Tome XXX. Samedi 18 Janvier 1902 9e Année. — N° 3.

L'Éclairage Électrique

REVUE HEBDOMADAIRE DES TRANSFORMATIONS

Électriques — Mécaniques — Thermiques

DE

L'ÉNERGIE

SUR LES PROPRIÉTÉS DES ANNEAUX A COLLECTEURS

On se rappelle les articles qui ont paru sous ce même titre dans les numéros des 26 octobre, 23 et 30 novembre 1901 et la polémique à laquelle ont pris part MM. Leblanc, Latour et Heyland [1]. On se rappelle également quel était le dispositif adopté par M. Latour.

Bien que l'expérience semble avoir définitivement prononcé et avoir donné raison à M. Latour, il ne sera peut-être pas sans intérêt de revenir en quelques mots sur la question et d'examiner de plus près les raisonnements de M. Leblanc.

Je suppose que l'on ait p balais que je numérote 1, 2..., p ; qu'il y ait pn lames du collecteur que je numérote de même de 1 à pn. Je numéroterai de même de 1 à pn les spires ou sections de l'induit, la spire 1 étant celle qui joint la lame 1 à la lame 2, la spire 2 celle qui va de la lame 2 à la lame 3, etc.

Je diviserai le temps en *périodes* et j'entends par période, *non pas la période des courants polyphasés qui alimentent l'appareil, mais l'intervalle de temps qui s'écoule depuis le moment où un balai quitte le contact d'une des lames du collecteur jusqu'au moment où il quitte le contact de la lame suivante.*

Alors pendant la période 1, le balai 1 sera en connexion avec les lames 1 et 2, le balai 2 avec les lames $n+1$ et $n+2$, le balai q avec les lames $(q-1)n+1$ et $(q-1)n+2$, et enfin le balai p avec les lames $(p-1)n+1$ et $(p-1)n+2$. Pendant la période 2, le

[1] Voir, t. XXIX : M. Leblanc, p. 113 ; M. Latour, p. 294 ; A. Heyland, p. 328 et p. CLXXII ; ainsi que p. CXIV.

balai 1 sera en connexion avec les lames pn et 1 et le balai q avec les lames $(q-1)\,n$ et $(q-1)\,n+1$. Pendant la période 3 le balai 1 sera en connexion avec les lames $pn-1$ et pn et le balai q avec les lames $(q-1)\,n-1$ et $(q-1)\,n$ et ainsi de suite.

Nous envisagerons d'autre part divers circuits que je définirai comme il suit : Le circuit C_1 ira du balai 1 au balai 2 à travers la lame 1, les spires 1, 2, 3..., n et la lame $n+1$. Plus généralement le circuit C_q ira du balai q au balai $q+1$ par la lame $(q-1)\,n+1$, les spires $(q-1)\,n+1$ à $(q-1)\,n+n$ et la lame $qn+1$. Le circuit C'_1 (court-circuit) ira du balai 1 au balai 1 à travers la lame 1, la spire 1 et la lame 2 et le circuit C'_q ira du balai q au balai q à travers la lame $(q-1)\,n+1$, la spire $(q-1)\,n+1$ et la lame $(q-1)\,n+2$.

Il résulte de ces définitions que le circuit C_1, par exemple, reste fermé pendant les deux périodes 1 et 2, puisque pendant ces deux périodes la connexion subsiste entre le balai 1 et la lame 1, et entre le balai 2 et la lame $n+1$. Il en est de même des autres circuits C_q. Au contraire les courts-circuits C'_1, C'_2, et C'_p ne resteront fermés que pendant la période 1.

Nous pourrons alors regarder les courants qui règnent dans l'induit comme la superposition de courants $I_1, I_2, \ldots, I_p$ circulant dans les circuits $C_1, C_2, \ldots, C_p$ et de courants $i_1, i_2, \ldots, i_p$ circulant dans les circuits $C'_1, C'_2, \ldots, C'_p$.

Dans ces conditions,	l'intensité totale sera :
Dans la spire 1 :	$I_1 + i_1$.
Dans les spires 2,3,..., n :	I_1
Dans la spire $n+1$:	$I_2 + i_2$.
Dans les spires $n+2,\ldots,2n$:	I_2.
Dans la lame 1... :	$I_1 + i_1 - I_p$.
Dans la lame 2... :	$-i_1$.
Dans les lames $3, 4, \ldots, n$, :	zéro.
Dans la lame $n+1$:	$I_2 + i_2 - I_1$.
Dans la lame $n+2$:	$-i_2$.

J'appelle V_q le potentiel au balai q ; E_q la force électromotrice entre le balai q et le balai $q+1$; J_q le courant qui arrive de l'extérieur au balai q ; de telle façon que l'on ait :

$$E_1 = V_1 - V_2; \quad E_q = V_q - V_{q+1}\ ; \quad J_1 = I_1 - I_p\ ; \quad J_q = I_q - I_{q-1}.$$

J'appelle R la résistance d'une spire ; j'appelle ρ_q la résistance de la lame q en y comprenant la résistance au contact de la touche correspondante du collecteur avec le balai. De cette façon, pendant la période 1, les résistances $\rho_3, \rho_4, \ldots, \rho_n$ doivent être regardées comme infinies puisque les touches 3, 4,..., n ne sont au contact d'aucun balai.

J'appelle u_q le flux magnétique qui traverse la spire q et je pose

$$U_1 = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n\,,$$
$$U_{q+1} = u_{qn+1} + u_{qn+2} + \ldots\ldots + u_{qn+n}.$$

Nous aurons alors les équations suivantes qu'il nous reste à discuter.

$$E_1 = \frac{dU_1}{dt} + (n-1)\,R\,I_1 + R\,(I_1 + i_1) + \rho_1\,(I_1 + i_1 - I_p) + \rho_{n+1}\,(I_1 - i_2 - I_2) \tag{1}$$

$$o = \frac{du_1}{dt} + R\,(I_1 + i_1) + \rho_1\,(I_1 + i_1 - I_p) + \rho_2\, i_1. \tag{2}$$

L'équation (1) se rapporte au circuit C_1 et l'équation (2) au circuit C'_1. Dans le second membre de (1) nous avons cinq termes : le premier représente la force électromotrice induite, le second se rapporte à la résistance des $n - 1$ spires $2, 3, \ldots, n$, le troisième à la résistance de la spire 1, le quatrième à celle de la lame 1, le cinquième à celle de la lame $n + 1$. Dans le second membre de (2) nous avons quatre termes, le premier représente la force électromotrice induite, et les trois autres se rapportent à la résistance de la spire 1, de la lame 1 et de la lame 2.

Pour montrer que les critiques de M. Leblanc sont mal fondées, je pourrai me contenter de l'approximation suivante : je suppose que le nombre n soit grand, c'est ce que M. Leblanc suppose également; alors dans le second membre de (1), le second terme sera beaucoup plus grand que les trois suivants et en négligeant

$$Ri_1 + \rho_1 (I_1 + i_1 - I_p) + \rho_{n+1} (I_1 - i_2 - I_2)$$

devant $n\mathrm{RI}_1$ nous pourrons écrire :

$$E_1 = \frac{dU_1}{dt} + n\mathrm{RI}_1. \tag{1 bis}$$

Supposons que les balais tournent avec une vitesse convenable pour qu'il y ait synchronisme, *le champ magnétique deviendra alors fixe dans l'espace;* cela n'est pas tout à fait exact comme l'a fait observer M. Leblanc, la direction du champ variera pendant la durée d'une période, mais *à la fin de chaque période, il redeviendra identique à ce qu'il était au commencement de cette période.*

Donc u_1, $u_2, \ldots$, et U_1 auront même valeur au commencement de la période 1 et au commencement de la période 2.

Nous aurons :

$$\int E_1 dt = n\mathrm{R} \int I_1 dt + \int dU_1.$$

en étendant les intégrations à la période 1 tout entière. Je viens de dire que U_1 a même valeur au commencement de la période 1 et au commencement de la période 2. Donc

$$\int dU_1 = 0.$$

Nous avons donc

$$\int E_1 dt = n\mathrm{R} \int I_1 \, dt.$$

ce qui veut dire que l'intensité moyenne pendant la période 1, est égale à la force électromotrice moyenne pendant la période 1, divisée par la résistance $n\mathrm{R}$, comme s'il n'y avait pas de self-induction.

Comme, si le nombre n est grand, nos périodes sont très courtes, nous pouvons dire que tout se passe comme s'il n'y avait pas de self-induction. Nous retombons donc sur les conclusions de M. Latour.

Quel est donc le vice du raisonnement de M. Leblanc ?

Dans chaque période nous devons distinguer deux phases : la phase normale pendant laquelle les balais restent au contact des mêmes touches du collecteur, et la phase de commutation. D'après M. Leblanc, pendant la phase normale, le champ, loin de rester fixe tourne avec la même vitesse que si les balais étaient immobiles ; car tout se passe comme si le courant était amené par des bagues et non par des balais. Pendant la phase de commutation, qui est extrêmement courte, le champ est brusquement ramené en arrière à sa direction primitive.

Si alors nous divisons la période 1 en deux phases, la phase normale 1 *bis* suivie de la phase de commutation 1 *ter*, si nous appelons u'_q, u''_q et u'''_q les valeurs de u_q (et U'_1, U''_1, U'''_1 les valeurs de U_1), au commencement de la période 1, à la fin de la phase 1 *bis*, et enfin à la fin de la phase 1 *ter*, c'est-à-dire au commencement de la période 2, nous devrions avoir d'après M. Leblanc et dans l'hypothèse du synchronisme :

$$u'_q = u'''_q, \quad u''_q = u'_{q-1}.$$

En effet à la fin de la période le champ a repris sa direction primitive. Donc la valeur finale u'''_q doit être égale à la valeur initiale u'_q. D'un autre côté au moment de la commutation la section $q - 1$ prend brusquement la place de la section q, le flux $u'''_{q-1} = u'_{q-1}$ doit donc être égal au flux u''_q.

Il viendrait ainsi :

$$U'''_1 - U''_1 = u''_{n+1} - u''_1$$

et comme u''_{n+1} n'est pas égal à u''_1 :

$$U'''_1 - U''_1 \gtrless 0. \tag{3}$$

Or d'autre part si nous intégrons l'équation (1) par rapport au temps en étendant l'intégration à toute la phase de commutation (1 *ter*), nous trouvons :

$$U'''_1 - U''_1 = \int [E_1 - (n-1) RI_1 - R(I_1 + i_1) - \rho_1 (I_1 + i_1 - i_p) + \rho_{n+1} (I_1 - I_2 - i_2)]\, dt.$$

La force électromotrice E_1 et les intensités restent finies, les résistances R et ρ restent finies puisque le circuit C_1 n'est pas rompu au moment de la commutation 1 *ter*. La fonction sous le signe $\int$ reste donc finie et comme la durée de la phase 1 *ter* est excessivement petite, l'intégrale peut être regardée comme nulle et l'on a :

$$U'''_1 - U''_1 = 0.$$

contrairement à l'inégalité (3).

L'hypothèse de M. Leblanc doit donc être rejetée. On aura toujours $u'_q = u'''_q$, puisque c'est là la définition même du synchronisme. Mais alors on ne pourra avoir $u''_q = u'_{q-1}$. Il n'est donc pas vrai que, pendant la phase normale 1 *bis*, tout se passe comme si le courant était amené non par des balais, mais par des bagues. Pendant cette phase, les balais *restent* en contact avec les mêmes touches du collecteur ; mais il ne s'ensuit pas que tout se passe comme si les balais *étaient toujours restés* en contact avec ces mêmes touches, c'est-à-dire comme dans l'hypothèse des bagues. Le régime qui se produirait dans l'hypothèse des bagues, n'a pas le temps de s'établir dans le cas qui nous occupe ; il est certain tout au moins qu'il ne peut s'établir immédiatement. Par conséquent, au moins pendant la première partie de la phase normale 1 *bis* (et à ce que je crois, pendant presque toute la durée de cette phase), les phénomènes sont tout différents de ce qu'ils seraient dans l'hypothèse des bagues. Tel est le défaut du raisonnement de M. Leblanc.

Il ne faudrait pas croire qu'en intégrant l'équation (2) comme nous avons intégré l'équation (1), on pourrait démontrer que

$$u'''_1 - u''_1 = 0.$$

En effet nous avons dans le second membre la résistance ρ_2 qui devient très grande, puis infinie pendant la phase de commutation parce que le contact de la lame 2 avec le balai 1 est rompu. Ainsi la différence $u'''_1 - u''_1$ n'est pas nulle, mais quand on s'arrange pour avoir une bonne commutation elle est très petite.

J'ai fait plus haut une approximation en supposant n très grand. Je ne crois pas utile de démontrer que nos conclusions ne seraient pas modifiées par un calcul plus précis.

Cette polémique m'avait inspiré une série de réflexions et je les avais d'abord rédigées pour en faire la préface de cet article. Mais j'ai craint par trop de discours de dissimuler la simplicité du raisonnement qui précède. Je préfère donc différer la publication de ces réflexions et en faire l'objet d'un second article.

H. Poincaré.

EMPLOI DES APPAREILS ÉLECTRIQUES ENREGISTREURS

SUR LES VÉHICULES DE TRAMWAYS ET DE CHEMINS DE FER [1]

Jusqu'à présent, les appareils enregistreurs n'ont pour ainsi dire pas été utilisés en France pour faire des mesures sur les locomotives ou véhicules moteurs électriques. La Compagnie des Chemins de fer P.-L.-M., qui a construit il y a quelques années une locomotive d'essai à accumulateurs [2] a tenté d'exécuter quelques relevés avec un wattmètre enregistreur ; mais, comme on ne cherchait pas à obtenir des résultats bien précis, on s'est contenté de prendre un wattmètre ordinaire Richard à poids que l'on possédait depuis longtemps et auquel on a adapté un système provisoire d'amortissement. Je crois que les essais entrepris avec cet appareil un peu rudimentaire n'ont pas été poursuivis.

La Compagnie des Chemins de fer de l'Ouest n'a jamais fait de relevés avec des appareils enregistreurs sur ses locomotives ou fourgons électriques. La Compagnie d'Orléans avait l'intention de faire des essais de consommation sur ses locomotives électriques, avant l'ouverture de la ligne du quai d'Orsay au printemps 1900, à l'aide d'un ampèremètre enregistreur Meylan, du même type que celui employé sur les tramways, mais qui aurait été disposé verticalement, à cause du peu de place disponible, au lieu de l'être horizontalement ; il aurait été intéressant de voir, avec cette position nouvelle et sur ce véhicule nouveau, quelles dispositions auraient donné les meilleurs résultats pour l'obtention de courbes bien nettes. Malheureusement l'essai n'a pas eu lieu, parce que les ingénieurs de la Compagnie ont été trop absorbés par la mise en route de la ligne, qui a eu lieu avant l'époque prévue, et qu'une fois l'exploitation commencée, il n'a plus été possible d'intercaler des trains d'essais dans l'horaire du service régulier.

Il est probable toutefois que les Compagnies de Chemins de fer ne tarderont pas à faire usage de wattmètres et surtout d'ampèremètres enregistreurs sur les lignes électriques installées ou qu'elles installeront, car ces appareils leur donneront des indications très utiles sur les consommations instantanées correspondant à différents cas de la pratique sur lesquels les données sont encore très peu étendues.

Sur les chemins de fer à vapeur l'emploi des enregistreurs électriques date seulement de l'année 1900. Sur la locomotive à vapeur il n'y a évidemment aucun motif de faire usage d'appareils de ce genre. On n'avait jamais songé non plus jusqu'à présent à les utiliser pour contrôler l'éclairage électrique des voitures, dont l'application remonte déjà à dix ans, parce que cet éclairage était obtenu toujours à l'aide d'accumulateurs qui donnent lieu à une chute de tension et par suite

(1) Voir numéro du 4 janvier 1902, p. 1899.

(2) *L'Éclairage Électrique*, t. XVIII, p. 263, 18 janvier 1899.

Tome XXX. Samedi 1er Mars 1902 9e Année. — N° 9.

L'Éclairage Électrique

REVUE HEBDOMADAIRE DES TRANSFORMATIONS

Électriques — Mécaniques — Thermiques

DE

L'ÉNERGIE

SUR LES PROPRIÉTÉS DES ANNEAUX A COLLECTEURS

J'ai publié récemment (1), sous ce même titre, un article relatif à l'appareil de M. Latour. J'avais d'abord rédigé, pour servir d'introduction à cet article, une suite de réflexions se rapportant à des sujets connexes. J'ai ensuite jugé, ainsi que je l'ai expliqué à la fin de cet article, que ces réflexions pouvaient distraire l'attention du lecteur et lui dissimuler la simplicité du raisonnement, qu'en conséquence il valait mieux les séparer de l'article principal.

Néanmoins il ne sera peut-être pas inutile de reproduire ici ces réflexions, qui, pour la plupart se rapportent aux dynamos à courants continus.

1. Soient C_1, C_2, ... C_n, un certain nombre de circuits fermés ; I_k l'intensité du courant qui circule dans C_k ; soit U_k le flux de force qui traverse le circuit C_k, soit L_k la self-induction et R_k sa résistance ; E_k la force électromotrice qui règne dans ce circuit ; soit $M_{jk} = M_k$ le coefficient d'induction mutuelle de C_k et de C_j, on aura les équations bien connues :

$$\frac{dU_k}{dt} + R_k I_k = E_k \; ; \tag{1}$$
$$U_k = L_k I_k + \Sigma M_{kj} I_j \; .$$

Qu'arrivera-t-il si l'un des circuits, le circuit C_1 par exemple vient à être rompu brusquement ? La résistance R_1 va augmenter très rapidement pour devenir infinie au bout d'un temps très court ; les autres résistances R_k resteront finies. Si nous écrivons l'équation (1) sous la forme :

$$U_k = L_k I_k + \Sigma M_{kj} I_j = \int (E_k - R_k I_k)\, dt + \text{const.}$$

(1) *L'Éclairage Électrique*, t. XXX, p. 78, 18 janvier 1902.

et que nous étendions l'intégration à l'intervalle de temps très court pendant lequel dure la rupture, l'intégrale du second membre sera très petite pour $k = 2, 3, \ldots, n$, parce que la quantité sous le signe $\int$ est finie et que l'intervalle d'intégration est très petit; mais cela ne sera plus vrai pour $k = 1$, parce que la quantité sous le signe $\int$ est très grande. Soient donc

$$J'_1, J'_2, \ldots\ldots, J'_n,$$

les valeurs de $I_1, I_2, \ldots, I_n$ avant la rupture et U'_k la valeur correspondante de U_k et

$$J''_1, J''_2, \ldots\ldots, J''_n,$$

leurs valeurs après la rupture et U''_k la valeur correspondante de U_k; on aura :

$$L_k J''_k + \Sigma M_{kj} J''_j = L_k J'_k + \Sigma M_{kj} J'_j \qquad (2)$$
$$(k = 2, 3, \ldots\ldots, n),$$

et d'autre part

$$J''_1 = 0. \qquad (3)$$

Ces équations (2) et (3) nous donnent les valeurs des courants après la rupture, quand on connait leurs valeurs avant la rupture. Soit

$$T = \frac{1}{2} \Sigma L_k I^2_k + \Sigma M_{ki} I_k I_j,$$

l'énergie électrocinétique totale; avant la rupture, sa valeur était

$$T' = \frac{1}{2} \Sigma L_k J'^2_k + \Sigma M_{kj} J'_k J'_j.$$

Elle sera après la rupture :

$$T'' = \frac{1}{2} \Sigma L_k J''^2_k + \Sigma M_{kj} J''_k J''_j.$$

Nous aurons évidemment :

$$\frac{dT}{dI_k} = U_k.$$

et de même :

$$\frac{dT'}{dJ'_k} = U'_k = L_k J'_k + \Sigma M_{kj} J'_j; \qquad U''_k = L_k J''_k + \Sigma M_{kj} J''_j = \frac{dT''}{dJ''_k}.$$

Nous aurons évidemment :

$$2T = \Sigma J_k U_k;\ 2T' = \Sigma J'_k U'_k,\ 2T'' = \Sigma J''_k U''_k,$$

et d'autre part :

$$\Sigma J''_k U'_k = \Sigma J'_k U''_k.$$

Je dis que nous avons :

$$2T'' = \Sigma J''_k U'_k = \Sigma J'_k U''_k.$$

Il vient en effet, pour toutes les valeurs de k

$$J''_k U''_k = J''_k U'_k,$$

car pour $k > 1$, on a $U'_k = U''_k$ et pour $k = 1$, $J'' = 0$.

On aura donc :

$$2(T'' - T') = \Sigma J'_k (U''_k - U'_k)$$

ou puisque $U'_k = U_k$ pour $k > 1$:

$$2(T'' - T') = J'_1 (U''_1 - U'_1)\,; \tag{4}$$

c'est là une première expression de la perte d'énergie due à la rupture:

Pour obtenir une seconde expression, j'observe que T' est une forme quadratique par rapport aux J' ; que $U'_2, U'_3, \ldots, U'_n$ sont des fonctions linéaires des J'. Donc inversement J'_2, $J'_3, \ldots J'_n$ seront des fonctions linéaires de

$$J'_1, U'_2, U'_3, \quad \ldots\ldots, \quad U'_n,$$

et par conséquent T' sera un polynôme homogène du second degré par rapport à ces variables :

$$T' = P\left(J'_1, U'_2, U'_3, \quad \ldots\ldots, \quad U'_n\right).$$

Supposons que l'on donne à J'_1 une valeur déterminée, et qu'on cherche ensuite quel est le minimum de la fonction T' quand J'_1 est assujetti à conserver cette valeur. La fonction T' (qui est une forme définie positive) a certainement un minimum, puisqu'elle ne peut devenir négative.

Pour trouver ce minimum quand on prend pour variables les J', on a à résoudre les équations

$$\frac{dT'}{dJ'_2} = \frac{dT'}{dJ'_3} = \ldots\ldots = \frac{dT'}{dJ'_n} = 0,$$

ou

$$U'_2 = U'_3 = \ldots\ldots = U'_n = 0, \tag{5}$$

Quand on prend pour variables J'_1, U'_2, U'_3, …, U'_n, on a à résoudre :

$$\frac{dP}{dU'_2} = \frac{dP}{dU'_3} = \ldots\ldots = \frac{dP}{dU'_n} = 0, \tag{6}$$

Les équations (6) sont donc équivalentes aux équations (5), c'est-à-dire que les dérivées $\frac{dP}{dU'}$ ne dépendent que des U' et pas de J'_1 ; on a :

$$\frac{d^2 P}{dU'_k dJ'_1} = 0,$$

$$(k = 2, 3, \quad \ldots\ldots, \quad n),$$

c'est-à-dire que

$$T' = \frac{A_1 J'^2_1}{2} + \Phi(U'_2, U'_3, \ldots, U'_n)$$

Φ étant un polynône entier homogène par rapport aux U'. On aura de même :

$$T'' = \frac{A_1 J''^2_1}{2} + \Phi(U''_2, U''_3 \quad \ldots, \quad U''_n),$$

et à cause des équations (2) et (3) c'est-à dire de $U'_k = U''_k$, $J''_1 = 0$:

$$T'' = \Phi(U'_2, U'_3, \quad \ldots. \quad U'_n);$$

d'où enfin :

$$T' - T'' = \frac{A_1 J_1'^2}{2}. \tag{7}$$

Je suppose que c'est cette expression que M. Leblanc appelle, dans son article, l'énergie intrinsèque du circuit C_1 (?)

Remarquons que le coefficient A_1 est toujours plus petit que la self-induction L_1. Si en effet nous faisons

$$J'_2 = J'_3 = \quad . \ . \ . \quad = J'_n = 0,$$

nous trouvons :

$$T' = \frac{L_1 J_1'^2}{2};$$

et si nous faisons ;

$$U'_2 = U'_3 = \ . \ . \ . \ = U'_n = 0,$$

nous trouvons :

$$T' = \frac{A_1 J_1'^2}{2}.$$

Or nous venons de voir que c'est dans ce second cas que l'énergie T atteint son minimum.

Le sens physique de ce coefficient A_1 est d'ailleurs facile à saisir. Je suppose que l'on mette tous les courants C_2, C_3, ..., C_n en court-circuit, de façon que

$$E_2 = E_3 = \quad . \ . \ . \quad = E_n = 0,$$

puis qu'on soumette le circuit C_1 à une force électromotrice E_1 d'alternance très rapide. A cause de cette rapidité d'alternance nous pourrons négliger les résistances R_k I_k devant les forces d'induction et écrire :

$$\frac{dL_1 I_1}{dt} + \sum \frac{dM_{1j}}{dt} = E_1,$$

$$\frac{dL_k I_k}{dt} + \sum \frac{dM_{kj} I_j}{dt} = 0,$$

$$(k = 2, 3, \quad . \ . \ . \ . \quad n),$$

Alors les équations précédentes s'écrivent :

$$\frac{dU_1}{dt} = E_1, \qquad \frac{dU_k}{dt} = 0.$$

Donc les U_k sont des constantes qui doivent être nulles, puisque nous partons du repos :

$$U_k = 0 \qquad\qquad (k = 2, 3, \quad . \ . \ . \ , \quad n).$$

On a alors :

$$T = \frac{A_1 I_1^2}{2} + \Phi(U_2, U_3, \quad . \ . \ . \ . \quad U_k) = \frac{A_1 I_1^2}{2},$$

et

$$U_1 = \frac{dT}{dI_1} = A_1 I_1 = \sum \frac{d\Phi}{dU_k} \frac{dU_k}{dt} = A_1 I_1 ;$$

et en effet les dérivées de Φ par rapport aux U_k sont des fonctions linéaires des U_k qui s'annulent avec ces variables.

Notre équation devient donc :

$$\frac{dA_1I_1}{dt} = E_1,$$

de sorte que notre coefficient A_1 n'est autre chose que la self-induction apparente du circuit C_1 quand les autres circuits sont placés en court-circuit.

Remarquons maintenant que A_1 est proportionnel au discriminant de la forme quadratique T. Ce discriminant ne sera jamais nul, mais quand il sera très petit, le coefficient A_1 et par conséquent l'énergie perdue par la rupture seront également très petits.

Voyons sur un exemple simple comment cette circonstance pourra se présenter ; supposons deux circuits seulement C_1 et C_2 ; on aura :

$$2T = L_1I_1^2 + 2MI_1I_2 + L_2I_2^2 = \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)I_1^2 + \frac{U_2^2}{L_2},$$

$$U_2 = MI_1 + L_2I_2.$$

On aura donc :

$$A_1 = L_1 - \frac{M^2}{L_2}.$$

Le discriminant et A_1 seront très petits quand $L_1 L_2 - M^2$ sera très petit, c'est-à-dire quand l'ensemble des deux circuits sera assimilable à un transformateur *sans perte magnétique sensible*. Si alors C_2 est mis en court-circuit et qu'on fasse passer un courant alternatif dans C_1, les flux magnétiques primaire et secondaire se compenseront sensiblement et la self-induction apparente, que nous avons appelée A_1, sera presque nulle.

2. Envisageons maintenant le cas inverse et supposons que le circuit C_1, d'abord ouvert, soit brusquement fermé. Un courant prendra naissance dans le circuit ainsi fermé.

Mais il ne faudrait pas croire que cette fermeture du courant a nécessairement pour conséquence l'augmentation de l'énergie électrocinétique T ; elle peut tout aussi bien amener une diminution de cette énergie et cette remarque, comme on va le voir bientôt, est très importante.

Supposons, par exemple, pour prendre un cas simple, des forces électromotrices constantes et des circuits fixes, de sorte que les coefficients L et M soient constants.

Supposons pour simplifier encore deux circuits seulement, dont un seulement est d'abord fermé, l'autre étant rompu, et qu'on ferme ensuite l'un et l'autre.

On part d'un état de régime où l'on a :

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1}, \qquad I_2 = 0,$$

et par conséquent :

$$T = \frac{L_1}{2}\left(\frac{E_1}{R_1}\right)^2;$$

et il tend à s'établir un nouveau régime où l'on a :

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1}, \qquad I_2 = \frac{E_2}{R_2}, \qquad T = \frac{L_1}{2}\left(\frac{E_1}{R_1}\right)^2 + M\frac{E_1}{R_1}\frac{E_2}{R_2} + \frac{L_2}{2}\left(\frac{E_2}{R_2}\right)^2;$$

et il n'y a aucune raison pour que la seconde valeur de T soit plus grande que la première. Tout dépend des signes et des valeurs de M et de E_2.

D'autre part, il peut se faire qu'au moment où le nouveau circuit est brusquement fermé, on n'ait pas encore atteint un état de régime, parce que le régime antérieur aura été troublé pour une cause quelconque, et que la perturbation n'aura pas encore cessé au moment de la fermeture du courant.

Par exemple, reprenons l'ensemble de n circuits envisagé dans le numéro précédent; nous partons d'un état de régime où, si les forces électromotrices sont constantes et les circuits fixes, les intensités des courants sont

$$J_k = \frac{E_k}{R_k}.$$

Après la rupture du circuit C_1, les nouvelles intensités J' seraient données par nos équations.

$$J'_1 = 0, \qquad U'_k = U_k,$$

Mais l'état ainsi obtenu ne serait pas définitif, et au bout d'un certain temps les intensités seraient devenues :

$$I_1 = 0, \qquad I_k = \frac{E^k}{R_k}.$$

Il n'y a d'ailleurs aucune raison pour que l'énergie électrocinétique soit toujours plus grande (ou toujours plus petite) quand le régime sera établi, qu'immédiatement après la rupture.

J'ai voulu seulement appeler l'attention sur ces points; parce que, sans cela, quelques lecteurs auraient pu se laisser entraîner à tirer des conclusions hâtives. Et si nous ne pouvons rien affirmer dans les cas les plus simples que nous venons d'examiner, il est clair que dans les cas les plus complexes où les forces électromotrices sont variables et les circuits mobiles, nous ne pourrons rien affirmer non plus et que nous ne pouvons savoir d'avance si l'énergie électrocinétique T va augmenter ou diminuer quand on établira de nouvelles connexions.

3. Avant d'aller plus loin, rappelons la forme que prend en électrodynamique l'équation de la conservation de l'énergie. L'énergie cinétique est égale à :

$$T^* = \frac{1}{2}\sum L_k I^2_k + \sum M_{kj} I_k I_j = \frac{1}{2}\sum I_k U^*_k,$$

ou en supprimant les astérisques devenues inutiles :

$$T = \frac{1}{2}\sum L_k I^2_k + \sum M_{kj} I_k I_j = \frac{1}{2}\sum I_k U_k, \tag{1}$$

$$U_k = \frac{dT}{dI_k}.$$

Les équations de l'électricité s'écrivent :

$$\frac{dU_k}{dt} + R_k I_k = E_k. \tag{2}$$

Dans la dérivée $\frac{dU_k}{dt}$ nous devons distinguer deux parties : celle qui provient de la variation des intensités et que j'appellerai ΔU_k, à savoir

$$\Delta U_k = L_k \frac{dI_k}{dt} + \sum M_{kj} \frac{dI_j}{dt};$$

et celle qui provient de la variation des coefficients L et M, c'est-à-dire du mouvement des circuits ; je l'appellerai DU_k de sorte que :

$$DU_k = I_k \frac{dL_{kk}}{dt} + I_j \frac{dM_{kj}}{dt},$$

et :

$$\frac{dU_k}{dt} = \Delta U_k + DU_k .$$

De même dans la dérivée de T, nous distinguerons la partie qui provient de la variation des intensités, que j'appellerai ΔT, de sorte que :

$$\Delta T = \sum \frac{dT_k}{dI_k} \frac{dI_k}{dt} = \sum U_k \frac{dI_k}{dt} = \sum I_k \Delta U_k ,$$

et la partie qui provient de la variation de L et M, et que j'appellerai $DT = \frac{d\tau}{dt}$, de sorte que :

$$DT = \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{2} \sum I_k \, DU_k ;$$

$$\frac{dT}{dt} = \Delta T + \frac{d\tau}{dt} .$$

On voit aisément que $d\tau$ représente le travail élémentaire des forces électrodynamiques. Si alors je multiplie les équations (2) par I_k et que j'ajoute ; il vient :

$$\sum I_k \frac{dU_k}{dt} + \sum R_k I_k^2 = \sum E_k I_k , \qquad (3)$$

$\Sigma R_k I_k^2 dt$ représente (en joules) l'énergie perdue sous forme de chaleur de Joule ; je l'appelle dQ ; $\Sigma E_k I_k dt$ représente l'énergie électrique empruntée à l'extérieur ; je l'appelle dH.

$$\sum E_k I_k = \frac{dH}{dt}$$

$$\sum R_k I_k^2 = \frac{dQ}{dt} ;$$

L'équation (3) devient donc :

$$\Delta T + 2 \frac{d\tau}{dt} + \frac{dQ}{dt} = \frac{dH}{dt} ,$$

ou

$$\frac{dT}{dt} + \frac{d\tau}{dt} + \frac{dQ}{dt} = \frac{dH}{dt} ,$$

Cette équation signifie que l'énergie dH empruntée à la source électrique se retrouve sous trois formes : 1° d'accroissement dT de l'énergie électrocinétique ; 2° de travail mécanique $d\tau$; 3° de chaleur de Joule dQ.

4. Nous allons appliquer l'équation que nous venons de trouver :

$$dT + d\tau + dQ = dH,$$

aux différents problèmes qui nous occupent, mais auparavant pour la mieux faire comprendre, je voudrais en montrer l'application à un cas bien connu, celui des dynamos à courant continu. Le mouvement de la dynamo sera partagé en périodes toutes semblables ; le commencement de chaque période étant marqué par le moment où le balai quitte l'une des lames du collecteur et la fin par le moment où il quitte la lame suivante.

Dans la chaleur de Joule dQ, nous distinguerons celle qui se produit dans les spires et que nous appellerons dQ', et celle qui se produit aux balais au moment de la rupture et que nous désignerons par dQ'',

$$dQ = dQ' + dQ''.$$

Cette chaleur dQ'', que l'on réduit par le décalage des balais, représente précisément la perte d'énergie qui se produit du fait de la rupture et que nous avons appelée $T' - T''$ au n° 1.

Supposons pour fixer les idées, que la dynamo fonctionne comme moteur.

Pendant la durée d'une période, nous pourrons supposer que les coefficients L et M varient uniformément, de telle sorte que l'on ait :

$$\frac{dL_k}{dt} = \text{const.} \qquad \frac{dM_{kj}}{dt} = \text{const.}$$

Si un régime s'établissait, les courants I_k deviendraient constants et leurs valeurs se déduiraient des équations linéaires :

$$I_k \frac{dL_k}{dt} + \sum I_j \frac{dM_{kj}}{dt} + R_k I_k = E_k \cdot$$

Telles seraient les valeurs qu'atteindraient les intensités, si le régime avait le temps de s'établir.

Dans ces conditions on aurait :

$$\frac{dI_k}{dt} = 0, \qquad \Delta T = 0.$$

Nous négligerons dQ' (ainsi que les pertes dues à l'hystérésis). D'ailleurs dQ'' est nul sauf au moment de la commutation, de sorte qu'on devrait avoir :

$$2d\tau = dH = dT + d\tau,$$

ce qui voudrait dire que l'énergie électrique empruntée à l'extérieur se partagerait en deux parties égales ; une des moitiés serait convertie en travail mécanique et l'autre servirait à augmenter l'énergie électrocinétique T.

Si donc les courants avaient une valeur constante pendant toute la période, la moitié de l'énergie empruntée à l'extérieur serait employée à augmenter T. Mais à la fin d'une période, T doit reprendre la même valeur, il faut donc que pendant la commutation, l'énergie T diminue brusquement et juste autant qu'elle a augmenté pendant le reste de la période.

Pendant la durée très courte de la rupture, on peut admettre que l'on a :

$$d\tau = dH = dQ' = 0.$$

Il resterait donc :

$$dT = - dQ''.$$

Ce qui voudrait dire que la diminution de l'énergie électrocinétique T se retrouverait dans la chaleur de l'étincelle de rupture. Or cette diminution serait égale à l'augmentation de T pendant le reste de la période, c'est-à-dire à la moitié de l'énergie empruntée à l'extérieur. Ainsi le rendement de notre moteur serait seulement de $\frac{1}{2}$ et la moitié de l'énergie extérieure serait employée à démolir le collecteur.

Cette conséquence est inadmissible, et au contraire on se place dans des conditions telles que dQ'' soit très petit. Il est donc impossible d'admettre que les intensités des courants sont les mêmes qu'elles le seraient dans le régime.

Nous ne pouvons admettre non plus qu'il y a une phase d'établissement relativement très courte suivie d'une longue phase de régime. On aurait encore dans la phase du régime.

$$dT = d\tau = \frac{dH}{2}.$$

Pendant la phase d'établissement, le travail total $\int d\tau$ devrait être très faible, à cause de la courte durée de cette phase, on aura donc

$$\int dT = \int dH.$$

Si donc je désigne par T_1, τ_1, H_1 les intégrales T, τ, H pendant la phase de régime, par T_2, τ_2, H_2 les mêmes intégrales pendant la phase d'établissement, on aurait :

$$T_1 = \tau_1 = \frac{H_1}{2}; \quad T_2 = H_2.$$

D'autre part on a pendant la rupture

$$\int dT = -\int dQ'';$$

et si la commutation est parfaite

$$\int dT = 0,$$

l'intégration étant étendue à la durée de la rupture.

Comme cette même intégrale $\int dT$ est nulle quand on l'étend à toute une période, parce que T doit reprendre la même valeur après une période, on devrait avoir

$$T_1 + T_2 = 0,$$

et par conséquent :

$$H_2 = -\frac{H_1}{2};$$

ce qui voudrait dire que l'on restituerait à la source extérieure pendant la phase d'établissement, la moitié de l'énergie qu'on lui aurait empruntée pendant la phase de régime.

C'est encore là une conséquence fantastique, et il faut admettre que les courants varient, principalement dans les parties en court-circuit, pendant toute la durée de la période.

Alors T subit une double variation, la première ΔT due aux variations des intensités, la seconde $d\tau$ due au déplacement des circuits. Les deux intégrales

$$\int \Delta T, \quad \int d\tau,$$

étendues à toute la durée d'une période sont égales et de signe contraire.

Quelles que soient d'ailleurs ces variations, la résistance apparente du système n'en est pas affectée.

5. Supposons deux balais seulement, et $2n$ lames; je suppose que pendant la période considérée le premier balai est au contact des lames 1 et 2, le second au contact des lames $n+1$ et $n+2$; que pendant la période suivante, le prémier balai est au contact des lames $2n$ et 1, et le second des lames n et $n+1$.

Le circuit C_1 sera formé des spires $1, 2, \ldots, n$, en appelant spire 1 celle qui va de la lame 1 à la lame 2; le circuit C_2 se composera des spires $n+1, n+2, \ldots, 2n$.

Nous avons en outre les circuits C_3, C_4 et C_5 formés des spires en court-circuit 1 et $n+1$ et du circuit d'excitation.

Soit u_k le flux qui traverse la spire k, nous aurons :

$$U_1 = u_1 + u_2 + \quad . \quad . \quad . \quad + u_n,$$
$$U_2 = u_{n+1} + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + u_{2n};$$

de sorte que

$$U_1 + U_2 = \Sigma u.$$

($U_1 + U_2$ est le plus souvent nul, mais nous ne nous servirons pas de cela)

Or

$$E_1 = R_1 I_1 + \frac{dU_1}{dt}, \quad E_2 = R_2 I_2 + \frac{dU_2}{dt}, \quad R_1 = R_2.$$

Donc :

$$E_1 + E_2 = R_1 (I_1 + I_2) + \frac{d(U_1 + U_2)}{dt},$$

et

$$\int (E_1 + E_2) dt = R_1 \int (I_1 + I_2) dt + \int d(U_1 + U_2).$$

L'intégrale $\int d(U_1 + U_2)$ étendue à toute la durée d'une période est nulle; non seulement parce que $U_1 + U_2$ est le plus souvent nul, mais parce que après une période, chaque spire ayant pris la place de la précédente, Σu ne peut avoir changé. On a donc :

$$\int (E_1 + E_2) dt = R_1 \int (I_1 + I_2) d_t,$$

ce qui veut dire que le rapport de la force électromotrice *moyenne* à l'intensité *moyenne* est égal à la résistance.

Je termine ici ces réflexions qui me semblent montrer combien les phénomènes dans une dynamo continue s'écartent d'un régime régulier. On comprendra mieux ensuite, que dans l'appareil de M. Latour qui faisait l'objet de l'article cité, les phénomènes devaient également être tout à fait différents de ce qu'ils auraient été dans un régime régulier.

H. Poincaré.