ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 11 AVRIL 1904,

PRÉSIDENCE DE M. MASCART.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADEMIE.

PHYSIQUE. — *Théorie de la balance azimutale quadrifilaire.* Note de M. H. Poincaré.

« On trouvera, dans le même numéro, la description de cette balance. Voici la théorie de son fonctionnement :

» *Droites* D *et* Δ. — Tous les mouvements que peut prendre le système formé par le fléau, le flotteur qui le supporte et les quatre fils qui le maintiennent se ramènent à deux rotations autour des deux droites D et Δ. J'appelle ainsi deux droites qui rencontrent les quatre fils. Ceux-ci ne sont pas tout à fait verticaux, par suite de la torsion préalable qu'on leur donne; dans ces conditions, il y a deux droites, et deux seulement qui rencontrent les prolongements des quatre fils. Un point quelconque du fléau peut décrire une infinité de trajectoires toutes normales à une droite qui rencontre D et Δ.

» Dans la position d'équilibre initial, le système admet un plan de symétrie par rapport auquel les quatre fils sont deux à deux symétriques. La droite D est perpendiculaire au plan de symétrie; la droite Δ est dans ce plan.

» *Centre de gravité effectif.* — Le système mobile est soumis aux poids suivants : 1° poids du fléau; 2° poussée du mercure; 3° poids du flotteur; 4° poids des plateaux et de ce qu'ils portent.

» Toutes ces forces sont verticales; elles ont des valeurs parfaitement déterminées si le flotteur sort de la surface du mercure par une tige T suffisamment mince; elles auront une résultante unique, verticale, appliquée dans le solide fléau en un point G que j'appelle le *centre de gravité effectif*, et que nous allons définir plus complètement.

» *Construction du point* G_0. — Soit en B (*fig.* 1) la trace de l'arête du couteau autour duquel tourne le fléau; soit H le point d'application de la résultante II de la poussée du flotteur et du poids de ce flotteur. Enfin soit

Fig. 1.

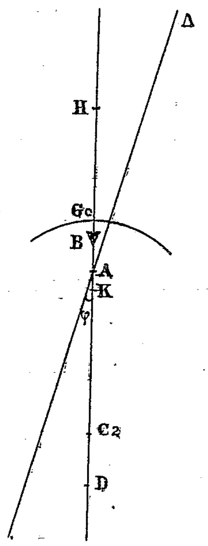
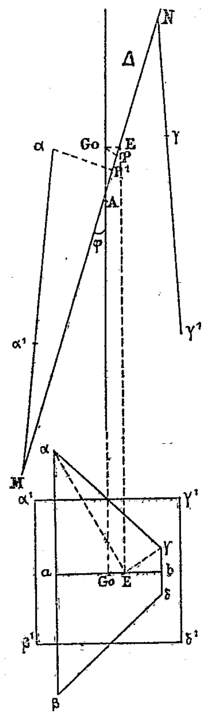


Fig. 2.



K le point d'application de la résultante P du poids du fléau et des poids (plateaux compris) qui lui sont appliqués.

» Les deux bifilaires sont soumis à une tension verticale

$$\Pi - P = p.$$

Dans toute rotation du système autour de la droite D, le plan de symétrie (plan de la figure) reste un plan de symétrie; l'arête du couteau et la droite KB restent dans ce plan de symétrie, qui demeure vertical. Donc la droite BH restera dans le prolongement de KB.

» Pour calculer le couple qui, sous l'influence d'un excès de poids placé dans l'un des plateaux, provoquera une rotation $d\omega_1$ autour de D, on calculera donc la position du centre de gravité effectif en appliquant la poussée Π en H et les poids $-$ P en K.

» Considérons, au contraire, une rotation $d\omega_2$ autour de la droite Δ; l'arête B restera très sensiblement horizontale, et, par suite, la droite BH restera verticale. Mais la droite KB s'incline; elle n'est donc plus dans le prolongement de BH. Il faut, par suite, calculer la position de G_0 en appliquant la poussée Π non plus en H, mais en B sur l'arête du couteau.

» *Rotation autour de la droite* D. *Stabilité du système.* — Quand un excès de poids dp est appliqué à l'un des plateaux, le fléau tourne comme il a été expliqué; le centre de gravité effectif prend un mouvement en sens inverse; sa verticale cesse de rencontrer la droite D.

» Ce mouvement n'intéresse pas la sensibilité de la balance, qui ne dépend que de la rotation autour de Δ, rotation qui est la seule observée.

» Mais la rotation autour de D intéresse la stabilité du système. Il faut que la résultante des forces appliquées en G_0 tende à s'opposer au mouvement provoqué autour de D par l'excès de poids dp.

» Cette condition se trouve réalisée par la façon dont l'appareil est disposé. Nous ne nous occuperons donc que de la rotation autour de Δ.

» *Rotation autour de la droite* Δ. *Sensibilité.* — Évaluons d'abord le moment M de l'excès de poids dp par rapport à Δ.

» Soit l la demi-longueur du fléau. Si Δ passe très près de G_0, ce qui sera le cas ordinaire, l sera notre bras de levier ou, plus exactement, un minimum de ce bras de levier. Seulement la composante efficace ne sera pas dp, mais $dp \sin\varphi$, φ étant l'angle de Δ avec la verticale. Donc

$$\mathrm{M} = l\,dp \sin\varphi.$$

» Soit $\mathrm{J} + \mathrm{J}'$ la composante verticale de l'accélération du point G_0. Le travail de nos forces verticales sera

$$p(\mathrm{J} + \mathrm{J}')\frac{dt^2}{2}$$

pendant le temps très petit dt qui s'écoule quand le système tourne de l'angle $d\omega_2$.

» D'autre part, ce même travail est égal à

$$\frac{\mathrm{M}\,d\omega_2}{2}.$$

» Il vient donc

$$\mathrm{M} = l\,dp \sin\varphi = p\,\frac{\mathrm{J} + \mathrm{J}'}{\omega^2}\,d\omega_2, \tag{1}$$

dans lequel

$$\omega = \frac{d\omega_2}{dt}$$

désigne la vitesse angulaire de rotation autour de Δ.

» La formule (1) sera la formule de sensibilité.

» *Construction de la droite* Δ. — Soient dans l'espace $\alpha\alpha'$ et $\gamma\gamma'$ les fils de l'un des bifilaires; $\alpha\alpha'$ prolongé vient couper le plan de symétrie en un point M; le fil symétrique $\beta\beta'$ passe également en M. De même $\gamma\gamma'$ prolongé coupe le plan de symétrie en un point N où passe aussi le fil symétrique $\delta\delta'$.

» La droite MN est la droite Δ. On voit qu'il est facile de disposer le quadrifilaire de façon à avoir une droite Δ à peu près quelconque.

» Représentant en $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ la trace des quatre fils dans un plan perpendiculaire à celui qui contient la droite Δ; l'inclinaison de Δ, et par suite la valeur de φ sera réglée par un choix convenable des longueurs des côtés des deux quadrilatères $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ formés par les quatre points d'attache supérieurs et les quatre points d'attache inférieurs du quadrifilaire.

» *Calcul de* $J + J'$. — La droite Δ décrira dans l'espace une certaine surface réglée R; pour un observateur invariablement lié au fléau, elle paraîtrait décrire une surface réglée R', et le mouvement du fléau est le même que si R' roulait sur R. Dans la position initiale, Δ est dans le plan de symétrie; le plan tangent commun à R et R' est perpendiculaire au plan de symétrie, il est donc le même tout le long de la génératrice. Par suite les éléments des surfaces R et R' sont des éléments de surface développable; par suite des éléments de cône.

» L'accélération peut donc se calculer comme si le système était mobile autour d'un point fixe situé quelque part sur la droite Δ; d'où cette conséquence que l'accélération que nous avons à calculer sera la résultante de deux autres: 1° de l'accélération centripète J due à la rotation autour de Δ, qui se calcule d'après la formule ordinaire de la force centrifuge; 2° de l'accélération J' due à l'accélération angulaire.

» Cette accélération angulaire sera représentée en grandeur et direction par une droite Θ qui coupe Δ au point fixe. Pour un point Q quelconque, l'accélération J' due à Θ sera représentée par le même vecteur que la vitesse qu'aurait ce même point dans une rotation représentée par la droite Θ.

» Θ est dans le plan tangent à R, plan qui est perpendiculaire au plan de symétrie. On peut supposer que Θ est elle-même perpendiculaire au plan de symétrie; ceci revient à supposer que la vitesse angulaire autour des droites Δ successives est constante.

» *Calcul de* J *et* J'. — Il nous faut calculer d'abord les composantes de J et J' pour les points d'attache supérieurs des fils du quadrifilaire, dans la direction de ces fils.

» Soit v la vitesse du point d'attache supérieur α du fil $\alpha\alpha'$ (*fig.* 2). On aura pour les composantes de l'accélération de α suivant le fil $\alpha\alpha'$, en désignant par ψ l'angle $M\alpha P$,

$$J + J' = \frac{v^2}{\alpha\alpha'}, \qquad J = \frac{v^2}{\alpha P}\cos\psi = \frac{v^2}{\alpha M}.$$

Or le fil étant sensiblement vertical, αM est très grand par rapport à $\alpha\alpha'$: J très petit par rapport à $J + J'$; de sorte qu'on a très sensiblement

$$J' = \frac{v^2}{\alpha\alpha'}.$$

» Calculons maintenant J et J' pour le point G_0. C'est la composante verticale qui nous intéresse seule, car, G_0 étant dans le plan de symétrie, le plan $G_0\Delta$ est vertical.

» Soit ω la vitesse angulaire autour de Δ. La vitesse linéaire v_1 de G_0 sera (*fig.* 2)

$$v_1 = \omega G_0 P_1.$$

D'ailleurs on a

$$G_0 P_1 = G_0 A \sin\varphi,$$

$$J = \omega^2 G_0 P_1 \sin\varphi. \tag{2}$$

» Pour calculer J' considérons (*fig.* 2) le trapèze $\alpha\beta\gamma\delta$ formé par les quatre points d'attache supérieurs des fils. Supposons d'abord le point G_0 dans le plan de ce trapèze, et soit E le point où la droite Δ perce ce même plan.

» On a

$$G_0 E = G_0 A \tang\varphi.$$

Soit λ la longueur commune des fils.

» Les composantes verticales de J' seront sensiblement les mêmes pour les points α, β et tous les points de la droite $\alpha\beta$. Pour le point *a* en particulier, on aura

$$\frac{\omega^2 \overline{\alpha E}^2}{\lambda}.$$

» De même pour tous les points de la droite $\gamma\delta$ et en particulier pour le point b, on aura sensiblement la même valeur

$$\frac{\omega^2 \overline{\gamma E}^2}{\lambda}.$$

» Pour tous les autres points du plan, on n'a qu'à interpoler linéairement puisque la droite Θ est horizontale.

» Supposons en particulier que le trapèze $\alpha\beta\gamma\delta$ diffère très peu d'un rectangle et que le point E soit très voisin du centre de ce rectangle, G_0 très voisin de E. Ce cas correspond, ainsi qu'on le verra, à celui qu'il faut réaliser pour obtenir une grande sensibilité.

» Alors on aura très sensiblement

$$\alpha E = \gamma E.$$

» L'accélération sera donc la même tout le long de la droite ab et comme G_0 se retrouve sur cette droite, la composante J' de son accélération sera par suite

$$J' = \frac{\overline{\alpha E}^2 \times \omega^2}{\lambda}. \tag{3}$$

» On a alors, en additionnant (2) et (3),

$$J + J' = \omega^2 \overline{G_0 P_1} \sin\varphi + \frac{\omega^2 \overline{\alpha E}^2}{\lambda}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (1) on a, pour l'équation de sensibilité,

$$l\,dp \sin\varphi = \left(G_0 P_1 \sin\varphi + \frac{\overline{\alpha E}^2}{\lambda}\right) p\, d\omega_2. \tag{4}$$

» Remarquons que, l'axe Θ étant horizontal, la composante verticale de J' sera la même pour tous les points d'une même verticale. J' et par suite la formule (4) resteront donc les mêmes que G_0, soit dans le plan de $\alpha\beta\gamma\delta$ ou en dehors de ce plan. »

MÉDECINE. — *Note sur la méthode graphique appliquée à la Pathologie humaine;* par M. **Lannelongue.**

« Je donne ce nom à une méthode qui a *pour but* de permettre aux yeux et à l'esprit d'apprécier, avec beaucoup plus d'exactitude, les modifications