (La loi d'attraction est d'ailleurs redevenue la loi newtonienne puisque $\mu = 0$.)

Pour $\lambda = -1$ on trouve alors

$$u = w - \frac{P}{2}.$$

La série w converge pour $\lambda = -1$; quant à P, on peut le calculer par la méthode de Robin, que les considérations précédentes justifient complètement. On voit comment, par une application ingénieuse de la méthode des *Rendiconti*, M. Zaremba échappe aux difficultés qu'il aurait rencontrées s'il avait voulu démontrer directement que R est généralement plus grand que 1.

Il faut enfin passer du problème $\left(\frac{du}{dn} = \psi\right)$ au problème $(u = \varphi)$ de façon à justifier la méthode de Neumann et le principe de

Dirichlet. M. Zaremba montre qu'on passe facilement de l'un à l'autre. Dans le problème de Neumann, il s'agit en effet de trouver un potentiel généralisé de double couche satisfaisant à la condition

$$(v)_i - (v)_e = \lambda [(v)_i - (v)_e] + 2\varphi.$$

Dans le problème que nous venons de résoudre il fallait trouver un potentiel généralisé de simple couche satisfaisant à la condition

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_e - \left(\frac{du}{dN}\right)_i = \lambda \left[\left(\frac{du}{dN}\right)_e - \left(\frac{du}{dN}\right)_i \right] + 2\psi.$$

Il suffit, pour passer de l'un à l'autre, de prendre

$$v = \frac{\lambda u - v_0}{1 - \lambda} \quad (\text{dans } D),$$

$$v = \frac{\lambda u - v_0}{1 + \lambda} \quad (\text{dans } D')$$

et

$$\psi = \frac{dv_0}{dN},$$

v_0 étant le potentiel d'une double couche dont la densité est $\frac{\varphi}{2\pi}$.

Cela suppose, il est vrai, que la dérivée $\frac{dv_0}{dN}$ existe. Je n'indiquerai pas ici l'artifice grâce auquel M. Zaremba ramène le cas général à celui où cette dérivée existe.

Dans tous les cas, la méthode de Neumann et le principe de Dirichlet se trouvent entièrement justifiés.

On voit quelle est la généralité du résultat obtenu par M. Zaremba. Les surfaces auxquelles le principe s'applique n'ont pas besoin d'être simplement connexes. Les conditions imposées à la surface S sont extrêmement larges. Elles sont remplies par toutes les surfaces analytiques, et même par les surfaces composées de plusieurs morceaux analytiques, pourvu qu'en un point commun à deux ou plusieurs morceaux le plan tangent à tous ces morceaux soit le même.

La généralisation qui résulte de l'introduction du terme

$$\xi u = -\mu^2 u$$

a contribué à simplifier la démonstration, de sorte que cette dé-

monstration semble avoir atteint sa forme définitive et qu'il n'y sera sans doute plus apporté que des modifications de détail.

Il importe toutefois de faire la part de chacun; car le résultat n'a été obtenu que par étapes successives et avec le concours de plusieurs travailleurs. Un court aperçu historique est donc nécessaire. J'ai expliqué plus haut ce qu'il restait à faire quand j'ai abandonné la question. J'avais fait usage d'une certaine transformation T qui m'obligeait à me restreindre à des surfaces simplement connexes, il fallait rendre inutile cette transformation T de façon à pouvoir envisager une surface quelconque. J'avais supposé le principe de Dirichlet préalablement démontré, il fallait s'affranchir de cette nécessité; enfin, j'avais, sans tenter une démonstration et en me contentant d'un de ces aperçus qui suffisent au physicien sans contenter l'analyste, montré l'existence et l'importance probables de certaines fonctions que j'appelais *fondamentales* et qui comprenaient les fonctions sphériques et les fonctions de Lamé comme cas particuliers.

On chercha d'abord à se servir de ces fonctions fondamentales pour arriver à combler les lacunes qui subsistaient encore, mais on n'obtint ainsi que des résultats très incomplets.

M. Le Roy (*Annales de l'École Normale*, 1898) introduisit des fonctions analogues et en établit rigoureusement l'existence, mais elles ne contenaient pas les fonctions fondamentales comme cas particuliers, de sorte que les intéressants résultats qu'il avait obtenus et qui étaient si utiles dans divers problèmes de Physique mathématique n'étaient pas directement applicables au problème de Dirichlet.

Dans la suite MM. Liapounoff, Tauber et Stekloff approfondirent la nature des liens qui rattachent la méthode de Robin à celle de Neumann.

En 1899, M. Korn publie son Ouvrage *Lehrbuch der Potentialtheorie*, où il démontre la légitimité de la méthode de Robin et de celle de Neumann *sans supposer le principe de Dirichlet préalablement démontré*. C'était là un progrès très considérable qui était d'ailleurs réalisé presque en même temps et indépendamment par M. Stekloff (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 1900). Ce savant, qui avait d'abord fait des tentatives dans le même sens que M. Le Roy, n'a pas besoin non plus de s'appuyer

sur une démonstration préalable du principe de Dirichlet. De plus, il imagine un théorème qui affranchit une des parties de la démonstration de la considération de la transformation T.

Ces deux auteurs supposent que la fonction Φ , qui définit les valeurs du potentiel sur la surface limite, a des dérivées premières continues. Mais, en 1901, M. Korn (*Abhandlungen zur Potentialtheorie*) fait un pas de plus, et il suppose seulement que cette fonction Φ elle-même est continue, sauf le long de certaines lignes.

C'est M. Zaremba le premier qui s'est affranchi de la transformation T, ce qui lui a permis d'envisager une surface de connexion quelconque et qui a établi rigoureusement l'existence des fonctions fondamentales. Il a ensuite étendu les résultats à l'équation $\Delta u + \xi u = 0$ (*Bulletin de l'Académie de Cracovie et Comptes rendus*, 1901). Il avait donc réussi à combler définitivement les trois lacunes que nous avons signalées plus haut.

Peu après, M. Korn (*Abhandlungen zur Potentialtheorie*, §) retrouve et développe quelques-uns des résultats précédents de M. Zaremba et étudie, par une méthode dont le principe se trouve déjà dans un travail antérieur de M. Stekloff, le problème du développement d'une fonction arbitraire en série procédant suivant les fonctions fondamentales.

Nous arrivons ainsi au Mémoire que nous analysons ici. Ce n'est en un sens que le développement des deux Notes succinctes que nous avons citées plus haut et qui avaient paru en 1901. Cependant de nombreux perfectionnements de détail ont été introduits et, comme nous l'avons vu, en envisageant l'équation plus générale $\Delta u + \xi u = 0$, bien des points de la démonstration relative à l'équation de Laplace se sont trouvés simplifiés.

Ces détails historiques étaient indispensables pour faire comprendre la place exacte qu'occupe le Mémoire de M. Zaremba dans l'histoire du développement de cette partie de la Science.

POINCARÉ.