

ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 18 AVRIL 1904,

PRÉSIDENCE DE M. MASCART.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADEMIE.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Sur la méthode horistique de Gylden.*

Note de M. H. POINCARÉ.

« Dans un Ouvrage intitulé *Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes* (Stockholm, imprimerie centrale, 1892), Gylden a exposé deux méthodes qu'il appelle *horistiques*; la première de ces méthodes soulève d'assez graves objections; M. Backlund et moi, nous avons montré qu'elle conduisait, dans certains cas, à des résultats inadmissibles et qu'on ne devait l'employer qu'avec circonspection (Cf. *Comptes rendus*, t. CXXXII, p. 50 et 291; *Bulletin astronomique*, t. XIX, p. 433). J'ai pensé, en conséquence, qu'il y avait lieu d'examiner de plus près la seconde de ces méthodes et de la soumettre à la discussion. Rappelons d'abord en quelques mots en quoi elle consiste.

» Gylden considère (*loc. cit.*, p. 227 et suiv.) l'équation suivante :

$$(1) \quad \frac{d^2 z}{dt^2} + z - \beta z^3 = X.$$

» Le coefficient de z que Gylden appelle Z est une constante, du moins dans la partie de l'Ouvrage que je cite (p. 227 à 234); je puis donc prendre les unités de façon à le réduire à 1.

» Nous avons

$$X = - \sum A_n \cos G_n, \quad G_n = 2\lambda_n \varphi + B_n;$$

les A_n , B_n , λ_n ont des valeurs constantes données et $2\lambda_n$ est voisin de 1.

» Gylden pose

$$z = \frac{y}{1 + \psi},$$

de façon que ψ et y sont définies par les équations

$$(2) \quad \frac{d^2\psi}{d\nu^2} - 2\nu^2\psi = (1 - \psi)\nu^2 - \beta \frac{y^2}{1 + \psi},$$

$$(3) \quad \frac{d^2y}{d\nu^2} + (1 - \nu^2)y = (1 + \psi)X + \frac{2}{1 + \psi} \frac{d\psi}{d\nu} \frac{dy}{d\nu} - \frac{2y}{(1 + \psi)^2} \left(\frac{d\psi}{d\nu} \right)^2 y.$$

» Nous appelons ν^2 une constante choisie de telle sorte que ψ soit une série trigonométrique; et nous devons intégrer (2) et (3) en faisant d'abord $\psi = 0$ dans les seconds membres, puis à la deuxième approximation, en remplaçant, dans ces seconds membres, ψ par la valeur trouvée en première approximation, et ainsi de suite:

» On trouve ainsi :

$$(4) \quad y = \sum x_n \cos G_n, \quad x_n = \frac{A_n}{4\lambda_n^2 - 1 + \nu^2},$$

et ensuite

$$(5) \quad \nu^2 = \frac{\beta}{2} \sum x_n^2, \quad \psi = \sum \frac{\beta x_n x_p}{4(\lambda_n \pm \lambda_p)^2 + 2\nu^2} \cos(G_n \pm G_p).$$

» La seconde équation (4) et la première équation (5) permettent de calculer les x et ν^2 et donnent pour ces quantités des valeurs limitées.

» Il est évident qu'on n'a le droit d'opérer ainsi qu'à la condition que les termes négligés dans les seconds membres de (2) et (3) soient plus petits que ceux dont on tient compte. Or, nous avons, dans le second membre de (2), un terme pour lequel il peut y avoir doute et qu'il convient de discuter; c'est le terme

$$2 \frac{d\psi}{d\nu} \frac{dy}{d\nu};$$

on trouve

$$(6) \quad 2 \frac{d\psi}{d\nu} \frac{dy}{d\nu} = \sum \frac{\beta x_i x_j x_n}{2(\lambda_i \pm \lambda_j)^2 + \nu^2} (\lambda_i \pm \lambda_j) \lambda_n \cos(G_i \pm G_j \pm G_n).$$

» Nous ne retiendrons que les termes critiques, c'est-à-dire ceux où le coefficient de ν est voisin de 1. Il suffit pour cela de prendre

$$G_i + G_j - G_n \quad \text{ou} \quad G_i - G_j + G_n.$$

» Soient α une quantité de l'ordre de A_n , et σ une quantité de l'ordre de $2\lambda_n - 1$.

» Deux cas sont à distinguer : ou bien σ^3 est grand par rapport à βx^3 , et alors x est de l'ordre $\frac{\alpha}{\sigma}$ et v^2 de celui de $\frac{\beta x^2}{\sigma^2}$, et le terme général de (6) est, au plus, de l'ordre de

$$\frac{\beta x^3}{\sigma} = \frac{\beta x^3}{\sigma^4} = x \frac{\beta x^2}{\sigma^3},$$

généralement petit par rapport à x et même, dans certains cas, par rapport à α ; dans ces cas, la méthode horistique est applicable, mais alors elle est inutile, puisque le terme dit *horistique* v^2 est très petit par rapport à $4\lambda_n^2 - 1$.

» Ou bien σ^3 est petit par rapport à βx^3 , ou est du même ordre; alors x est de l'ordre de $\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}}$; le terme général de (6) est alors (si l'on prend $\lambda_i + \lambda_j$, $G_i + G_j - G_n$) de l'ordre de

$$\beta x^3 = \alpha.$$

» Il est donc de même ordre que X , c'est-à-dire que les termes dont on tient compte.

» Si nous supposons que X se réduit à un seul terme $-A \cos G$, et que nous supposons σ négligeable devant v^2 ; il vient :

$$\begin{aligned} v &= x \cos G, & x &= \frac{2A}{\beta x^3}, & v^2 &= \frac{\beta}{2} x^2, \\ \psi &= \frac{\beta x^2}{4} \cos 2G, & \frac{dy}{dv} &= -x \sin G, & \frac{d\psi}{dv} &= -\frac{\beta x^2}{2} \sin 2G, \\ 2 \frac{dy}{dv} \frac{d\psi}{dv} &= \beta x^3 \sin 2G \sin G = A(\cos 3G - \cos G). \end{aligned}$$

» Il n'y a pas à retenir le terme en $\cos 3G$ qui n'est pas critique; mais le terme $-A \cos G$ est critique et l'on n'a pas le droit de le négliger, puisqu'il est juste égal au terme conservé X .

» Dans le cas où X se réduit à un seul terme, la méthode horistique *convenablement modifiée* est légitime, non pas pour la recherche de la solution générale de l'équation (1), mais pour celle d'une solution particulière qui est celle que j'appelle *solution périodique*. Cette méthode *correctement appliquée* donne

$$y = + \sqrt[3]{\frac{4A}{3\beta}} \cos G,$$

landis que la formule de Gyldén donne

$$\gamma = \sqrt[3]{\frac{2A}{\beta}} \cos G.$$

» L'erreur de Gyldén est d'autant plus singulière qu'il a lui-même traité le cas où X se réduit à un seul terme, par des formules qui deviennent exactes quand on veut se borner à la solution périodique.

» Ce n'est pas méconnaître les services éminents que Gyldén a rendus à la Science, que de signaler les erreurs qu'il a pu commettre et qui pourraient tromper ses successeurs; je crois que c'est, au contraire, rendre service à sa mémoire; aussi ne crains-je pas de formuler nettement ma conclusion.

» Ceux qui voudront appliquer la méthode horistique risquent d'arriver à des résultats fantastiques; il y a des cas où elle peut être inoffensive; il n'y en a pas où elle peut être utile.

» On voit, *a fortiori*, combien est vaine l'illusion des personnes qui espèrent tirer de la méthode horistique des développements uniformément convergents au sens géométrique du mot.

» Quant à la conclusion finale de l'Ouvrage, à savoir que les termes d'ordre élevé de la fonction perturbatrice ne peuvent jamais produire de libration, elle est manifestement fausse. »

CHIMIE MINÉRALE. — *Sur la présence de l'argon dans les gaz des fumerolles de la Guadeloupe.* Note de M. H. MOISSAN.

« Notre confrère, M. A. Lacroix, ayant eu l'obligeance de recueillir à notre intention quelques échantillons de gaz des fumerolles de la Guadeloupe, nous en donnons aujourd'hui l'analyse.

» Ces échantillons présentent un certain intérêt, en particulier le premier, qui a été recueilli par déplacement au fond d'une dépression de terrain qui formait cuvette et qui était remplie d'eau à 96°. Les gaz ainsi obtenus ne peuvent donc pas être souillés d'air atmosphérique. Les flacons ont été fermés dans l'eau chaude acide, au milieu de laquelle barbotaient les bulles gazeuses. Lorsque nous avons ouvert ces flacons sur la cuve à mercure, une forte dépression nous a indiqué que nos appareils avaient bien conservé le vide partiel qui résultait de l'augmentation de température des gaz au moment où ils avaient été recueillis.