Tome XL Samedi 23 Juillet 1904. 11e Année. — N° 30

L'Éclairage Électrique

REVUE HEBDOMADAIRE DES TRANSFORMATIONS

Électriques — Mécaniques — Thermiques

DE

L'ÉNERGIE

DIRECTION SCIENTIFIQUE

A. D'ARSONVAL, Professeur au Collège de France, Membre de l'Institut. — **A. BLONDEL**, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'Ecole des Ponts et Chaussées. — **Eric GÉRARD**, Directeur de l'Institut Électrotechnique Montefiore. — **G. LIPPMANN**, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Institut. — **D. MONNIER**, Professeur à l'École centrale des Arts et Manufactures. — **H. POINCARÉ**, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Institut. — **A. POTIER**, Professeur à l'École des Mines, Membre de l'Institut. — **A. WITZ**, Ingénieur des Arts et Manufactures, Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille.

ÉTUDE DE LA PROPAGATION DU COURANT EN PÉRIODE VARIABLE

SUR UNE LIGNE MUNIE DE RÉCEPTEUR [1]

ÉQUATION DES TÉLÉGRAPHISTES. — Je vous rappelle d'abord comment M. Pomey est arrivé dans son cours à l'équation des télégraphistes. Soit dx la longueur d'un élément de fil, λdx sa self-induction, ρdx sa résistance, γdx sa capacité, Edy la force électromotrice qui règne dans cet élément, V le potentiel. i l'intensité ; on aura (par l'équation de ohm).

$$\lambda \frac{di}{dt} + \rho i = E + \frac{dv}{dx}$$

D'autre part, la quantité d'électricité qui se trouve sur l'élément de fil est $\gamma V dx$ et l'équation de continuité nous donne :

$$\frac{di}{dx} = \gamma \frac{dv}{dt}$$

Cette dernière équation montre qu'il existe une fonction Φ, telle que l'on ait :

$$i = \gamma \frac{d\Phi}{dt}, \quad V = \frac{d\Phi}{dx}$$

et en remplaçant i et V par ces valeurs, nous voulons :

$$\gamma \lambda \frac{d^2\Phi}{dt^2} + \rho\gamma \frac{d\Phi}{dt} - \frac{d^2\Phi}{dx^2} = E \qquad (1)$$

[1] Cette étude est la reproduction in extenso d'une série de conférences, faites à l'École Supérieure de Télégraphie et complétant le cours de M. Pomey.

Digitized by Google

Original from HARVARD UNIVERSITY

Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:37 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

C'est l'*équation des télégraphistes*. Si l'on suppose que la force électromotrice E qui a donné naissance à la perturbation a cessé, l'équation devient :

$$\gamma\lambda\frac{d^2\Phi}{dt^2}+\rho\gamma\frac{d\Phi}{dt}-\frac{d^2\Phi}{dx^2}=0 \qquad (1\,bis)$$

qui nous apprend comment se propage une perturbation une fois produite. Si l'isolement de la ligne était imparfait, de façon que la ligne fût affectée d'une perte constante, il faudrait ajouter au premier nombre un terme en Φ. L'équation ainsi obtenue se ramènerait d'ailleurs aisément à la forme (1 *bis*).

Soit en effet :

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2}+2\beta\frac{d\Phi}{dt}+\gamma\Phi-\alpha\frac{d^2\Phi}{dx^2}=0$$

l'équation complète, où β, γ et α sont des coefficients quelconques. Posons :

$$\Phi=Ue^{Kt}$$

l'équation conserve la même forme et devient :

$$\frac{d^2U}{dt^2}+2(K+\beta)\frac{dU}{dt}+(K^2+2K\beta+\gamma)U-\alpha\frac{d^2U}{dx^2}=0$$

Si alors on prend $K=-\beta$ on fait disparaître le terme en $\frac{dU}{dt}$. Si au contraire on choisit K de façon à satisfaire à l'équation :

$$K^2+2K\beta+\gamma=0$$

on fait disparaître le terme en U et on est ramené à l'équation (1 *bis*).

Reprenons l'équation (1 *bis*); il est clair que nous pouvons y satisfaire en faisant :

$$\Phi=e^{qt+px}$$

pourvu que q et p soient des constantes liées par la relation :

$$\gamma\lambda q^2+\rho\gamma q-p^2=0. \qquad (2)$$

Si q et p sont des constantes *imaginaires* satisfaisant à la même relation on satisfera encore à l'équation (1 *bis*) en faisant

$$\Phi=\text{partie réelle } e^{qt+px}.$$

Si q est *purement* imaginaire, la solution ainsi trouvée est une fonction périodique du temps ; c'est une solution *isochrone*.

Théorie rigoureuse de la propagation. — Mais avant d'aller plus loin, une question préjudicielle se pose. La façon dont nous avons établi l'équation (1) est-elle à l'abri de toute objection ? Nous avons traité la résistance ρ comme une constante ; or on sait que les courants à alternance rapide ont une tendance à se porter à la surface du conducteur, de sorte qu'une petite partie de la section de ce conducteur est utilisée et que sa résistance semble augmenter. Ainsi la résistance devrait dépendre de la fréquence, c'est-à-dire de q et être plus grande pour les fréquences élevées que pour les faibles fréquences. Il est donc nécessaire pour justifier l'équation que nous avons adoptée de recourir à une analyse plus complète. Je vais d'abord vous rappeler les équations du champ électromagnétique, telles

Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:37 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

que M. Pomey les a établies dans son cours (p. 252).

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, & \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} &= 4\pi CX + K\frac{dX}{dt}\\
\frac{d\beta}{dt} &= \frac{dX}{dZ} - \frac{dZ}{dx}, & \frac{d\gamma}{dx} - \frac{d\alpha}{dZ} &= 4\pi CY + K\frac{dY}{dt}\\
\frac{d\gamma}{dt} &= \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}, & \frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx} &= 4\pi CZ + K\frac{dZ}{dt}
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

X, Y, Z représentent les composantes de la force électrique, C la conductibilité, K le pouvoir inducteur.

Supposons un conducteur cylindrique (génératrices parallèles à l'axe de x) et une perturbation se propageant le long de ce conducteur. A l'extérieur du conducteur, C sera nul et K sera égal à l'inverse du carré de la vitesse de la lumière. A l'intérieur du conducteur, C est très grand, K est inconnu mais nous verrons plus loin qu'il n'intervient pas, de sorte qu'on peut le négliger.

Dans ces conditions le champ électromagnétique est de révolution autour de l'axe des x, les lignes de force magnétique sont des cercles dans des plans perpendiculaires à cet axe, les lignes de force électrique sont des courbes planes situées dans des plans méridiens, c'est-à-dire dans des plans passant par l'axe des x.

Nous pouvons poser alors :

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \frac{d\pi}{dz}, \qquad \gamma = -\frac{d\pi}{dy} \tag{4}$$

d'où l'on déduit immédiatement :

$$\left.\begin{aligned}
4\pi CX + K\frac{dX}{dt} &= \frac{d^2\pi}{dy^2} + \frac{d^2\pi}{dz^2}\\
4\pi CY + K\frac{dY}{dt} &= -\frac{d^2\pi}{dxdy}\\
4\pi CZ + K\frac{dZ}{dt} &= -\frac{d^2\pi}{dxdz}
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Je dis que l'on aura également :

$$4\pi C\frac{d\pi}{dt} + K\frac{d^2\pi}{dt^2} - \frac{d^2\pi}{dx^2} - \frac{d^2\pi}{dy^2} - \frac{d^2\pi}{dz^2} = 0 \tag{6}$$

En effet, on peut déduire des équations précédentes que les dérivées du premier membre de (6) tant par rapport à y que par rapport à z sont nulles ; c'est-à-dire que ce premier membre est une fonction de x et de t. Mais la fonction π n'est déterminée par les équations (4) *qu'à une fonction arbitraire près de x et de t.* On pourra alors toujours disposer de cette fonction arbitraire de telle façon que ce premier membre se réduise à zéro.

Cela posé, le champ étant de révolution, si nous passons aux coordonnées semi-polaires en faisant ;

$$y = r\cos\theta, \quad z = r\sin\theta,$$

la fonction π ne dépendra que de x, t et r, et l'équation (6) deviendra :

$$4\pi C\frac{d\pi}{dt} + K\frac{d^2\pi}{dt^2} - \frac{d^2\pi}{dx^2} - \frac{d^2\pi}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d\pi}{dr} = 0. \tag{7}$$

Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:37 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Cherchons à satisfaire à cette équation en faisant

$$\pi = f(r)\, e^{qt + px}$$

il viendra :

$$\frac{d^2\pi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\pi}{dr} = (4\pi Cq + Kq^2 - p^2)\pi \tag{8}$$

Nous ferons :

$$(4\pi Cq + Kq^2 - p^2) = a \quad \text{dans l'air}$$
$$(4\pi Cq + Kq^2 - p^2) = a' \quad \text{dans le conducteur.}$$

et l'équation aura la forme : (dans l'air par exemple)

$$\frac{d^2\pi}{dr^2} + \frac{1}{2}\frac{d\pi}{dr} = a\pi \tag{8bis}$$

Propriétés des fonctions de Bessel. — Cette équation ne nous est pas inconnue. Elle a été envisagée par M. Pomey dans son cours (p. 278) ; c'est d'ailleurs une des transformées de l'équation de Bessel qui s'écrit comme on sait :

$$J'' + \frac{1}{x} J' + J = 0 \tag{9}$$

où J′ et J″ représentent les dérivées successives de J par rapport à x. Alors la solution de l'équation (8 *bis*) sera évidemment :

$$\pi = J(r\sqrt{-a})$$

L'équation (9) admet comme intégrale.

$$\int \frac{e^{xzi}dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

L'intégrale peut être prise soit de -1 à $+1$, soit de -1 à l' ∞, pourvu que z tende vers l'infini de telle façon que l'exponentielle e^{izx} tende vers zéro.

Si l'on intègre de -1 à $+1$, on obtiendra l'intégrale :

$$\pi\vartheta_0 = \pi\left[1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{(1!)^2} + \left(\frac{x}{2}\right)^4 \frac{1}{(2!)^2} - \left(\frac{x}{2}\right)^6 \frac{1}{(3!)^2} + \left(\frac{x}{2}\right)^8 \frac{1}{(4!)^2} \cdots\cdots\right.$$

où ϑ_0 est la fonction de Bessel proprement dite ; nous voyons que cette fonction est holomorphe pour toutes les valeurs de x. Pour x réel, elle est réelle et subit des oscillations analogues à celles du cosinus.

Dès que x dépasse la valeur 2, on a très sensiblement :

$$J_0 = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2\pi x}}$$

Pour x *purement imaginaire*, tous les termes du développement sont positifs, d'où il suit que la fonction ϑ_0 est constamment réelle, positive et croissante avec le module de x, Si ix est positif et très grand on a très sensiblement :

$$\vartheta_0 = \frac{e^{ix}}{\sqrt{2\pi i x}}$$

Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:37 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Si au contraire on intègre, de -1 à l'∞ on obtiendra une autre intégrale que j'appellerai I_0 et dont les propriétés essentielles seront les suivantes ; pour $x = 0$ elle devient infinie, pour x très petit, elle est sensiblement proportionnelle à $\log x$, et pour x très grand elle est sensiblement proportionnelle à

$$\frac{e^{-ir}}{\sqrt{x}}$$

Si on intégrait de $+1$ à l'∞, on obtiendrait une troisième intégrale, qui pour x très grand serait sensiblement proportionnelle à

$$\frac{e^{ir}}{\sqrt{x}}$$

Suite de la théorie de la propagation. — D'après cela on aura dans le conducteur

$$\pi = e^{qt+px} J\left(r\sqrt{-a'}\right)$$

J étant l'une des intégrales de (9) et dans l'air :

$$\pi = e^{qt+px} J\left(r\sqrt{-a}\right)$$

J étant une autre intégrale.

Quelle est maintenant celle de ces intégrales qu'il s'agit de choisir :

Dans le conducteur, l'intégrale choisie doit être proportionnelle à I_0, car elle doit rester finie pour $r = 0$, dans l'air elle doit être proportionnelle à I, sans quoi à une très grande distance de l'axe, la perturbation se réduirait à deux ondes planes, l'une se rapprochant de l'axe, l'autre s'en éloignant, et en effet on aurait alors :

$$J = cI + c'I'$$

où I' serait l'intégrale obtenue en intégrant de $+1$ à l'∞ et c et c' deux coefficients constants ; on aurait donc pour r très grand :

$$\pi = \frac{1}{\sqrt{r}}\left(c\, e^{qt+px-r\sqrt{a}} + c' e^{qt+px+r\sqrt{a}}\right)$$

Le premier terme représente une onde s'éloignant de l'axe, le second une onde se rapprochant de l'axe. Comme l'axe est l'origine de la perturbation, nous ne pouvons avoir que l'onde qui s'éloigne de l'axe I il faut donc que c' soit nul, c'est-à-dire que J soit proportionnel à I.

Comme le rayon du fil est très petit, nous aurons donc dans l'air :

$$J = A \log r$$

A étant une constante, et dans le fil :

$$J = B J_0\left(r\sqrt{-a'}\right)$$

B étant une constante.

Il y a une discontinuité à la surface de séparation des deux milieux (conducteur et air), c'est-à-dire à la surface du fil. Il faut que la composante tangentielle de la force magnétique, et celle de la force électrique soient continues.

Force magnétique. — Elle est égale à $\frac{d\pi}{dr}$; elle est donc dans l'air $\frac{A}{r}$ et dans le fil

$$B\sqrt{-a'}\, J'_0\left(r\sqrt{-a'}\right)$$

Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:37 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

d'où une première équation :

$$B\sqrt{-a'}\,J'_0(r\sqrt{-a'}) = \frac{A}{r} \tag{10}$$

(r représente ici le rayon du fil).

Force electrique. — Il s'agit ici de la composante tangentielle, c'est-à-dire de X. On a d'ailleurs :

$$4\,r\,CX + K\frac{dX}{dt} = (4\pi C + Kq)X = \frac{d^2\pi}{dy^2} + \frac{d^2\pi}{dz^2} = \frac{d^2\pi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\pi}{dr}$$

d'où dans l'air : (C = 0) :

$$KqX = a\pi = ae^{qt+px}A\log r$$

et dans le conducteur (K = 0)

$$4\pi CX = a'\pi = a'e^{qt+px}BJ_0\,(r\sqrt{-a'})$$

d'où une deuxième équation :

$$4\,rCaA\log r = BKq\,a'J_0(r\sqrt{-a'}) \tag{11}$$

en éliminant le rapport $\frac{A}{B}$ entre les équations (10) et (11), on trouve :

$$4\pi Ca\log r\,[r\sqrt{-a'}\,J'_0(r\sqrt{-a'})] = Kqa'J_0(r\sqrt{-a'}) \tag{12}$$

Si $r\sqrt{-a'}$ est petit, on pourra réduire les développements de J_0 et de J'_0 à leurs premiers termes, ce qui donne :

$$J_0 = 1, \quad r\sqrt{-a'}\,J'_0 = \frac{a'r^2}{2}$$

et l'équation (12) devient :

$$2\pi Car^2\log r = Kq \tag{13}$$

or

$$a = Kq^2 - p^2$$

je puis donc écrire

$$Kq^2 - \frac{Kq}{2\pi Cr^2\log r} - p^2 = 0 \tag{14}$$

Ce n'est pas autre chose que l'équation (2); on a en effet, si r est petit

$$\gamma = -\frac{K}{2\log r}, \qquad \lambda = -2\log r, \qquad \rho = \frac{1}{\pi Cr^2}$$

L'équation (2) étant équivalente à l'équation (1), l'équation des télégraphistes se trouve vérifiée *dans le cas où $r\sqrt{-a'}$ est petit.*

Si au contraire $r\sqrt{-a'}$ est grand, on aura sensiblement :

$$J_0 = \frac{1-i}{\sqrt{\pi r\sqrt{-a'}}}\,e^{r\sqrt{-a'}}, \quad J'_0 = -\frac{(1-i)\,i}{\sqrt{\pi r\sqrt{-a'}}}\,e^{r\sqrt{-a'}}$$

Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:37 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

ce qui montre que J_0 croît rapidement avec r et par conséquent que le courant est localisé à la surface du fil. L'équation (12) devient alors :

$$4\pi Car \log r = Kq\sqrt{a'}$$

ou si l'on observe que

$$a' = 4\pi Cq$$

car $K\,q^2 - p^2$ est négligeable devant $4\,\pi Cq$

$$K\,q^2 - p^2 = \frac{Kq\sqrt{q}}{r \log r \sqrt{4\,\pi C}} \tag{15}$$

On voit que dans ce cas, l'équation des télégraphistes n'est plus applicable.

Évaluations numériques. — On a dans le cuivre $C = 1{,}25.10^{-4}$, et dans l'air $K = \frac{1}{9}\,10^{-20}$. Avec les oscillations hertziennes on a : $\frac{q}{i} = \pi\,10^8$. Donc Kq^2 est plus de 400 000 000 de fois plus petit que $4\pi Cq$; nous pouvons donc négliger dans a' les termes en $Kq^2 - p^2$ devant $4\pi Cq$; et cela quand même K serait dans un métal beaucoup plus grand que dans l'air. Cela est vrai pour les oscillations hertziennes et *a fortiori* pour les oscillations plus lentes.

Quel est maintenant l'ordre de grandeur de $r\sqrt{-a'} = \sqrt{-a4\pi Cq}$. S'il y a 10^{2n} vibrations par seconde, on a $|q| = \pi\,10^{2n}$; d'où : pour $r = 0{,}2$:

$$|r\sqrt{-a'}| = 0{,}2\,n\sqrt{5}\;10^{n-2}$$

Avec une fréquence de 10 000 on aura donc $|r\sqrt{-a'}|$ voisin de 1 et la formule (14) restera sensiblement applicable ; avec une fréquence hertzienne, on aurait $|r\sqrt{-a'}|$ voisin de 100 et il faudra appliquer la formule (15).

Cas extrêmes. — Si la fréquence est très élevée, le terme en q est négligeable devant le terme en q^2 et l'équation (14) se réduit à :

$$Kq^2 - p^2 = 0$$

L'équation des télégraphistes peut donc avec les grandes fréquences être réduite à :

$$\gamma\lambda\,\frac{d^2\Phi}{dt^2} - \frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0$$

en supprimant le terme en $\frac{d\Phi}{dt}$, c'est l'équation des cordes vibrantes. Il est vrai qu'avec une fréquence hertzienne, l'équation (14) n'est plus valable, et qu'il faut la remplacer par l'équation (15) ; le terme en q est alors remplacé par un terme de $q\sqrt{q}$, il est donc plus grand que si l'on conservait l'équation (14), il n'en reste pas moins négligeable devant un terme en q^2.

Avec les oscillations hertziennes, par conséquent, tout se passe comme si le terme en $\frac{d\Phi}{dt}$ n'existait pas.

C'est ce qui nous permet d'appliquer l'équation des télégraphistes même aux cas où la fréquence devient très grande parce qu'alors les termes par lesquels les équations (14) et (15) diffèrent deviennent l'un et l'autre négligeables.

Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:37 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

L'autre cas extrême nous est fourni par les câbles sous-marins. Lord Kelvin en a établi la théorie en négligeant le terme en $\frac{d^2\Phi}{dt^2}$, c'est-à-dire en réduisant l'équation des télégraphistes à celle de la propagation de la chaleur.

Qu'est-ce qui lui en donnait le droit ? Le câble est ici formé : 1° d'une âme métallique ; 2° d'une enveloppe isolante ; 3° d'une enveloppe extérieure conductrice formée par l'armature du fil et maintenue au potentiel zéro parce qu'elle est en communication directe avec l'eau de la mer. C'est un véritable condensateur, et quand le fil prend une charge, l'armature prend une charge égale et de signe contraire. Les courants dans le fil et l'armature sont donc égaux et de signe contraires, et produisent des effets d'induction inverses de sorte que la self-induction est à peu près nulle : le terme en λ disparaît donc dans l'équation des télégraphistes.

(*A suivre.*)

H. Poincaré.

SUR LA MESURE

DU FLUX LUMINEUX DES LAMPES A INCANDESCENCE

Dans un des récents numéros de l'*Éclairage Électrique* (voir numéro du 31 décembre 1903) a paru le résumé d'une étude très intéressante de M. Alexander Russel sur la mesure des intensités lumineuses moyennes, moyennes sphériques et hémisphériques des lampes à incandescence.

L'auteur y présente en particulier un nouvel appareil permettant la détermination rapide et exacte de leur intensité moyenne sphérique ou hémisphérique.

J'avais présenté en 1901 à M. Janet, directeur du Laboratoire Central d'Électricité et à M. Laporte sous-directeur, le principe de l'appareil décrit par M. Russel. Des fonds avaient été affectés à sa construction, et j'attendais que l'appareil eût été réalisé et expérimenté pour en publier le principe et les résultats.

Il est à regretter que dans l'exposé de ses travaux sur les lampes à incandescence, M. Russel n'ait pas fait intervenir la notion fondamentale du flux lumineux.

Le lecteur me permettra d'exposer à nouveau le principe de cet appareil tel que je l'avais compris, en me basant sur la notion du flux lumineux et en indiquant les différentes solutions plus ou moins pratiques qui résolvent le problème de la mesure directe du flux lumineux des lampes à incandescence ou de petites sources lumineuses.

Avant de développer ce sujet, je vais dire quelques mots sur les facteurs qui déterminent une source lumineuse.

Généralités. — Un foyer lumineux quelconque est bien déterminé au point de vue photométrique (laissant de côté l'étude des radiations dont se compose sa lumière) lorsqu'on connaît le flux lumineux total émis par cette source et sa répartition lumineuse dans différents méridiens.

Dans le cas d'une source lumineuse symétrique autour d'un axe, tel l'arc voltaïque, la connaissance du flux lumineux total et de la répartition lumineuse dans un méridien est seule nécessaire.

La valeur du flux lumineux total donne l'importance de la source ; les courbes de répar-

Digitized by Google Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:37 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Tome XL. Samedi 30 Juillet 1904. 11e Année. — N° 31

L'Éclairage Électrique

REVUE HEBDOMADAIRE DES TRANSFORMATIONS

Électriques — Mécaniques — Thermiques

DE

L'ÉNERGIE

DIRECTION SCIENTIFIQUE

A. D'ARSONVAL, Professeur au Collège de France, Membre de l'Institut. — **A. BLONDEL**, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'Ecole des Ponts et Chaussées. — **Eric GÉRARD**, Directeur de l'Institut Électrotechnique Montefiore. — **G. LIPPMANN**, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Institut. — **D. MONNIER**, Professeur à l'École centrale des Arts et Manufactures. — **H. POINCARÉ**, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Institut. — **A. POTIER**, Professeur à l'École des Mines, Membre de l'Institut. — **A. WITZ**, Ingénieur des Arts et Manufactures, Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille.

ÉTUDE DE LA PROPAGATION DU COURANT EN PÉRIODE VARIABLE

SUR UNE LIGNE MUNIE DE RÉCEPTEUR (*suite*)

Intégration de l'équation. — Nous considérerons d'abord une ligne indéfinie, pas de fuite, et pas de force électromotrice, sauf à l'origine ($x = 0$) où régnera une force électromotrice variable $f(t)$.

Nous choisirons les unités de façon que :

$$\gamma = 1, \quad \rho\gamma = 2, \quad \gamma\lambda = 1$$

quitte à rétablir plus tard l'homogénéité.

On aura alors, tant pour $x > 0$ que pour $x < 0$:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + 2\frac{d\Phi}{dt} - \frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0; \quad i = \frac{d\Phi}{dt}; \quad V = -\frac{d\Phi}{dx} \tag{16}$$

Pour $x = 0$, Φ sera continu, mais les valeurs de $\frac{d\Phi}{dx}$ pour $x = -\varepsilon$ et pour $x = +\varepsilon$ différeront de $f(t)$.

On voit que par symétrie, Φ et i ne changent pas et V se change en $-V$ quand on change x en $-x$. On a donc pour $x = +\varepsilon$, $V = \frac{1}{2}f(t)$ et pour $x = -\varepsilon$, $V = -\frac{1}{2}f(t)$.

Solution isochrone. — Soit d'abord $f(t) = e^{iqt}$, q étant réel ; Φ devra être proportionnel à e^{iqt} ; d'où :

$$\Phi = Ae^{iqt+rx} + Be^{iqt-rx}$$

Digitized by Google

Original from HARVARD UNIVERSITY

Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:38 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

où A et B sont des coefficients constants, et où p est donné par :

$$q^2 - 2iq - p^2 = 0$$

Nous supposerons que la partie réelle de qp est négative, alors le premier terme de Φ représente une onde marchant vers la droite, c'est-à-dire vers les x positifs et le second terme représente une onde marchant vers la gauche.

Comme l'origine de la perturbation est en $x = 0$, il ne doit y avoir pour $x > 0$ qu'une onde marchant vers la droite et pour $x < 0$ une onde marchant vers la gauche. On aura donc pour $x > 0$:

$$\Phi = Ae^{i(qt + px)}$$

et par symétrie pour $x < 0$:

$$\Phi = Ae^{i(qt - px)}$$

Il reste à déterminer A ; on a :

$$V = Aipe^{i(qt + px)}$$

ce qui doit se réduire à $\frac{1}{2} e^{iqt}$ pour $x = 0$.

On a donc :

$$A = \frac{1}{2ip}$$

Solution générale. — Supposons $f(t)$ quelconque ; cette fonction peut se développer par l'intégrale de Fourier sous la forme :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(q)\, e^{iqt}\, dq$$

avec :

$$\Theta(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-iq\tau}\, d\tau$$

La fonction $f(t)$ est ainsi décomposée en ses composantes isochrones ; il suffit de considérer séparément chacune de ces composantes, par exemple la composante :

$$\Theta(q)\, e^{iqt}\, dq$$

elle donne pour $x > 0$

$$\Phi = \frac{\Theta(q)\, dq}{2ip}\, e^{i(qt + px)}$$

On aura donc pour la solution générale :

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(q) \frac{1}{2ip}\, e^{i(qt + px)}\, dq$$

ou en remplaçant $\Theta(q)$ par sa valeur :

$$\Theta = \int\int f(\tau) \frac{1}{4i\pi p}\, e^{i(qt - q\tau + px)}\, dq\, d\tau$$

Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:38 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

ou en renversant l'ordre des intégrations :

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, d\tau \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{4i\pi p}\, e^{i[q(t-\tau)+px]} \right]$$

Ebranlement élémentaire. — Je suppose que $f(t)$ soit nul sauf quand t est compris entre o et ε, et cela de telle façon que dans cet intervalle $f(t)$ soit très grand et que :

$$\int_0^{\varepsilon} f(t)\, dt = 1$$

C'est cè que nous pouvons appeler un ébranlement élémentaire se produisant à l'instant zéro. Notre formule devient alors :

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{4i\pi\sqrt{q^2 - 2iq}}\, e^{i(qt+px)}$$

C'est cette intégrale représentant l'effet d'un ébranlement élémentaire, qu'il s'agit maintenant d'étudier. La fonction sous le signe $\int$ admet deux points singuliers :

$$q = 0 \quad , \quad q = 2i$$

Nous voulons que la partie réelle de $\frac{q}{p}$ reste négative, au moins pour q réel ; pour cela nous évitons de franchir la droite qui joint les deux points singuliers et qui jouera le rôle de coupure. Sur la figure, A et B représentent les deux points singuliers, AB est la coupure ; nous devons prendre notre intégrale depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, c'est-à-dire le long du chemin CMD ; le point C est $-\infty$, le point D est $+\infty$; nous allons de C en D en suivant l'axe des quantités réelles ; seulement nous décrivons autour du point A un petit arc de cercle M de façon à éviter le point singulier A et à ne pas franchir la coupure. On peut aussi joindre C à D par deux autres chemins, à savoir les deux demi-circonférences de rayon très grand CND et CPD.

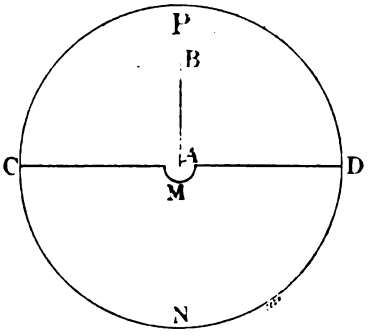

Fig. 1.

Si q est très grand, on a sensiblement $p = -q$; de sorte que l'exponentielle $e^{i(qt+px)}$ se réduit à :

$$e^{iq(t-x)}$$

d'où cette conséquence ; si $t < x$, cette exponentielle sera sensiblement nulle le long de la demi-circonférence CND ; si $t > x$, elle sera sensiblement nulle le long de la demi-circonférence CPD.

Donc si $t < x$; nous pourrons dire (*l'intégrale le long de* CND *étant nulle*) que Φ est égal à l'intégrale prise le long du contour CMDNC, c'est-à-dire à zéro ; puisque nous n'avons aucun point singulier à l'intérieur du contour.

Cela veut dire que Φ est nul en tous les points qui n'auraient pu être atteints par une perturbation partie de l'origine à l'instant de l'ébranlement et marchant avec une vitesse 1, c'est-à-dire avec nos unités, avec la vitesse de la lumière.

Si au contraire $t > x$, nous voyons que (*l'intégrale le long de* CPD *étant nulle*) Φ est égal à l'intégrale prise le long du contour CMDPC, ou ce qui revient au même le long d'un

Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:38 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY

contour quelconque enveloppant les deux points singuliers, par exemple le long d'un cercle de rayon très grand.

Calculons cette intégrale et pour cela posons :

$$(q - i)\, t + px = \rho \sqrt{x^2 - t^2}$$
$$pt + (q - i)\, x = \mu \sqrt{x^2 - t^2}$$

d'où

$$\rho^2 - \mu^2 = p^2 - (q - i)^2 = 1$$

et

$$\frac{dq}{p} = \frac{dp}{q - i} = \frac{d\rho}{\mu}$$

de sorte que notre intégrale devient :

$$\Phi = \int \frac{d\rho}{4i\pi\mu}\, e^{-t + i\rho\sqrt{x^2 - t^2}} = e^{-t} \int \frac{d\rho}{4\pi} \frac{e^{i\rho\sqrt{x^2 - t^2}}}{\sqrt{1 - \rho^2}}$$

Lorsque q décrit un cercle de rayon très grand, il en est de même de ρ, notre intégrale doit donc être prise le long d'un cercle de rayon très grand, mais comme la fonction sous le signe $\int$ n'a que deux points singuliers $\rho = \pm 1$, il reviendra au même d'intégrer le long d'un contour quelconque enveloppant ces deux points singuliers; par exemple, on peut aller de -1 à $+1$ et revenir de $+1$ à -1, en contournant les points singuliers par des cercles infiniment petits comme sur la figure :

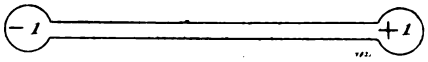

Fig. 2.

Il vient alors :

$$\Phi = e^{-t} \int_{-1}^{+1} \frac{d\rho}{2\pi} \frac{e^{i\rho\sqrt{x^2 - t^2}}}{\sqrt{1 - \rho^2}}$$

Nous reconnaissons la fonction J_0 ; on a donc :

$$\Phi = \frac{e^{-t}}{2} J_0 \left(\sqrt{x^2 - t^2}\right)$$

Comme nous supposons que $t > x$, l'argument de J_0 est purement imaginaire, cette fonction est donc positive et croît constamment avec le module de son argument.

Supposons x fini et t très grand, on aura sensiblement :

$$\Phi = \frac{e^{-t}}{2} \frac{e^{\sqrt{t^2 - x^2}}}{\sqrt{2\pi}\ \sqrt[4]{t^2 - x^2}}$$

ou avec la même approximation :

$$\Phi = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Voilà avec quelle lenteur décroît Φ ; heureusement ce sont ses dérivées qui nous intéressent et elles décroissent plus rapidement.

Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:38 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Si t et x croissaient en même temps et de telle façon que :

$$\lim \frac{t}{x} = \alpha > 1$$

$\sqrt{t^2 - x^2}$ serait sensiblement égal à $x\sqrt{\alpha^2 - 1}$ d'où :

$$\Phi = \frac{e^{t(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{t}\sqrt[4]{\alpha^2 - 1}}$$

Variations de Φ. — Nous pouvons poser :

$$F(x, t) = 0 \text{ pour } t < x$$
$$F(x, t) = \frac{e^{-t}}{2} J_0\left(\sqrt{x^2 - t^2}\right) \text{ pour } t > x$$

Qu'arrive-t-il quand on fait varier t, x restant constant. Si x est assez grand, et t plus grand que x, $\sqrt{t^2 - x^2} = \sqrt{(t - x)(t + x)}$ sera grand et nous pourrons poser :

$$J_0 = \frac{e^{\sqrt{t^2 - x^2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{t^2 - x^2}}$$

Soit $t^2 - x^2 = u^2$, nous aurons :

$$2\sqrt{2\pi}\, F = e^{-\sqrt{u^2 + x^2}} \frac{eu}{\sqrt{u}}$$

Ecrivons que $\frac{dF}{du} = 0$, il viendra :

$$1 - \frac{1}{2u} + \frac{u}{\sqrt{u^2 + x^2}} = 0$$

Posons :

$$u = \frac{2x\xi}{1 - \xi^2}, \quad \sqrt{u^2 + x^2} = x\,\frac{1 + \xi^2}{1 - \xi^2}$$

l'équation deviendra :

$$1 - \frac{1 - \xi^2}{4x\xi} - \frac{2\xi}{1 + \xi^2} = 0$$

d'où :

$$4x = \frac{(1 + \xi)(1 + \xi^2)}{\xi(1 - \xi)}$$

Quand t varie de x à l'∞, ξ varie de 0 à 1 ; faisons donc varier ξ de 0 à 1 ; la valeur de x qui satisfait à l'équation précédente (*c'est-à-dire pour laquelle* $\frac{dF}{du}$ *s'annule*) sera positive ; infinie pour $\xi = 0$ elle décroîtra jusqu'à un certain minimum x_0, qui correspondra à la valeur de ξ donnée par l'équation réciproque :

$$\xi^4 - 2\xi^3 - 2\xi^2 - 2\xi + 1 = 0$$

et croît ensuite jusqu'à l'∞ qui est atteint pour $\xi = 1$.

Si donc x est $< x_0$, la fonction F n'a ni maximum ni minimum ; si $x > x_0$, elle a un

Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:38 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

minimum et un maximum. Les variations de cette fonction sont alors représentées par les figures suivantes :

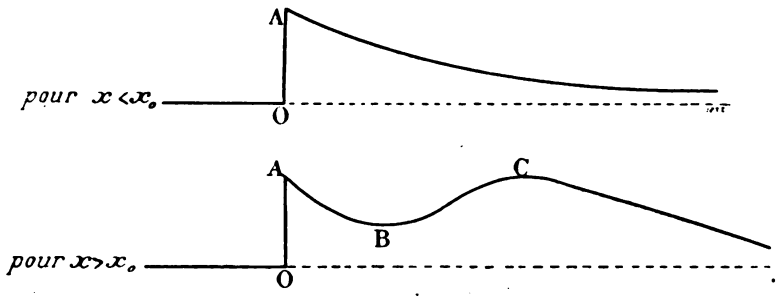

Fig. 3.

Mais la formule précédente n'est valable que pour u suffisamment grand ; lorsque x est très grand, le minimum de F, tel que le donnerait la formule précédente, aurait lieu pour une valeur de u voisine de 2. Dans ces conditions, la formule n'est plus applicable, de sorte qu'on peut se demander si le minimum existe encore. Or il vient :

$$J_0 = 1 + \frac{u^2}{4} + \ldots\ldots$$

$$e^{-\sqrt{u^2+x^2}} = e^{-x}\, e^{-\frac{u^2}{2x}} = e^{-x}\left(1 - \frac{u^2}{2x}\right) + \ldots\ldots$$

d'où

$$F = \frac{e^{-x}}{2}\left[1 + u^2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2x}\right) + \ldots\ldots\right.$$

ce qui montre que la fonction F est décroissante pour $u = 0$ (*comme sur les deux figures précédentes*) si $x < 2$, mais que pour $x > 2$, elle est croissante. On a donc la figure suivante pour $x > 2$

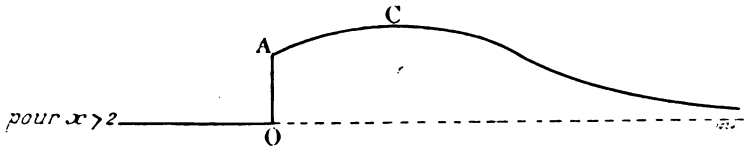

Fig. 4.

Si nous supposons x très grand, nous aurons sensiblement :
pour le maximum

$$x = \frac{1}{1-\xi}, \quad u = x^2, \quad t = x^2, \quad F = \frac{1}{x^2\sqrt{2\pi}}$$

La valeur de F au point (A correspondant à $t = x$, $u = 0$) étant d'ailleurs $\frac{e^{-x}}{2}$.

La valeur de F au point C est donc de l'ordre de $\frac{1}{x}$ et par conséquent beaucoup plus grande que la valeur au point A qui est de l'ordre de e^{-x}. Il en résulte qu'à de très grandes distances, la propagation de l'électricité semble se rapprocher des lois de la propagation

Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:38 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

de la chaleur ; le maximum au lieu d'être brusquement atteint, ne l'est plus que progressivement.

H. POINCARÉ.

(*A Suivre.*)

NOUVEAUX MODÈLES D'OSCILLOGRAPHES BLONDEL

DE LA MAISON J. CARPENTIER

L'exposition de la Société de Physique nous a donné la satisfaction de constater que les oscillographes Blondel, qui jusqu'ici apparaissaient plutôt comme des appareils de laboratoire, délicats et difficiles à manier, étaient entrés désormais dans la pratique industrielle. Le nouveau modèle que présentait M. Carpentier est robuste et d'une manipulation très simple; il permet de plus une grande variété d'applications et, à ce point de vue, nous pensons qu'il est intéressant de le signaler aux électriciens, savants ou ingénieurs, à qui il est appelé à rendre quelques services.

Après avoir rappelé brièvement le principe des oscillographes, nous examinerons les perfectionnements apportés à leur construction dans les dernières années, et les résultats qu'ils ont permis d'obtenir.

L'oscillographe n'est autre chose qu'un galvanomètre à période d'oscillation très courte, plongé dans l'huile, de façon à présenter un amortissement aussi voisin que possible de l'apériodicité critique. La déviation du miroir de ce galvanomètre est amplifiée optiquement et le mouvement qui en résulte pour le rayon lumineux réfléchi est composé avec un mouvement rectangulaire, proportionnel au temps. Ce dernier mouvement est obtenu par un miroir oscillant. La courbe résultante est observée sur un écran ou recueillie photographiquement.

Dans le cas de l'étude des courants périodiques, le miroir oscillant est mu par un dispositif synchrone, afin de faire superposer les images des différentes périodes et de les rendre observables grâce à la persistance des impressions lumineuses sur la rétine.

Les galvanomètres des nouveaux oscillographes sont de deux sortes : à fer doux ou bifilaires. Dans les premiers, une mince bande de fer doux portant un petit miroir, et polarisée par un champ magnétique intense, est plus ou moins écartée de sa position normale par l'action d'un champ perpendiculaire que produit le courant à étudier. Dans les seconds, le courant parcourt en sens inverse deux fines bandes très rapprochées et tendues dans un plan parallèle à la direction d'un champ magnétique intense. Ces bandes portent un miroir collé en leur milieu qui permet d'observer la torsion du système sous l'action du courant.

Ces deux systèmes de galvanomètres utilisent un champ magnétique constant; d'autre part, le dispositif optique destiné à traduire les déplacements du miroir sous forme de courbe en fonction du temps, est le même dans les deux cas. On voit donc que pour qu'un oscillographe pût être à volonté de l'un ou l'autre système, il suffisait de réaliser les deux galvanomètres sous forme d'équipages pouvant se remplacer entre les pièces polaires du même aimant permanent, disposé dans une boîte contenant un système optique. C'est cette idée qui a déterminé la nouvelle construction des oscillographes.

Nous ne décrirons pas le système optique qui n'a pas subi de modifications importantes, et pour lequel nous renverrons le lecteur au numéro de *L'Eclairage Electrique* (3 mai 1902);

Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:38 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Tome XL Samedi 6 Août 1904. 11e Année. — N° 32

L'Éclairage Électrique

REVUE HEBDOMADAIRE DES TRANSFORMATIONS

Électriques — Mécaniques — Thermiques

DE

L'ÉNERGIE

DIRECTION SCIENTIFIQUE

A. D'ARSONVAL, Professeur au Collège de France, Membre de l'Institut. — **A. BLONDEL**, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'Ecole des Ponts et Chaussées. — **Eric GÉRARD**, Directeur de l'Institut Électrotechnique Montefiore. — **G. LIPPMANN**, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Institut. — **D. MONNIER**, Professeur à l'École centrale des Arts et Manufactures. — **H. POINCARÉ**, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Institut. — **A. POTIER**, Professeur à l'École des Mines. Membre de l'Institut. — **A. WITZ**, Ingénieur des Arts et Manufactures, Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille.

ÉTUDE DE LA PROPAGATION DU COURANT EN PÉRIODE VARIABLE

SUR UNE LIGNE MUNIE DE RÉCEPTEUR (*suite*) [1]

Retour a la solution générale. — Dans le cas général, on a manifestement :

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau f(\tau)\, F(x, t-\tau)$$

Nous en déduisons :

$$i = \frac{d\Phi}{dt} = \int d\tau f \frac{dF}{dt} = -\int d\tau f \frac{dF}{d\tau}$$

Supposons un signal simple de durée ε, de sorte que $f = 0$ sauf quand x est compris entre 0 et ε, et $f = 1$ pour $0 < x < \varepsilon$. Il vient alors :

$$i = -\int_0^t d\tau \frac{dF}{d\tau} = F(x, t) - F(x, t-\varepsilon)$$

Il est aisé de voir comment varie i :

Pour $t < x$ on a $i = 0$.

Pour $x < t < x + \varepsilon$, on a $i = \frac{e^{-t}}{2} J_0\left(\sqrt{x^2 - t^2}\right)$, c'est l'*intensité utile*.

Pour $t > x + \varepsilon$, on a :

$$i = \frac{e^{-t}}{2} J_0 \sqrt{x^2 - t^2} - \frac{e^{-t+\varepsilon}}{2} J_0 \sqrt{x^2 - (t-\varepsilon)^2}$$

[1] Voir les numéros 30 et 31 des 23 et 30 juillet 1904.

Digitized by Google

Original from HARVARD UNIVERSITY

Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:40 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

c'est l'*intensité nuisible*; ou sensiblement :

$$i = \varepsilon \frac{dF}{dt}$$

ou pour t grand, x fini :

$$i = \frac{-\varepsilon}{4\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t\sqrt{t}}$$

formule qui montre avec quelle lenteur décroît l'intensité nuisible.

Supposons maintenant x très grand, on aura pour l'intensité utile maximum :

$$i = \frac{e^{-x}}{2}$$

Soit $u = k x^2$, k étant fini ; on aura sensiblement :

$$\frac{d \log F}{dt} = \frac{d \log F}{du} = \frac{1}{2k^2x^2}\left(\frac{1}{k^2} - 1\right) F = \frac{e^{-\frac{1}{2k^2}}}{2\sqrt{2\pi x}}$$

et pour l'intensité nuisible :

$$\frac{-e^{-\frac{1}{2k^2}}}{2\sqrt{2\pi}} \quad \frac{\varepsilon}{x^3}$$

Le rapport de l'intensité nuisible à l'intensité utile est donc proportionnelle à

$$\frac{\varepsilon\, e^{x}}{x^3}$$

Nous voyons que $\frac{e^x}{x^3}$ croît avec x, c'est-à-dire avec la distance ; en revanche notre rapport est proportionnel à ε, *d'où l'avantage des signaux courts*.

Nous pouvons supposer un signal double, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} f &= 0 \text{ de } -\infty \text{ à } 0 \\ f &= 1 \text{ de } 0 \text{ à } \varepsilon \\ f &= -1 \text{ de } \varepsilon \text{ à } 2\varepsilon \\ f &= 0 \text{ de } 2\varepsilon \text{ à } +\infty \end{aligned}$$

On en déduit :

$$i = -\int_0^{\varepsilon} d\tau \frac{dF}{dt} + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} d\tau \frac{dF}{d\tau} = F(x, t) - 2F(x, t - \varepsilon) + F(x, t - 2\varepsilon)$$

De $t = x$ à $t = x + \varepsilon$, on a :

$$i = F(x, t) \text{ (intensité utile)}$$

De $t = x + 2\varepsilon$ à $t = \infty$, on a :

$$i = 2\varepsilon^2 \frac{d^2F}{dt^2} \text{ (intensité nuisible)}$$

On voit que pour t très grand, x fini, l'intensité nuisible décroît non plus comme $t^{-\frac{3}{2}}$ mais comme $t^{-\frac{5}{2}}$.

Pour x très grand, $\frac{u}{x^2}$ fini, l'intensité utile est proportionnelle à e^{-x}, l'intensité nuisible

Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:40 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

à $\frac{\varepsilon^2}{x^5}$, ce qui montre que le rapport est plus favorable que dans le cas précédent, surtout pour des signaux très courts.

Effet des réflexions. — Supposons maintenant que la ligne toujours indéfinie dans un sens, soit limitée dans l'autre sens. Nous pouvons supposer soit que l'extrémité est isolée, soit qu'elle est à la terre.

Dans le premier cas, on devra avoir à l'extrémité une intensité nulle, c'est-à-dire :

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

ou puisque nous partons du repos :

$$\Phi = 0$$

Dans le deuxième cas, on devra avoir à l'extrémité un potentiel nul, c'est-à-dire :

$$\frac{d\Phi}{dx} = 0$$

Supposons que dans le cas de la ligne indéfinie, on ait $\Phi = f(x)$, pour $x > 0$ et $\Phi = f(-x)$ pour $x < 0$. Soit maintenant l la longueur de la ligne depuis la pile jusqu'à l'extrémité. Si cette extrémité est isolée, on devra avoir $\Phi = 0$ pour $x = l$. Nous satisferons à cette condition, en prenant :

$$\Phi = f(x) - f(2l - x)$$

Si l'extrémité est à la terre, on doit avoir $\frac{d\Phi}{dx} = 0$ pour $x = l$. Nous satisferons à cette condition en prenant :

$$\Phi = f(x) + f(2l - x)$$

Dans chacune de ces deux formules, le premier terme $f(x)$ représente l'onde directe, et le second terme l'onde réfléchie. Mais on voit que les conditions sont très différentes dans les deux cas.

Tout se passe comme si la ligne était indéfinie, mais pourvue de deux piles, l'une placée en $x = 0$, l'autre en $x = 2l$. Seulement dans le premier cas, les forces électromotrices des deux piles sont égales et de signe contraire ; dans le deuxième cas, elles sont égales et de même signe.

Lignes fermées. — Supposons maintenant une ligne fermée sur elle-même de longueur $2l$; elle se comportera évidemment comme une ligne indéfinie sur laquelle seraient placées des piles de même force électromotrice, aux points :

$$x = 0,\ x = 2l,\ x = 4l, \ldots\ldots$$
$$,\ x = -2l,\ x = -2l \ldots\ldots$$

Si donc on a trouvé pour une ligne indéfinie

$$\Phi = f(x)$$

on aura pour une ligne fermée :

$$\Phi = \Sigma f(|x - 2nl|),\ n = -\infty, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, +\infty$$

Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:40 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Remarquons que dans la série du deuxième membre, il n'y a jamais à envisager qu'un nombre fini de termes puisque ceux pour lesquels

$$|x - 2nl| > t$$

sont tous nuls. Ces termes décroissent d'ailleurs très rapidement.

Réflexions multiples. — Supposons maintenant une ligne limitée dans les deux sens; supposons par exemple qu'en $x = a$ et en $x = b$, elle soit mise à la terre.

Alors tout se passera comme si nous avions une série de piles, qui auraient à chaque instant même force électromotrice et qui seraient placées aux points :

$$x = 0,\ x = 2a,\ x = -2b,\ x = 2n(a+b),\ x = 2(n+1)a + 2nb$$

n étant un entier quelconque positif ou négatif. On aura donc :

$$\Phi = \Sigma f(|x - 2n(a+b)|) + \Sigma f(|x - 2(n+1)a + 2nb|)$$

On vérifie en effet que l'on a $\frac{d\Phi}{dx} = 0$ pour $x = a$ et pour $x = b$.

Il est aisé de voir comment on devrait modifier la formule, si l'une des extrémités, ou toutes deux étaient isolées au lieu d'être à la terre.

Cas du récepteur. — Supposons maintenant une ligne indéfinie dans les deux sens, mais imaginons qu'on ait placé en $x = a$ un récepteur. Nous nous bornerons d'abord à assimiler ce récepteur à une self-induction accompagnée d'une résistance et d'une capacité.

Mais au sujet de cette capacité on doit distinguer deux cas :

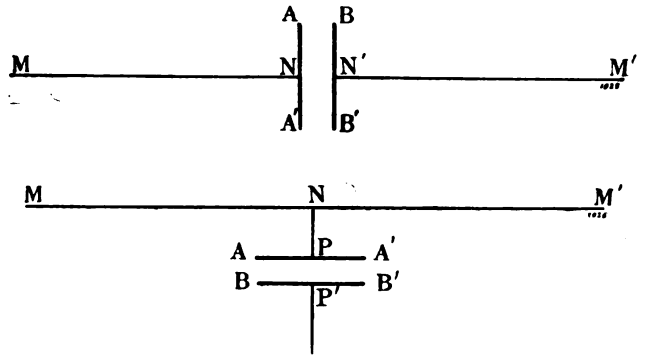

Fig. 1.

Ou bien tout se passe comme si la ligne MM' était interrompue en NN' par un condensateur dont les deux armatures seraient AA' et BB'. Ce sont *les capacités de la première sorte*, comme sur la premières des figures ci-dessus,

ou bien tout se passe comme si la ligne portait en N une dérivation allant au plateau AA' d'un condensateur dont l'autre armature BB' est à la terre. Ce sont les *capacités de la seconde sorte*.

Dans tous les cas le récepteur introduit une discontinuité; mais si la capacité est de la première sorte, l'intensité du courant $\frac{d\Phi}{dt}$ et par conséquent Φ reste une fonction continue de x pour $x = a$; car la quantité d'électricité positive amenée au plateau AA' par le fil MN,

Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:40 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

est égale à la quantité d'électricité *négative* amenée au plateau BB′ par le fil M′N′, puisque les charges des deux plateaux doivent rester égales et de signe contraire. En revanche il y a en a une force électromotrice de sorte que $\frac{d\Phi}{dx}$ n'est pas continue.

Si au contraire on a des capacités de la seconde sorte, la fonction Φ est également discontinue.

Bornons-nous d'abord au cas où il n'y a que des capacités de la première sorte. Soit L la self-induction du récepteur, R sa résistance, $\frac{1}{A}$ sa capacité. Les forces électromotrices dues à la self-induction et à la résistance seront :

$$-L\frac{di}{dt} = -L\frac{d^2\Phi}{dt^2} \qquad -Ri = -R\frac{d\Phi}{dt}$$

L'intensité $\frac{d\Phi}{dt}$ étant la dérivée de la charge du condensateur AA′BB′, cette charge sera Φ et la force électromotrice correspondante sera $-A\Phi$; de sorte que la force totale sera :

$$-L\frac{d^2\Phi}{dt^2} - R\frac{d\Phi}{dt} - A\Phi$$

Donc pour $x = a$, la dérivée $\frac{d\Phi}{dx}$ sera discontinue de telle façon que si l'on pose :

$$S = \frac{d\Phi}{dx}(x = a + \varepsilon) - \frac{d\Phi}{dx}(x = a = \varepsilon)$$

on ait

$$S = -L\frac{d^2\Phi}{dt^2} - R\frac{d\Phi}{dt} - A\Phi$$

On a d'ailleurs pour $x = 0$

$$\frac{d\Phi}{dx}(x = \varepsilon) - \frac{d\Phi}{dx}(x = -\varepsilon) = E = f(t)$$

Partout ailleurs $\frac{d\Phi}{dx}$ est continue.

Solution isochrone. — Suivant la même marche que plus haut, faisons d'abord $f(t) = e^{iqt}$. Soit encore :

$$p^2 = q^2 - 2iq$$

On aura :

pour $x < 0$

$$\Phi = Ae^{i(qt - px)}$$

pour $0 < x < a$

$$\Phi = Be^{i(qt + px)} + Ce^{i(qt - px)}$$

pour $x > a$

$$\Phi = De^{i(qt + px)}$$

Pour $x = 0$, Φ est continu, ce qui donne :

$$A = B + C \qquad (1)$$

Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:40 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

$\frac{d\Phi}{dx}$ subit un saut brusque égal à e^{iqt}, ce qui donne :

$$Bip - Cip = - Aip + 1 \tag{2}$$

De ces deux équations on tire $B = \frac{1}{2ip}$.

Pour $x = a$, Φ est continu ce qui donne :

$$Be^{ipa} + Ce^{-ipa} = De^{ipa} \tag{3}$$

Pour $x = a$, $\frac{d\Phi}{dx}$ subit un saut brusque égal à $\delta = + Q\Phi$, où :

$$Q = Lq^2 - Riq - A.$$

On a donc :

$$Bipe^{ipa} - Cipe^{-ipa} = Dipe^{ipa} - QDpe^{ipa} \tag{4}$$

De (3) et (4) on tire :

$$2Bip = D\,(2ip - Q)$$

d'où :

$$D = \frac{1}{2ip - Q}$$

de sorte que l'on a pour $x = a$, c'est-à-dire au récepteur :

$$\Phi = \frac{e^{i(qt + pa)}}{2ip - Q}$$

Solution générale. — Soit comme plus haut :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(q)\, e^{iqt}\, dq, \qquad \theta(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-iq\tau}\, dt$$

On trouvera toujours par le même calcul :

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(q)\, \frac{e^{i(qt - q\tau + pa)}}{2ip - Q}\, dq = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, d\tau \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi}\, \frac{e^{i(qt + q\tau + pa)}}{2ip - Q} \right]$$

Ebranlement élémentaire. — Ce que nous avons appelé l'ébranlement élémentaire est alors représenté par l'intégrale :

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{d\pi}\, \frac{e^{i(qt + pa)}}{2ip - Q}$$

On raisonnera sur cette intégrale tout à fait comme plus haut; si $t < a$, au lieu d'intégrer le long de la droite CMD (voir fig. 1) on pourra intégrer le long du contour fermé CMDN; on vérifierait qu'il n'y a pas de point singulier à l'intérieur du contour; cette vérification est inutile, nous sommes certains qu'elle est nulle, parce que rien ne saurait se passer dans le récepteur avant que la perturbation l'ait atteinte.

Si $t > a$, on pourra intégrer le long du contour CMDP ou le long du cercle CNDP.

Pour transformer cette intégrale posons : $u^2 = a^2 - t^2$

$$(q - i)\, t + pa = \lambda u$$
$$pt + (q - i)\, a = \mu u$$

Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:40 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

d'où :

$$\rho^2 - \mu^2 = p^2 - (q - i)^2 = +1; \qquad \frac{dp}{q-i} = \frac{dq}{p} = \frac{d\rho}{\mu} = \frac{d\mu}{\rho}$$

Soit :

$$\rho + \mu = \xi\,,\ \rho - \mu = \frac{1}{\xi},\ 2\rho = \xi + \frac{1}{\xi}\,.\ \frac{dq}{p} = \frac{d\xi}{\xi}$$

d'où notre intégrale :

$$\Phi = e^{-t} \int \frac{e^{i\frac{u}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)} p\, d\xi}{\xi\,(2ip - Q)}$$

Il est clair que

$$R = \frac{p}{\xi\,(2ip - Q)}$$

est une fonction rationnelle de ξ, puisque p et q sont des fonctions rationnelles de ξ et que Q est un polynôme entier en q.

Pour $\xi = \infty$, on a $\rho = \mu$, c'est-à-dire $q - i = p$; c'est-à-dire que p et q sont très grands et sensiblement égaux, et comme Q est du second degré en q on aura $R = 0$, ce qui veut dire que R est décomposable en éléments simples sous la forme :

$$R = \sum \frac{A}{\xi - \alpha}$$

d'où

$$\Phi = e^{-t} \sum A \int \frac{e^{i\frac{u}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)} d\xi}{\xi - \alpha}$$

Quel est le contour d'intégration ? Quand q décrit le cercle CNDP, le point ξ décrit un cercle très petit autour de la valeur de ξ qui correspond à $p = -q = \infty$, c'est-à-dire autour de l'origine.

Or si nous envisageons l'intégrale :

$$\int \frac{e^{i\frac{u}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)} d\xi}{\xi^n}$$

prise le long du même contour, nous reconnaissons une des fonctions de Bessel. C'est à un facteur constant près la fonction $J_{n-1}(u)$; ce facteur constant est d'ailleurs $2\pi i^{n-1}$, or :

$$\int \frac{e^{i\frac{u}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)} d\xi}{\xi - \alpha} = \sum \frac{1}{\alpha^{n+1}} \int \xi^n e^{i\frac{u}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)} d\xi$$

d'où (en se rappelant que $J_{-n} = \pm J_n$,

$$\int \frac{e^{i\frac{u}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)} d\xi}{\xi - \alpha} = \sum \frac{\pm 2\pi}{\alpha^{n+1}} i^{n-1} J_{n-1}(u)$$

Cette série est convergente pour toutes les valeurs de u et de α.

Pour les propriétés des fonctions de Bessel, on pourra se reporter en particulier au chapitre XII du tome I de la « Mécanique céleste de Tisserand ».

Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:40 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Mais ce dont nous avons besoin, c'est de voir ce que deviennent ces intégrales quand t et a sont très grands, et d'en déduire une expression asymptotique qu'on puisse utiliser dans la discussion de la même façon que l'expression analogue des fonctions de Bessel :

Et d'abord, vers quelle limite tend α quand t et a croissent indéfiniment :

Les points singuliers de notre intégrale sont donnés par les deux équations du second degré :

$$\begin{aligned} q^2 - 2ip &= p^2 \\ 2ip &= Q. \end{aligned} \qquad (A)$$

Les valeurs correspondantes de α seront donc données par :

$$u\alpha = (q - i + p)\,(t + a)$$

où q et p sont définis par les deux équations précédentes (A) et sont par conséquent des constantes numériques.

Comme $u = \sqrt{a^2 - t^2}$, on voit que α dépend seulement du rapport $\frac{t}{a}$. Quand t et a tendent vers l'∞ de façon que leur rapport soit constant, α demeurera donc constant. Quand on suppose que le rapport $\frac{t}{a}$ est très grand, il vient :

$$i\alpha = q - i + p, \text{ [on trouve } \alpha = \infty \text{ si ce rapport est égal à } 1]$$

Prenons donc l'intégrale

$$\int \frac{e^{\frac{iu}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)} d\xi}{\xi - \alpha}$$

où α est constant et cherchons sa valeur pour u très grand.

Pour cela construisons dans le plan des ξ les courbes

$$\text{partie réelle de } \xi \frac{1}{\xi} = \text{const.}$$

Si nous appelons ρ le module et ω l'argument de ξ, ces courbes en coordonnées polaires auront pour équation

$$\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cos \omega = \text{const.}$$

Ce dont nous avons besoin, c'est de la courbe

$$\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cos \omega = 2$$

d'où

$$\left(\rho = \frac{1 \pm \sin \omega}{\cos \omega}\right)$$

C'est l'équation d'une strophoïde.

Deux cas sont à distinguer suivant que le point α est intérieur ou extérieur à la boucle de la strophoïde. Dans le second cas, on pourra remplacer le contour d'intégration qui est un petit cercle autour de o par le contour en traits pointillés...., laissant en dehors le point α.

Le long du contour en trait pointillé la partie réelle de $\xi + \frac{1}{\xi}$ est toujours plus petite que 2, sauf au point A où elle est égale à 2.

Digitized by Google Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:40 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Nous savons que $u = \pm\sqrt{a^2 - t^2}$ est purement imaginaire et très grand ; si donc nous prenons devant le radical le signe convenable (ce que je suppose une fois pour toutes) iu sera réel positif et très grand. Dans ces conditions on a :

$$\left| e^{\frac{iu}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)} \right| = e^{\frac{iu}{2} R}$$

R étant la partie réelle de $\xi + \frac{1}{\xi}$; si donc R a en deux points les valeurs R′ et R″ et que R′ > R″, la valeur de l'exponentielle.

$$e^{\frac{iu}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)}$$

sera beaucoup plus petite au second de ces points qu'au premier.

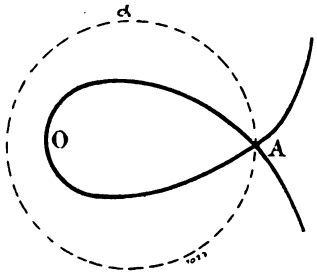

Fig. 2.

Donc si t et a sont très grands, il suffira de considérer, dans le contour en trait pointillé, les parties très voisines du point A.

Or dans ce cas, on a sensiblement :

$$\xi - \alpha = 1 - \alpha$$

et

$$\xi + \frac{1}{\xi} = 2 + (\xi - 1)^2$$

L'intégrale peut donc être remplacé par

$$\int \frac{e^{i\frac{u}{2}[2 + (\xi - 1)^2]}\, d\xi}{1 - \alpha}$$

prise le long d'un petit arc passant en A, par exemple le long d'un petit segment de droite parallèle à l'axe des parties imaginaires. Prolongeons cette droite indéfiniment dans les deux sens. En tous les points de cette droite, sauf au point A, la partie réelle de $\xi + \frac{1}{\xi}$ est plus petite que 2 ; et par conséquent la fonction sous le signe $\int$ est négligeable devant ce qu'elle est en A ; on peut donc faire l'intégration le long de cette droite tout entière, les parties ainsi ajoutées sont négligeables.

Soit :

$$\xi = 1 + i\eta \ , \ d\xi = i\,d\eta$$

il faudra faire varier η depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ et l'intégrale devient :

$$\frac{1}{1 - \alpha}\, i e^{iu} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u\eta^2}{2}}\, d\eta = \frac{i e^{iu}}{\sqrt{iu}} \frac{\sqrt{\pi}}{1 - \alpha} = \frac{i e^{\sqrt{t^2 - a^2}}}{\sqrt[4]{t^2 - a^2}} \frac{\sqrt{\pi}}{1 - \alpha}$$

***

Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:40 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Supposons maintenant que α soit à l'intérieur de la boucle de la strophoïde. En vertu du théorème de Cauchy, l'intégrale prise le long du petit cercle qui entoure O n'est plus égale à l'intégrale prise le long du contour en trait pointillé, mais à cette seconde intégrale plus $2i\pi$ multiplié par le résidu correspondant au pôle α, c'est-à-dire à cette seconde intégrale plus

$$2i\pi e^{i\frac{u}{2}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)} \tag{B}$$

et comme cette seconde intégrale dont nous venons de trouver la valeur asymptotique est très petite par rapport à cette expression (B), ce sera cette expression (B) qui sera la valeur asymptotique cherchée de la première intégrale.

Revenons à l'expression :

$$\Phi = e^{-t}\int \frac{e^{i\frac{u}{2}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)}p\,d\xi}{\xi\,(2ip-Q)}$$

Si aucun des α n'est à l'intérieur de la boucle de strophoïde, la valeur asymptotique de Φ sera :

$$i\sqrt{\pi}\,\frac{e^{-t+\sqrt{t^2-a^2}}}{\sqrt[4]{t^2-a^2}}\,D_1$$

en désignant par D_1 la valeur de

$$\frac{P}{2ip-Q}$$

pour $\xi = 1$.

Plus haut nous avons distingué deux cas, selon que l'un des pôles de R était intérieur à une boucle de strophoïde ou non. Cette strophoïde que j'appelle S a pour sommet $\xi = 0$ et pour point double $\xi = 1$.

Je dis que le premier cas ne se présentera pas pratiquement.

Qu'arrive-t-il quand q est réel ; on trouve :

$$(q-i+p)(t+a) = \xi u$$
$$(q-i-p)(t-a) = \frac{1}{\xi}\,u$$

Nous savons que $t > a$; par conséquent $i\,u$ est réel, et dans ce qui précède nous avons supposé

$$iu = +\sqrt{t^2-a^2} > 0$$

Si donc nous posons :

$$k = \frac{iu}{t\times a} = \frac{t-a}{iu}$$

On aura :

$$0 < k < 1$$

et

$$q-i+p = -ik\xi$$
$$q-i-p = \frac{-i}{k\xi}$$

Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:40 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

d'où :

$$2q = i\left(2 - k\xi - \frac{1}{k\xi}\right)$$

pour que q soit réel, il faut donc que :

$$\text{partie réelle}\left(k\xi + \frac{1}{k\xi}\right) = 2$$

Cette équation représente une strophoïde qui a pour sommet $\xi = 0$, et pour point double $\xi = \frac{1}{k}$. Cette strophoïde je l'appelle S'.

Ainsi quand q est réel, ξ décrit la strophoïde S' ; à savoir la boucle de S' quand la partie réelle de $\frac{p}{q}$ est négative, et le reste de S' quand cette partie réelle est positive. Reportons-nous à la figure où sont représentés les contours d'intégration dans *le plan des q*. Le chemin DNC par un demi-cercle de rayon très petit contournant l'origine ; l'aire limitée par le contour fermé CMBNC est représentée par l'aire limitée par la boucle de S'. Or nous avons vu que dans cette aire CMDNC, il ne peut y avoir de point singulier sans quoi la perturbation atteindrait le récepteur pour $t < a$, ce qui est physiquement absurde. Donc il n'y en a pas à l'intérieur de la boucle de S' ; et comme la boucle de S est tout entière à l'intérieur de S', il n'y en a pas non plus à l'intérieur de la boucle de S.

Ainsi le 1er cas ne peut jamais se présenter ; nous sommes donc toujours dans le 2e cas de sorte que la formule asymptotique qui donne la valeur approchée de Φ est :

$$\Phi = K\,\frac{e^{-t+iu}}{\sqrt{iu}}\,D_1$$

où K est un facteur numérique et D_1 la valeur de R pour $\xi = 1$; D_1 dépend alors du rapport $\frac{t}{a}$; si nous supposons $\frac{t}{a}$ très grand, D_1 s'annule et la formule devient illusoire.

Que convient-il de faire quand R s'annule pour $\xi = 1$. Nous posons $\xi = 1 + i\eta$ et nous développons R suivant les puissances croissantes de η ; et comme les seules parties du contour qu'il convient de conserver sont celles qui correspondent aux petites valeurs de η, nous ne conserverons que les premiers termes du développement. Nous pourrons d'ailleurs remplacer $\xi + \frac{1}{\xi}$ par sa valeur approchée $2 - \eta^2$ et comme plus haut, remplacer le contour d'intégration par une droite indéfinie, nous aurons ainsi :

$$\Phi = \frac{1}{i}\,e^{-t+iu}\int_{-\infty}^{+\infty} R e^{-\frac{iu\eta^2}{2}}\,d\eta$$

Il est clair que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta^K e^{-\frac{iu\eta^2}{2}}\,d\eta$$

est nulle si K est impair, et que si K est pair, cette intégrale s'obtient aisément en partant du cas de $K = 0$, et en différentiant $\frac{K}{2}$ fois sous le signe $\int$ par rapport à u.

Nous développerons donc R suivant la puissance de η et nous arrêterons notre développement au premier terme qui ne donne pas une intégrale nulle, c'est-à-dire au premier terme du dégré pair.

En opérant de la sorte, on voit que les transmissions sont d'autant meilleures que le coefficient A qui figure dans Q est plus grand, c'est-à-dire que la capacité du récepteur est plus petite, puisque A représente l'inverse de cette capacité.

Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:40 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Remarquons que s'il n'y avait pas de récepteur, tout se passerait comme si les deux plateaux du condensateur fictif qui représente cette capacité de la première sorte étaient amenés au contact l'un de l'autre, c'est-à-dire comme si cette capacité était devenue infinie.

Je ne pousserai pas jusqu'au bout cette discussion dont on a maintenant tous les éléments ; on opérerait avec les valeurs asymptotiques ainsi trouvées comme on a fait dans le cas d'une ligne indéfinie.

(*à suivre.*)

H. Poincaré.

LES MOTEURS THERMIQUES

Depuis une dizaine d'années, la machine à vapeur à piston est très concurrencée.

D'une part, les turbines à vapeur apportent une solution plus élégante. Le rendement théorique est supérieur, l'encombrement réduit et la dépense d'installation moindre. D'autre part, les moteurs à combustion interne, à gaz, à pétrole, d'abord uniquement réservés aux petites puissances, gênés dans leur développement par la nécessité d'employer des combustibles spéciaux et onéreux, poursuivent maintenant avec succès leur évolution, en passant par des phases semblables à celles que les machines à vapeur ont traversées, et beaucoup plus rapidement parce que la voie est tracée. Ils ont la réputation de donner une sérieuse économie de calories, mais d'être d'un établissement et d'un entretien plus onéreux.

Enfin, à la turbine à vapeur, s'opposera bientôt la turbine à gaz et à pétrole dont l'étude est déjà avancée, sur laquelle des essais ont été faits. Une turbine semblable de 500 chevaux est actuellement en construction.

Pour l'installation de stations centrales, le choix du moteur semble actuellement fort difficile.

Evidemment la machine à vapeur à piston offre toute garantie de fonctionnement, mais le prix de revient de la force motrice a une importance de plus en plus grande, au fur et à mesure surtout que les conditions économiques se modifient et que la force motrice se vend meilleur marché.

Doit-on penser que la supériorité du rendement des moteurs à gaz est telle que, dès que la construction de ceux-ci arrive à se parfaire et que les générateurs de gaz, bien en retard jusqu'ici par rapport aux générateurs de vapeur, sont étudiés rationnellement et établis dans d'excellentes conditions, la machine à vapeur doit graduellement disparaitre devant le moteur à combustion interne ?

Doit-on, au contraire, estimer qu'il y a là deux types de machines dont aucun n'est, *a priori*, supérieur à l'autre, qui tous deux doivent se perfectionner, se transformer, profiter l'un des écoles de l'autre, se partager continuellement les applications ?

Peut-on même, en escomptant hardiment l'avenir, prévoir que ces deux types de machines se rapprocheront l'un de l'autre de plus en plus, tendant vers un ou plusieurs types communs ?

C'est ce que je voudrais examiner avec toute la prudence et la réserve que comporte un tel problème.

Digitized by Google Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:40 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Tome XL Samedi 13 Août 1904. 11e Année. — N° 33

L'Éclairage Électrique

REVUE HEBDOMADAIRE DES TRANSFORMATIONS

Électriques — Mécaniques — Thermiques

DE

L'ÉNERGIE

DIRECTION SCIENTIFIQUE

A. D'ARSONVAL, Professeur au Collège de France, Membre de l'Institut. — **A. BLONDEL**, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'Ecole des Ponts et Chaussées. — **Eric GÉRARD**, Directeur de l'Institut Électrotechnique Montefiore. — **G. LIPPMANN**, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Institut. — **D. MONNIER**, Professeur à l'École centrale des Arts et Manufactures. — **H. POINCARÉ**, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Institut. — **A. POTIER**, Professeur à l'École des Mines, Membre de l'Institut. — **A. WITZ**, Ingénieur des Arts et Manufactures, Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille.

ÉTUDE DE LA PROPAGATION DU COURANT EN PÉRIODE VARIABLE

SUR UNE LIGNE MUNIE DE RÉCEPTEUR (*suite et fin*) [1]

Cas ou le récepteur est a la terre. — Ordinairement la ligne ne se poursuit pas indéfiniment au delà du récepteur mais elle est mise à la terre ; je supposerai le fil de terre très court, de sorte que le potentiel pour $x = a + \varepsilon$ doit être nul. On a pour $x = a - \varepsilon$ et pour $x = a + \varepsilon$

$$B = \frac{1}{2ip} \cdot Be^{ipa} + Ce^{-ipa} = \Phi e^{-iqt}$$

Le potentiel pour $x = a + \varepsilon$ étant nul, le potentiel pour $x = a - \varepsilon$ sera $-Q\Phi$, ce qui donne :

$$Bipe^{ipa} - Cipe^{-ipa} = -Q\Phi e^{-iqt}$$

d'où :

$$\Phi = \frac{e^{iqt + ipa}}{ip - Q}$$

La discussion est toute pareille à celle qui précède

Cas ou il y a des capacités de la seconde sorte. — Supposons une capacité de la seconde sorte placée en un point de la ligne sans que l'on ait en ce point de self-induction, de résistance ni de capacité de la première sorte. Alors Φ ne sera plus continue, mais $\frac{d\Phi}{dx}$ sera continu, car nous n'avons pas en ce point de force électromotrice.

[1] Voir les numéros 30 et 31 des 23 et 30 juillet 1904.

Digitized by Google

Original from HARVARD UNIVERSITY

Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:42 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Soient alors Φ et $\Phi + \delta\Phi$ les valeurs de la fonction Φ en amont et en aval de notre capacité de la seconde sorte ; la charge de cette capacité sera $\delta\Phi$, de sorte que l'on aura :

$$\delta\Phi = -C\frac{d\Phi}{dx}$$

si C est la valeur de cette capacité.

Nous pouvons imaginer maintenant des récepteurs formés de combinaisons quelconques de self-inductions, de résistances et de capacités des deux sortes.

Imaginons, par exemple, que nous rencontrions d'abord un récepteur formé de trois sections successives en série ; la première section ayant une self L, une résistance R, une capacité de première sorte A, la seconde ayant seulement une capacité de deuxième sorte C, la troisième semblable à la première mais avec les constantes L_1, R_1, A_1.

En amont de la première, la fonction Φ aura la valeur Φ et le potentiel $\frac{d\Phi}{dx}$; en aval, la fonction Φ sera encore égale à Φ et le potentiel à

$$V' = \frac{d\Phi}{dx} - L\frac{d^2\Phi}{dt^2} - R\frac{d\Phi}{dt} - A\Phi$$

En aval de la seconde, le potentiel aura la même valeur, mais la fonction Φ sera devenue :

$$\Phi' = \Phi - CV' = \Phi - C\frac{d\Phi}{dt} - LC\frac{d^2\Phi}{dt} - LR\frac{d\Phi}{dt} - LA\Phi.$$

En aval de la troisième, la fonction Φ sera continue, et restera égale à Φ', mais le potentiel deviendra ;

$$V'' = V' - L_1\frac{d^2\Phi'}{dt^2} - R_1\frac{d\Phi'}{dt} - A_1\Phi'$$

qui est une fonction linéaire de Φ, de $\frac{d\Phi}{dx}$ et de leurs dérivées par rapport au temps.

Plus généralement, quelle que soit la complication d'un récepteur, qu'il soit formé d'un réseau plus ou moins complexe, de selfs, de résistances, de capacités des deux sortes placées en dérivation ou en série, il sera toujours caractérisé par ce fait qu'il y aura deux relations linéaires entre les valeurs de Φ et du potentiel en amont et en aval du récepteur et quelques-unes de leurs dérivées par rapport au temps. Il en serait encore de même si l'on tenait compte de l'induction mutuelle des diverses parties du récepteur.

Méthode générale. — Que devons-nous faire alors ? On opérera toujours de la même manière ; on cherchera d'abord la solution isochrone. Pour cela on considérera la ligne comme divisée en plusieurs sections, les points de division étant la pile, le récepteur, les extrémités de lignes isolées ou mises à la terre, etc.

Dans chacune de ces sections on aura :

$$\Phi = Ae^{i(qt - px)} + Be^{i(qt - px)}$$

A et B étant des coefficients constants, et p étant lié à q par la relation

$$q^2 - 2iq = p^2$$

ou plus généralement :

$$\gamma\lambda q^2 - i\rho\gamma q = p^2$$

Digitized by Google Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:42 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

les constantes γ, λ, ρ pouvant ne pas être les mêmes dans les différentes sections.

Si la section est indéfinie dans un sens, l'un des deux termes de Φ devra disparaître.

Si une section se termine par une extrémité isolée, ou une mise à la terre, on aura en ce point

$$\Phi = 0, \text{ ou } \frac{d\Phi}{dx} = 0$$

ce qui donne une relation entre les coefficients A et B.

Maintenant si nous comparons deux sections consécutives, nous aurons comme nous venons de le voir deux relations linéaires entre les valeurs de Φ et de $\frac{d\Phi}{dx}$ de part et d'autre du point de division et entre leurs dérivées successives par rapport au temps. Si nous observons que pour une solution isochrone, la dérivée d'une de ces fonctions par rapport au temps est égale à cette fonction elle-même multipliée par iq, nous voyons que nous aurons deux relations linéaires entre les valeurs de Φ et $\frac{d\Phi}{dx}$ de part et d'autre du point de division mais que les coefficients de ces relations dépendent de q. Ces relations nous fournissent alors deux équations linéaires entre les coefficients A et B des deux sections consécutives.

On peut déterminer ces coefficients A et B à l'aide de ces diverses relations, et ces coefficients seront des fonctions de q, puisque nos équations linéaires dépendent de q. On aura ainsi :

$$\Phi = \Omega(q) e^{iqt}$$

Appelons $f(t)$ la force électromotrice de la pile et portons :

$$f(t) = \int \Theta(q) e^{iqt}\, dq, \qquad \Theta(q) = \frac{1}{2\pi} \int f(\tau) e^{-iq\tau}\, d\tau$$

nous aurons pour la solution générale :

$$\Phi = \int\int \frac{f(\tau)}{2\pi} e^{iq(t-\tau)}\, \Omega(q)\, dq\, d\tau$$

et pour « l'ébranlement élémentaire »

$$\Phi = \int \frac{e^{iqt}}{2\pi}\, \Omega(q)\, dq$$

Nous pourrons ainsi dans tous les cas mettre la fonction cherchée sous la forme d'une intégrale définie.

Premier cas. — Le premier cas est celui où il n'y a qu'un récepteur, qui peut être d'ailleurs aussi compliqué que l'on veut, mais qui est immédiatement réuni à la terre, ou bien suivi d'une ligne indéfinie; la ligne de l'autre côté de la pile est indéfinie, ou bien le second pôle de la pile est mis immédiatement à la terre. Il n'y a donc qu'une section de *longueur finie*, c'est celle qui s'étend de la pile au récepteur. Soit a sa longueur.

Nous cherchons la valeur Φ au récepteur, c'est-à-dire pour $x = a$. Dans ce cas $\Omega(q)$ est égal à e^{ipa} multipliée par une fonction rationnelle de p et de q. Notre intégrale peut alors être décomposée comme plus haut en éléments simples de la forme

$$\int \frac{e^{\frac{iu}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)}\, d\xi}{\xi - \alpha}$$

Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:42 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Si nous voulions la fonction Φ en un point quelconque de la section comprise entre la pile et le récepteur, nous verrions que $\Omega(q)$ est une somme de deux termes l'un contenant l'exponentielle e^{ipx}, l'autre l'exponentielle $e^{ip(2a-x)}$ l'une et l'autre multipliée par une fonction rationnelle de q et de p.

Deuxième cas. — Le deuxième cas est plus compliqué, c'est celui où il y a plusieurs sections de longueur finie. C'est ce qui arriverait par exemple :

1° Si le récepteur était relié à la terre, non pas immédiatement, mais par un fil de longueur finie.

2° Si le second pôle de la pile était à la terre par un fil de longueur finie.

3° Si la ligne était fermée sur elle-même de façon à équivaloir à une série indéfinie de piles et de récepteurs équidistants. (Voir plus haut le cas d'une ligne fermée).

4° Si la ligne était formée de plusieurs fils de section différente raccordés ensemble.

S'il en est ainsi, $\Omega(q)$ n'est plus une exponentielle multipliée par une fonction rationnelle de p et de q. Mais $\Omega(q)$ dépend rationnellement de p, de q et de *plusieurs* exponentielles. Nous avons même des combinaisons d'exponentielles au dénominateur.

Interprétation physique du deuxième cas. — On peut se représenter comme il suit la façon dont les choses se passent, l'onde émanée de la pile se propage dans les deux sens ; quand elle rencontre un point de division entre deux sections, une partie de la perturbation est transmise à la section suivante, une partie est réfléchie et revient en arrière.

C'est de la superposition de toutes ces ondes ayant subi des réflexions multiples que provient la fonction Φ. Il y a là quelque chose de tout à fait analogue au phénomène des anneaux colorés.

Lorsqu'on n'a qu'une section de longueur finie, comprise entre la pile et le récepteur, il y a réflexion au récepteur, mais il n'y a pas de réflexion à la pile; nous avons alors au plus une onde directe et une onde réfléchie, ce qui donne en tout pour $\Omega(q)$ deux termes, chacun d'eux contenant en facteur une exponentielle.

Si au contraire, il y a plusieurs sections de longueur finie; il y a plusieurs points où se produisent des réflexions, de sorte qu'une onde, renvoyée de l'un à l'autre peut subir une infinité de réflexions successives.

Nous aurons donc à considérer une infinité d'ondes distinctes. A chacune d'elles correspondra dans $\Omega(q)$ un terme formé d'une exponentielle, multipliée par une fonction rationnelle de p et de q. C'est la somme de tous ces termes qui est alors égale à une fonction rationnelle d'un certain nombre d'exponentielles, ainsi que de p et de q. Mais nous devons observer qu'à chaque réflexion, la perturbation est considérablement affaiblie, de sorte que ces termes décroissent rapidement et qu'il n'est nécessaire d'en considérer qu'un très petit nombre.

Nous avons donc deux manières d'écrire $\Omega(q)$; nous pouvons l'écrire en bloc, sous forme finie; elle est alors rationnelle non seulement par rapport à p et à q, mais encore par rapport à un certain nombre d'exponentielles. La solution du problème (pour un ébranlement élémentaire) se présente alors sous la forme d'une intégrale définie simple

$$\Phi = \int \Omega(q) e^{iqt} dq$$

mais qui se prête mal à la discussion. Nous pouvons aussi la développer en série, procédant suivant les puissances des exponentielles. (Il faut naturellement développer suivant les

Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:42 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

puissances croissantes de celles de ces exponentielles dont la valeur absolue est plus petite que 1). On sépare ainsi les différentes ondes réfléchies; chaque terme est de la forme

$$e^{ipl}\,\mathrm{R}$$

où l est une longueur dépendant des longueurs des différentes sections et où R est rationnel en p et en q. La solution se présente alors sous la forme

$$\Phi = \Sigma \mathrm{R} e^{i(qt + pl)}\, dq$$

Il n'est pas nécessaire, comme je l'ai dit plus haut, de considérer un grand nombre de termes; et chacun de ces termes peut se traiter comme dans le premier cas.

Exemple. — Je voudrais bien montrer cette décomposition de $\Omega(q)$ en ses différents termes correspondant chacun à une onde réfléchie et pour cela je prendrai un exemple simple, et je choisirai le cas d'une ligne fermée de longueur l, avec une pile de force électromotrice $f(t)$ au point $x = 0$, et pas de récepteur.

Soit d'abord

$$f(t) = e^{iqt},\ \Phi = \Omega(q) e^{iqt};$$

d'où

$$\Omega(q) = \mathrm{A} e^{ipx} + \mathrm{B} e^{-ipx}$$

J'écris que Φ est continu et que $\frac{d\Phi}{dx}$ subit un saut brusque e^{iqt}; c'est-à-dire que si Φ_0 et Φ_1, $\frac{d\Phi_0}{dx}$ et $\frac{d\Phi_1}{dx}$ sont les valeurs de Φ et $\frac{d\Phi}{dx}$ pour $x = 0$ et pour $x = l$, on a :

$$\Phi_0 = \Phi_1\ ,\quad \frac{d\Phi_0}{dx} = \frac{d\Phi_1}{dx} + e^{iqt}$$

cela donne :

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{A} e^{ipl} + \mathrm{B} e^{-ipl}$$
$$\mathrm{A}ip - \mathrm{B}ip = \mathrm{A}ipe^{ipl} - \mathrm{B}ipe^{-ipl} + 1$$

d'où

$$\mathrm{A} = \frac{1}{ip\,(1 - e^{ipl})},\ \mathrm{B} = \frac{1}{ip\,(1 - e^{-ipl})} = \mathrm{A} e^{ipl}$$

$$\Phi = e^{iqt}\,\frac{e^{ipx} + e^{ip(l-x)}}{ip\,(1 - e^{ipl})} = \frac{e^{iqt}}{ip}\left[\Sigma e^{ip(x + nl)} + \Sigma e^{ip(l - x + nl)}\right]$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots\ldots \infty)$$

Le terme $e^{ip(x+nl)}$ représente l'onde qui arrive au point x après avoir fait n tours complets dans le sens direct, le terme $e^{ip(l-x+nl)}$ représente l'onde qui a fait n tours complets dans le sens rétrograde

Inutile d'ajouter que tout se passerait de la même manière dans les autres cas où les ondes au lieu de faire une série de tours, toujours dans le même sens, se réfléchissent un certain nombre de fois et reviennent en arrière.

Raccordement de deux fils de différente section. — Il peut arriver que dans deux sections consécutives de la ligne, les constantes du fil, ρ, λ, γ n'aient pas la même valeur. On

Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:42 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google
Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY

peut par exemple raccorder deux fils de diamètre différent, ou bien raccorder une ligne sous-marine avec une ligne aérienne. Dans ce cas la valeur de p n'est pas la même dans les deux sections puisque l'équation qui définit p

$$\lambda\gamma q^2 - \rho\gamma i q = p^2$$

n'a pas les mêmes coefficients. De plus, au point de raccordement les ondes subissent une réflexion. Quelles sont les conditions de cette réflexion ? D'abord il n'y a pas de force électromotrice, donc $\frac{d\Phi}{dx}$ est continu. Ensuite l'intensité doit être la même dans les deux sections; donc $\gamma\frac{d\Phi}{dt}$ et $\gamma\Phi$ sont continus. Cela suffit pour déterminer les conditions de la réflexion, c'est-à-dire les relations linéaires entre les coefficients A et B relatifs aux deux sections.

Si les différentes sections de la ligne sont formées de fils, dont les constantes ne sont pas les mêmes, la valeur de p n'est pas la même dans les différentes sections. Alors Ω (q) est une fonction rationnelle de q, de diverses quantités $p_1, p_2, \ldots$, liées à q par des équations du second degré, et de diverses exponentielles $e^{ip_1a_1}\ldots$, où p_1 a toujours le même sens, tandis que a_1 est la longueur de la section correspondante. (Si l'on veut l'intensité en un point quelconque de la ligne, on pourra toujours considérer ce point comme un point de division séparant deux sections).

Nos intégrales se présentent alors sous une forme encore plus compliquée. Mais on peut, quand on veut avoir une expression asymptotique, opérer toujours d'après les mêmes principes. On développera suivant les puissances des exponentielles e^{ipa}, comme p a toujours sa valeur imaginaire positive, cette expression a son module plus petit que 1 et la série converge rapidement. Chacun des termes est une exponentielle multipliée par une fonction rationnelle de q et de p. Considérons l'un de ces termes et cherchons une valeur asymptotique de l'intégrale correspondante. Pour cela il suffira de déformer le contour d'intégration jusqu'à ce qu'il aille passer par un point singulier, et de telle façon qu'en ce point singulier l'exponentielle soit beaucoup plus grande que sur tout le reste du contour ; on aura l'expression asymptotique en réduisant le contour à ses parties les plus voisines du point singulier, le reste étant négligeable.

Influence des pertes, — Reprenons le calcul quand la ligne est affectée d'une perte uniforme.

Nous avons toujours l'équation de Ohm

$$\lambda\frac{di}{dt} + \rho i = E + \frac{dV}{dx}$$

mais l'équation de continuité est modifiée. La dérivée de la charge par rapport au temps, c'est-à-dire

$$\gamma\frac{dV}{dt}$$

n'est pas égale à l'apport dû au courant, c'est-à-dire à $\frac{di}{dx}$, il faut tenir compte d'une perte proportionnelle à V et que je représenterai par αV; on a donc

$$\frac{di}{dx} = \gamma\frac{dV}{dt} + \alpha V$$

Digitized by Google Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:42 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

ce qui montre qu'il existe une fonction Φ telle que l'on ait

$$V = \frac{d\Phi}{dt}, \; i = \gamma \frac{d\Phi}{dt} + \alpha\Phi$$

de sorte que l'on a

$$\lambda\gamma \frac{d^2\Phi}{dt^2} + (\lambda\alpha + \rho\gamma) \frac{d\Phi}{dt} + \alpha\rho\Phi = \frac{d^2\Phi}{dx^2} = E$$

ou en employant la notation symbolique

$$\left(\lambda \frac{d}{dt} + \rho\right)\left(\gamma \frac{d}{dt} + \alpha\right)\Phi - \frac{d^2\Phi}{dx^2} = E$$

Si l'on suppose $E = 0$, il vient :

$$\lambda\gamma \frac{d^2\Phi}{dt} + (\lambda\alpha + \rho\gamma) \frac{d\Phi}{dt} + \alpha\rho\Phi = \frac{d^2\Phi}{dx^2}$$

Si nous posons :

$$\Phi = e^{kt} U$$

et qu'on choisisse k de telle sorte que

$$\lambda\gamma k^2 + (\lambda\alpha + \rho\gamma) k + \alpha\rho = 0$$

ou

$$(\lambda k + \rho)(\gamma k + \alpha) = 0,$$

on est ramené à l'équation des télégraphistes. En effet on a symboliquement :

$$\frac{d}{dt}(e^{kt}U) = e^{kt}\left(\frac{dU}{dt} + kU\right) = e^{kt}\left(\frac{d}{dt} + k\right)U$$

de sorte que U satisfait à l'équation :

$$\left(\lambda \frac{d}{dt} + \lambda k + \rho\right)\left(\lambda \frac{d}{dt} + \gamma k + \alpha\right) U = \frac{d^2U}{dx^2}$$

Il y a deux valeurs de k pour lesquelles cette équation se réduit à celle des télégraphistes :

1° Si $\lambda k + \rho$ est nul, il reste :

$$\lambda\gamma \frac{d^2U}{dt^2} + (\alpha\lambda - \gamma\rho) \frac{dU}{dt} = \frac{d^2U}{dx^2}$$

2° Si $\gamma k + \alpha$ est nul, il reste :

$$\lambda\gamma \frac{d^2U}{dt^2} + (\gamma\rho - \alpha\lambda) \frac{dU}{dt} = \frac{d^2U}{dx^2}$$

On remarquera que dans l'une de ces deux équations, le coefficient de $\frac{dU}{dt}$ est positif, de sorte qu'on peut disposer des unités de façon que le coefficient de $\frac{d^2U}{dt^2}$ devienne égal à 1 et celui de $\frac{dU}{dt}$ à 2, ce qui est l'hypothèse que nous avons faite dans les calculs antérieurs.

Digitized by Google Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:42 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

Quelle est la signification des deux valeurs de k. Supposons qu'après avoir isolé parfaitement la ligne à ses deux extrémités, on lui communique une charge uniforme, cette charge se dissipera peu à peu à cause des pertes; mais la charge restera uniforme; il ne naîtra donc aucun courant dans la ligne, et nous aurons :

$$\gamma \frac{dV}{dt} + \alpha V = 0$$

d'où

$$V = e^{kt}, \quad \gamma k + \alpha = 0$$

La seconde valeur de k définit donc la rapidité avec laquelle se perd la charge; elle est essentiellement négative.

Supposons maintenant que la ligne soit soumise pendant un certain temps à une force électromotrice E uniformément répartie tout le long de la ligne; dans le régime qui s'établira, l'intensité i sera constante et égale à $\frac{E}{\rho}$ tout le long de la ligne; la ligne ne prendra aucune charge et on aura $V = 0$. Faisons maintenant disparaître brusquement la force électromotrice, le courant i restera indépendant de x et V restera nul, de sorte qu'on aura :

$$\lambda \frac{di}{dt} + \rho i = 0$$

d'où

$$i = e^{kt} \quad \lambda k + \rho = 0$$

La première valeur de k définit la rapidité avec laquelle disparaît un courant uniforme, quand la ligne n'a pris aucune charge; elle est essentiellement négative.

Qu'arrive-t-il maintenant si les deux valeurs de k sont égales; on a alors :

$$\gamma\rho - \alpha\lambda = 0$$

de sorte que notre équation se réduit à

$$\lambda\gamma \frac{d^2U}{dt^2} = \frac{d^2U}{dx^2}$$

C'est l'équation des cordes vibrantes, la valeur de U se propage avec une vitesse uniforme, égale à celle de la lumière et sans altération. Quant à celle de $\Phi = e^{kt}U$, elle se propage avec cette même vitesse, et sans autre altération qu'un affaiblissement représenté par le facteur exponentiel e^{kt}.

Ainsi pour une certaine valeur de la perte, qu'on pourrait appeler *perte idéale*, les signaux s'affaiblissent avec la distance, mais *sans rien perdre de leur netteté*.

On conçoit donc que dans certains cas, une perte puisse améliorer les transmissions.

Remarque sur le transmetteur. — Dans tout ce qui précède nous avons toujours supposé que la force électromotrice de la pile $f(t)$ était donnée en fonction du temps. Cela est vrai si la ligne mise à la pile pendant l'émission des signaux, est mise immédiatement à la terre dans l'intervalle des signaux. Les choses se passeraient d'une façon plus compliquée si dans l'intervalle des signaux la ligne était isolée, ou réunie à la terre par l'intermédiaire d'un récepteur.

Considérons le cas où la ligne est isolée; on a pour $x = 0$

Digitized by Google Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:42 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

1° avant l'émission du signal :

$$\Phi = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dx} = 0;$$

2° pendant l'émission du signal

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2} \text{ (la force de la pile} = 1);$$

3° après l'émission du signal $\frac{d\Phi}{dx} = 0$, $\Phi = C$.

Si l'on avait après l'émission du signal $\frac{d\Phi}{dx} = 0$, et si le signal était très court, émis au temps zéro et la ligne indéfinie, on aurait :

$$\text{pour } t < x,\ \Phi = 0,\ \text{pour } t > x,\ \Phi = Ke^{-t} J_0 \left(\sqrt{x^2 - t^2}\right)$$

et on trouverait des valeurs analogues si l'on supposait que la durée de l'émission est finie (vide supra).

Soit Φ_0 la valeur de Φ correspondant à cette hypothèse, $\Phi_0 + \Phi_1$ la véritable valeur de Φ ; on aura avant et pendant l'émission $\Phi = 0$, puisque les hypothèses ne deviennent différentes qu'après l'émission. Après l'émission on aura : pour $x = 0$,

$$\Phi_1 = C - \Phi_0$$

de sorte que Φ_1 est donné pour $x = 0$. Nous remarquerons que cette valeur donnée de Φ_1 est toujours positive, parce que pour $x = 0$ les fonctions $e^{-t} J_0 (it)$ et Φ_0 sont toujours décroissantes.

Ainsi Φ_1 est donnée en fonction de t ; elle est nulle jusqu'à la fin de l'émission et positive ensuite. Le calcul de Φ_1 pour des valeurs de x différentes de zéro est facile. Nous trouvons ; si $\Phi_1 = e^{iqt}$ pour $x = 0$: (et dans le cas de la ligne indéfinie)

$$\Phi_1 = e^{i(qt + px)}$$

d'où pour un ébranlement instantané :

$$\Phi_1 = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(qt + px)}\, dq = \varphi\,(t, x).$$

Si nous supposons $\Phi_1 = f\,(t)$ pour $x = 0$, il vient, comme plus haut :

$$\Phi_1 = \int f\,(\tau)\ \varphi\,(t - \tau\,,\ x)\ d\tau$$

je remarque seulement que $f\,(\tau)$ étant essentiellement positif, la fonction Φ_1 ne décroîtra que très lentement et que les transmissions seront beaucoup plus mauvaises.

Si l'on supposait qu'après l'émission la ligne est mise à la terre par l'intermédiaire d'un récepteur, le calcul serait analogue. On aurait avant l'émission

$$\Phi = \frac{d\Phi}{dx} = 0$$

pendant l'émission

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{1}{2}$$

Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:42 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google

après l'émission une certaine relation entre Φ et ses dérivés que j'écris $\Delta\Phi = 0$. Soit alors Φ_0 ce qui serait Φ si on mettait *directement* à la terre après l'émission, $\Phi_0 + \Phi_1$, la vraie valeur de Φ.

On a alors

Avant et pendant l'émission

$$\Phi_1 = \Delta\Phi_1 = 0$$

Après l'émission

$$\Delta\Phi_1 = -\Delta\Phi_0$$

C'est-à-dire que $\Delta\Phi_1$ est une fonction connue du temps. On cherchera la solution isochrone en supposant d'abord $\Delta\Phi_1 = e^{iqt}$ et on en déduira, toujours par le même procédé, la solution générale et l'ébranlement élémentaire. Il est clair qu'on peut encore opérer de même dans des cas plus compliqués.

H. Poincaré.

L'ÉCLAIRAGE PAR L'ÉLECTRICITÉ

DES TRAINS DE CHEMINS DE FER

Les brillants résultats obtenus sur les tramways et chemins de fer électriques, où l'éclairage des wagons par l'électricité s'imposait et a été réalisé à la satisfaction de tous, ont rendu le public fort difficile sur l'éclairage des trains mus par la vapeur. L'éclairage par l'électricité offre sur l'ancien mode d'éclairage par gaz riche l'avantage principal de pouvoir distribuer la lumière suivant les besoins des voyageurs. En particulier il permet au public, grâce à la disposition convenable de lampes murales, de s'adonner sans fatigue à la lecture, distraction qui tend de plus en plus à occuper les voyageurs. Il est de plus possible par l'installation de lampes de tables, de plafond ou murales, de rendre beaucoup plus confortable et commode l'éclairage des wagons-restaurants, wagons-lits et des voitures de luxe. N'oublions pas que la clarté de la lampe électrique et l'éclairairement du livre dépendant de la place que la lampe occupe dans les wagons, fatiguent considérablement moins la vue des lecteurs, qui par suite peuvent tromper d'une manière agréable la longueur, même relative des trajets. Obtenir avec l'ancien mode d'éclairage an gaz la même clarté qu'avec la lumière électrique, est pratiquement impossible, d'autant plus qu'il est plus fatiguant d'être exposé à une clarté trop vive qu'à une lumière insuffisante.

Etant donné l'état actuel de l'industrie électrique, l'éclairage de trains par l'électricité ne peut plus compter parmi les installations de luxe. Il offre trop d'avantages, consacrés par de nombreuses et fructueuses études, tant par les considérations signalées plus haut que par une très grande facilité d'utilisation et de maniement des appareils, pour qu'il ne puisse plus être question de réserver ce mode d'éclairage aux voitures de 1re et 2me classe des grandes lignes. Il serait d'ailleurs pratiquement difficile de limiter de la sorte l'emploi de la lumière électrique, car les wagons les plus récents vont, après un certain nombre d'années terminer leur service dans des trains de moindre importance sur des lignes secondaires ou d'intérêt local. L'éclairage électrique est donc destiné à se propager même dans les trains de toutes catégories et les plus lents des plus petites lignes.

Digitized by Google
Original from HARVARD UNIVERSITY
Generated for WA (Library of Congress) on 2019-10-08 19:42 GMT / http://hdl.handle.net/2027/hvd.hxfyla
Public Domain in the United States, Google-digitized / http://www.hathitrust.org/access_use#pd-us-google